

两类冠图的点边邻点可区别全染色

田京京

陕西理工学院数学系, 陕西汉中 723001

摘要 图的染色理论是图论的一个重要研究领域, 求解图的色数被认为是一个 NP-hard 问题。对简单连通图 $G(V, E)$, 存在一个正整数 k , 使得映射 $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, 如果对 $\forall uv \in E(G)$, 有 $f(u) \neq f(uv)$, $f(v) \neq f(uv)$, 且 $C(u) \neq C(v)$, 则称 f 是图 G 的点边邻点可区别全染色 (又称为邻点可区别 VE-全染色), 而 $\chi_{\text{ve}}^{\text{ad}}(G) = \min\{k | k\text{-VE-AVDTC}\}$, 称为 G 的点边邻点可区别边色数 (又称为邻点可区别 VE-全色数), 其中色集合 $C(u) = \{f(u)\} \cup \{f(uv) | uv \in E(G)\}$ 。本文构造了两类冠图 $C_m \cdot S_n$ 和 $C_m \cdot P_n$, 研究了两类冠图 $C_m \cdot S_n$ 和 $C_m \cdot P_n$ 的点边邻点可区别全染色。根据 $C_m \cdot S_n$ 和 $C_m \cdot P_n$ 的结构性质, 用穷染递推的方法, 得到了它们的相应色数, 给出一种染色方案。

关键词 冠图; 点边邻点可区别全染色; 点边邻点可区别边色数

中图分类号 O157.5

文献标识码 A

doi 10.3981/j.issn.1000-7857.2011.27.008

Vertex-edge Adjacent Vertex-distinguishing Total Chromatic Number of the Two Kinds of Crown Graphs

TIAN Jingjing

Department of Mathematics, Shaanxi University of Technology, Hanzhong 723001, Shaanxi Province, China

Abstract Graph coloring is one of the chief topics in the graph research, the solution of the chromatic number of the graph is an NP-hard problem. Let $G(V, E)$ be a simple graph, k is a positive integer. f is a mapping from $V(G) \cup E(G)$ to $\{1, 2, \dots, k\}$ such that $\forall uv \in E(G)$, then $f(u) \neq f(uv)$, $f(v) \neq f(uv)$, $C(u) \neq C(v)$, f can be called the vertex-edge-adjacent vertex distinguishing total coloring of G (adjacent vertex distinguishing VE-total coloring of G), $\chi_{\text{ve}}^{\text{ad}}(G) = \min\{k | k\text{-VE-AVDTC}\}$ would be called the vertex-edge-adjacent vertex distinguishing total chromatic number of G (adjacent vertex distinguishing VE-total chromatic number of G), where vertex-edge-adjacent vertex distinguishing total coloring of G $C(u) = \{f(u)\} \cup \{f(uv) | uv \in E(G)\}$. In this paper, two kinds of crown graphs $C_m \cdot S_n$ and $C_m \cdot P_n$ are designed, the vertex-edge-adjacent vertex distinguishing total coloring of $C_m \cdot S_n$ and $C_m \cdot P_n$ are studied. According to the properties of two kinds of crown graphs $C_m \cdot S_n$ and $C_m \cdot P_n$, by using colors one by one and in recursion, the vertex-edge-adjacent vertex distinguishing total chromatic numbers of two kinds of crown graphs $C_m \cdot S_n$ and $C_m \cdot P_n$ are obtained.

Keywords crown graph; vertex-edge-adjacent vertex distinguishing total coloring; vertex-edge-adjacent vertex distinguishing total chromatic number

0 引言

图的染色问题是图论研究的主要内容之一, 它有着很重要的实际应用背景, 无论是电信通讯站点的频率分配问题, 还是人力资源配置问题都与图染色有着重要的联系。目前, 图的染色理论被广泛应用于计算机网络结构区分、计算机和银行安全密码问题等方面。图的染色的基本问题是确定其各种染色法的色数^[1-9]。为解决网络权的分配问题, Burris、Bazgan

等^[1-2]提出点可区别边染色 (也称为强边染色)。2002 年, 张忠辅等^[3]提出了图的邻强边染色 (邻点可区别边染色), 并得到了圈、完全图等某些特殊图类的邻强边色数 (即邻点可区别边色数)。2005 年, 张忠辅等^[4]提出邻点可区别全染色, 引起国内外学者的关注, 陈祥恩^[5]、王海英^[6]分别研究了图的最大度等于 3 时的邻点可区别边染色, 得到一些重要的结果, Hulgán^[7]给出了图的邻点可区别全染色的一种简洁证明方法。张忠辅等^[8]

收稿日期: 2011-04-18; 修回日期: 2011-08-18

基金项目: 陕西省教育厅专项科研计划项目 (11JK0508)

作者简介: 田京京, 讲师, 研究方向为图论及其应用, 电子信箱: tianjingjing2004@163.com

又提出了图的点边邻点可区别全染色 (又称为图的邻点可区别 VE-全染色), 其色数简记为 k -VE-AVDTC。这是对邻点可区别边染色的一种推广, 有着很重要的理论意义。

本文根据 $C_m \cdot S_n$ 和 $C_m \cdot P_n$ 的结构性质, 用穷染递推的方法, 讨论了它们的邻点可区别 VE-全染色, 得到了它们的相应色数, 给出一种染色方案。

1 预备知识

下面介绍一些主要结论及其证明中要用到的预备知识。

定义 1^[8] 对简单连通图 $G(V, E)$, 存在一个正整数 k , 使得映射 $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, K\}$ 如果满足

$$(1) \forall uv \in E(G), f(u) \neq f(uv), f(v) \neq f(uv);$$

$$(2) \forall uv \in E(G), \text{且 } C(u) \neq C(v)$$

则称 f 是图 G 的点边邻点可区别全染色 (又称为邻点可区别 VE-全染色), 而 $\chi_{\alpha}^{ve}(G) = \min\{k | k\text{-VE-AVDTC}\}$, 称为 G 的点边邻点可区别全色数 (又称为邻点可区别 VE-全色数), 简记为 k -VE-AVDTC。其中色集合 $C(u) = \{f(u)\} \cup \{f(uv) | uv \in E(G)\}$ 。

引理 1^[8] 对简单连通图 $G(V, E)$, $\chi_{\alpha}^{ve}(G) \leq \chi_{\alpha}(G)$ 。

引理 2^[8] 对简单连通图 $G(V, E)$, $\chi_{\alpha}^{ve}(G) \geq 3$ 。

定义 2 S_n 表示阶为 $n+1$ 的星, 当 m 个 S_n 的星心连成圈时, 用 $C_m \cdot S_n$ 表示, 称为 m 个 S_n (星) 的心联图, 又称为圈和星的冠图, 记作 $C_m \cdot S_n$, 设 m 个 S_n 的星心为 $\{v_{i0} | i=1, 2, \dots, m\}$, 其余点为 $\{v_{ij} | i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n\}$, 则

$$V(C_m \cdot S_n) = \{v_{i0} | i=1, 2, \dots, m\} \cup \{v_{ij} | i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n\}$$

$$E(C_m \cdot S_n) = \{v_{i0}v_{i+1,0} | i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n\} \cup \{v_{i0}v_{ij} | i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n\}$$

定义 3 图 $G(V, E)$ 满足

$$V(C_m \cdot P_n) = \{v_{ij} | i=1, 2, \dots, m; j=0, 1, 2, \dots, n\}$$

$$E(C_m \cdot P_n) = \{v_{ij}v_{i(j+1)} | i=0, 1, 2, \dots, m; j=0, 1, 2, \dots, n-2\} \cup \{v_{i0}v_{(i+1,0)} | i=1, 2, \dots, m-1\} \cup \{v_{m0}v_{10}\}$$

称 $C_m \cdot P_n$ 为圈和路的冠图。

文中未加说明的术语、记号参见文献[9]。

2 冠图 $C_m \cdot S_n$ 的点边邻点可区别全染色

定理 1 当 $m \geq 3, n \geq 2$ 时, 有

$$\chi_{\alpha}^{ve}(C_m \cdot S_n) = \begin{cases} 3 & m \equiv 0(\text{mod } 2) \\ 4 & m \equiv 1(\text{mod } 2) \end{cases}$$

证明 分两种情况考虑。

情况 1 当 $m \geq 4, m \equiv 0(\text{mod } 2)$ 时, 由引理 1, 2 知, 为证结论成立只需给出 $C_m \cdot S_n$ 的一个 3-VE-AVDTC 法, 为此令 f 为

$$f(v_{i0}) = \begin{cases} 2 & i \equiv 0(\text{mod } 2) \\ 1 & i \equiv 1(\text{mod } 2) \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, m$$

$$f(v_{ij}) = \begin{cases} 1 & i \equiv 0(\text{mod } 2) \\ 2 & i \equiv 1(\text{mod } 2) \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, m$$

$$f(v_{i0}v_{ij}) = 3 \quad i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$$

$$f(v_{i0}v_{(i+1,0)}) = f(v_{m0}v_{10}) = 3 \quad i=1, 2, \dots, m-1$$

对此 f 有

$$C(v_{i0}) = \begin{cases} \{2, 3\} & i \equiv 0(\text{mod } 2) \\ \{1, 3\} & i \equiv 1(\text{mod } 2) \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, m$$

$$C(v_{ij}) = \begin{cases} \{1, 3\} & i \equiv 0(\text{mod } 2) \\ \{2, 3\} & i \equiv 1(\text{mod } 2) \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, m$$

故 f 是 $C_m \cdot S_n$ 的一个 3-VE-AVDTC。

情况 2 当 $m \geq 3, m \equiv 1(\text{mod } 2)$ 时, 由引理 1, 2 知, 为证结论成立只需给出 $C_m \cdot S_n$ 的一个 4-VE-AVDTC 法。分两种情况给出染色法。

情况 2.1 当 $m \geq 3, m \equiv 1(\text{mod } 2)$ 且 $m \not\equiv 1(\text{mod } 3)$ 时, 令 f 为对点 $v_{10}, v_{20}, \dots, v_{m0}$ 用颜色 1, 2, 3 循环染:

$$f(v_{ij}) = \begin{cases} 3 & i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ 1 & i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ 2 & i \equiv 0(\text{mod } 3) \end{cases}$$

$$f(v_{i0}v_{ij}) = 4 \quad i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$$

$$f(v_{i0}v_{(i+1,0)}) = f(v_{m0}v_{10}) = 4 \quad i=1, 2, \dots, m-1$$

对此 f 有

$$C(v_{i0}) = \begin{cases} \{1, 4\} & i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ \{2, 4\} & i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ \{3, 4\} & i \equiv 0(\text{mod } 3) \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, m$$

$$C(v_{ij}) = \begin{cases} \{3, 4\} & i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ \{1, 4\} & i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ \{2, 4\} & i \equiv 0(\text{mod } 3) \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, m$$

故 f 是 $C_m \cdot S_n$ 的一个 4-VE-AVDTC。

情况 2.2 当 $m \geq 3, m \equiv 1(\text{mod } 2)$ 且 $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ 时, 令 f 为

$$f(v_{i0}) = \begin{cases} 1 & i \equiv 1(\text{mod } 2) \\ 2 & i \equiv 0(\text{mod } 2) \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, m-1$$

$$f(v_{m0}) = 3$$

$$f(v_{ij}) = \begin{cases} 2 & i \equiv 1(\text{mod } 2) \\ 1 & i \equiv 0(\text{mod } 2) \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, m$$

$$f(v_{i0}v_{ij}) = 4 \quad i=1, 2, \dots, m \quad j=1, 2, \dots, n$$

$$f(v_{i0}v_{(i+1,0)}) = f(v_{m0}v_{10}) = 4 \quad i=1, 2, \dots, m-1$$

对此 f 有

$$C(v_{i0}) = \begin{cases} \{1, 4\} & i \equiv 1(\text{mod } 2) \\ \{2, 4\} & i \equiv 0(\text{mod } 2) \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, m-1$$

$$C(v_{m0}) = \{3, 4\}$$

$$C(v_{ij}) = \begin{cases} \{2, 4\} & i \equiv 1(\text{mod } 2) \\ \{1, 4\} & i \equiv 0(\text{mod } 2) \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, m$$

故 f 是 $C_m \cdot S_n$ 的一个 4-VE-AVDTC。

综合上面两种情况, 定理 1 得证。

3 冠图 $C_m \cdot P_n$ 的点边邻点可区别全染色

定理 2 当 $m \geq 3, n \geq 2$ 时, 有

$$\chi_{\alpha}^{ve}(C_m \cdot P_n) = \begin{cases} 3 & m \equiv 0(\text{mod } 2) \\ 4 & m \equiv 1(\text{mod } 2) \end{cases}$$

证明 分两种情况考虑。

情况 1 当 $m \geq 4, m \equiv 0(\text{mod} 2)$ 时, 由引理 1, 2 知, 为证结论成立只需给出 $C_m \cdot P_n$ 的一个 3-VE-AVDTC 法。

对于点 v_{i0} 和边 $v_{i0}v_{(i+1)0}$ 以及边 $v_{m0}v_{10}$ 的染法与定理 1 的情况 1 相同, 对于其他的点和边给出如下染色法 f :

(1) 对点 $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{(n-1)i}$ ($i \equiv 1(\text{mod} 2)$) 用颜色 2, 1 循环染;

(2) 对点 $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{(n-1)i}$ ($i \equiv 0(\text{mod} 2)$) 用颜色 1, 2 循环染。

$$f(v_{ij}v_{i(j+1)})=3 \quad i=1, 2, \dots, m; j=0, 1, 2, \dots, n-2$$

对此 f 有

$$C(v_{i0})=\begin{cases} \{2, 3\} & i \equiv 0(\text{mod} 2) \\ \{1, 3\} & i \equiv 1(\text{mod} 2) \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, m$$

$$C(v_{ij})=\begin{cases} \{1, 3\} & i \equiv 0(\text{mod} 2) \\ \{2, 3\} & i \equiv 1(\text{mod} 2) \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n-1$$

故 f 是 $C_m \cdot P_n$ 的一个 3-VE-AVDTC。

情况 2 当 $m \geq 3, m \equiv 1(\text{mod} 2)$ 时, 由引理 1, 2 知, 为证结论成立只需给出 $C_m \cdot P_n$ 的一个 4-VE-AVDTC 法, 分两种情况给出染色法。

情况 2.1 当 $m \geq 3, m \equiv 1(\text{mod} 2)$ 且 $m \not\equiv 1(\text{mod} 3)$ 时令 f 为对于点 v_{i0} 和边 $v_{i0}v_{(i+1)0}$ 以及边 $v_{m0}v_{10}$ 的染法与定理 1 的情况 2 相同, 对于其他的点和边给出如下染色法 f :

(1) 对点 $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{(n-1)i}$ ($i \equiv 1(\text{mod} 3)$) 用颜色 3, 2, 1 循环染;

(2) 对点 $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{(n-1)i}$ ($i \equiv 2(\text{mod} 3)$) 用颜色 1, 2, 3 循环染;

(3) 对点 $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{(n-1)i}$ ($i \equiv 0(\text{mod} 3)$) 用颜色 2, 3, 1 循环染。

$$f(v_{ij}v_{i(j+1)})=4 \quad i=1, 2, \dots, m; j=0, 1, 2, \dots, n-2$$

易知 $\forall uv \in E(G), C(u) \neq C(v)$, 故 f 是 $C_m \cdot P_n$ 的一个 4-VE-AVDTC。

情况 2.2 当 $m \geq 3, m \equiv 1(\text{mod} 2)$ 且 $m \equiv 1(\text{mod} 3)$ 时证明情

况与定理 1 中情况 2.2 类似, 证明过程从略。

综合上面两种情况, 定理 2 得证。

4 结论

根据 $C_m \cdot S_n$ 和 $C_m \cdot P_n$ 的结构性质, 用穷染递推的方法, 研究了它们的点边邻点可区别全染色, 得到并证明了: 当 $m \geq 3, n \geq 2$ 时, 有 $\chi_{ad}^{ve}(C_m \cdot S_n) = \chi_{ad}^{ve}(C_m \cdot P_n) = \begin{cases} 3 & m \equiv 0(\text{mod} 2) \\ 4 & m \equiv 1(\text{mod} 2) \end{cases}$, 还分别给出它们的染色方案。

参考文献 (References)

- [1] Burris A C, Schelp R H. Vertex-distinguishing proper edge-coloring[J]. *Journal of Graph Theory*, 1997, 26(2): 73-82.
- [2] Bazgan C, Harkat-Benhamdine A, Li H, et al. On the vertex-distinguishing proper edge-coloring[J]. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 1999, 75(2): 288-301.
- [3] Zhang Z F, Liu L Z, Wang J F. Adjacent strong edge coloring of graph [J]. *Applied Mathematics Letters*, 2002, 15(5): 623-626.
- [4] Zhang Z F, Chen X E, Li J W, et al. On adjacent-vertex-distinguishing total coloring of graphs [J]. *Science China: Mathematics*, 2005, 48(3): 289-299.
- [5] Chen X E. On the adjacent vertex distinguishing total coloring number of graphs with $\Delta=3$ [J]. *Discrete Mathematics*, 2008, 308(17): 4003-4007.
- [6] Wang H Y. On the adjacent vertex distinguishing total chromatic number of the graphs with $\Delta=3$ [J]. *J Combin Optim*, 2007, 14: 87-109.
- [7] Hulan J. Concise proofs for adjacent vertex-distinguishing total colorings [J]. *Discrete Mathematics*, 2009, 309(8): 2548-2550.
- [8] Zhang Z F, Li J W, Qiang H Y, et al. Vertex-edge-adjacent vertex distinguishing total chromatic number of graphs [R]. Lanzhou: Lanzhou Jiaotong University, 2008.
- [9] Bondy J A, Murty U S R. Graph theory with application [M]. New York: The Macmillan, Press Ltd, 1976.

(责任编辑 代丽)

·学术动态·

“第三届国际葡萄膜炎研讨会”征文

由重庆医科大学、重庆医科大学附属第一医院主办的“第三届国际葡萄膜炎研讨会”拟于 2011 年 12 月 1—3 日在重庆市召开。

征文范围: 各种类型葡萄膜炎、眼内炎、手术后所致炎症反应及眼免疫相关的临床与基础研究论文或经验体会。

论文截止日期: 2011 年 10 月 15 日。

联系电话: 023-68485440。

电子信箱: uveitis2011@126.com。

通信地址: 重庆市渝中区友谊路 1 号重庆医科大学附属第一医院眼科 (410060)

会议网站: <http://uveitis.com.cn/>。