

一类具双时滞的食饵-捕食系统的 Hopf 分支分析

徐秀艳

黑龙江科技学院理学院, 哈尔滨 150027

摘要 讨论了具有追捕时滞(捕食者的成熟时滞) τ_1 、两种群生长时滞 τ_2 的双时滞食饵-捕食系统稳定性, 确定各时滞取值范围对系统中食饵与捕食者数量的影响。首先, 分别以追捕时滞(捕食者的成熟时滞) τ_1 、两种群的生长时滞 τ_2 为参数, 通过对系统线性化方程特征根的分布分析, 找到特征根具严格负实部的时滞取值范围, 得到系统平衡点的稳定性条件, 确定了系统平衡点的线性稳定性区域。其次, 讨论系统追捕时滞(捕食者的成熟时滞 τ_1)在稳定区域内时, 以两种群的生长时滞 τ_2 为参数时系统的稳定性, 及系统 Hopf 分支的存在条件, 利用中心流形理论和规范型方法计算了系统 Hopf 分支方向和分支周期解的稳定性, 得到了系统参数的取值范围。

关键词 食饵-捕食系统; 时滞; Hopf 分支; 中心流形; 规范型

中图分类号 O175.13

文献标识码 A

doi 10.3981/j.issn.1000-7857.2011.25.012

Hopf Bifurcation Analysis on a Predator-prey System with Double Time Delays

XU Xiuyan

Department of Mathematics, Heilongjiang Institute of Science and Technology, Harbin 150027, China

Abstract A kind of predator-prey system with double time delays i.e. the hunting delay (the time delay of the predator maturation) τ_1 and the growth time delay of the predator and the prey τ_2 is investigated. Stability analysis on the equilibrium point of the system is carried out, and the ranges of the time delays are determined. Thus, the impact of the predator and the prey is in-depth studied. First of all, the hunting delay (the time delay of the predator maturation) τ_1 and the growth time delay of the predator and the prey τ_2 are taken as parameters, respectively. The range of the roots with a strictly negative real part is found by analyzing the distribution of characteristic roots for the linearized equation. The condition to ensure the stability of the zero solution of the system and its stable domain are decided. Secondly, when the hunting delay τ_1 is in the stable region, the stability and the existence of Hopf bifurcation are given. Then the Hopf bifurcation is discussed by using the center manifold theory and normal form method introduced by Hassard and Kazarinoff. Both direction and stability of the Hopf bifurcation are considered, and the ranges for the system parameters are obtained.

Keywords predator-prey system; time delay; Hopf bifurcation; center manifold; normal form

0 引言

随着泛函微分方程理论不断发展, 时滞被引入到各类动力学系统中, 并对其动力学行为产生较大影响。例如, 时滞可引起系统稳定性的改变、周期解的发生, 以及混沌等现象^[1-3]。20 世纪 20 年代, 人们开始研究食饵-捕食模型, 随着研究深

入, 人们开始对以下具有时滞的食饵-捕食系统的稳定性进行讨论:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)[r_1 - a_{11}x(t - \tau_1) - a_{12}y(t - \tau_2)] \\ \dot{y}(t) = y(t)[-r_2 + a_{21}x(t - \tau_3) - a_{22}y(t - \tau_4)] \end{cases} \quad (1)$$

其中, $x(t)$, $y(t)$ 分别表示食饵与捕食者的种群密度; $r_1 > 0$, $r_2 > 0$

收稿日期: 2011-06-10; 修回日期: 2011-06-27

基金项目: 黑龙江省教育厅科学技术研究项目(12511483); 黑龙江科技学院引进人才科研启动基金项目(06-138)

作者简介: 徐秀艳, 讲师, 研究方向为泛函微分方程, 电子信箱: yuhese@163.com

分别表示食饵与捕食者的内禀增长率; $a_{ij}(i, j=1, 2) > 0$ 分别表示两种群密度作用的种内作用系数; τ_1, τ_4 分别表示追捕时滞与捕食者的成熟时滞; τ_2, τ_3 分别表示食饵与捕食者的生长时滞。2004—2005 年, 宋永利、魏俊杰等^[4-5]利用 Hale^[6]与 Wu^[7]所介绍的方法讨论了系统(1)在只具有食饵的生长时滞 τ_1 时的稳定性、Hopf 分支存在性及其全局性。2006—2009 年, 对系统(1)在具有生长时滞、追捕时滞、成熟时滞都相等时的稳定性、Hopf 分支存在性及其全局性进行讨论^[1-2, 8-9]。随着讨论的深入, 袁圆、魏俊杰等^[10-11]发现要使所描述的系统更符合现实, 应在系统中引入多个时滞, 这样讨论系统的动力学性质对于实际应用更有价值。然而, 多时滞会使系统的线性化方程所对应的特征方程成为非常复杂的超越方程^[12], 要讨论其根的分布就更加困难^[13], 人们通过简化其特征方程中的时滞关系分析其根的分布情况, 进一步讨论系统的稳定性与分支性质, 其简化过程使得多时滞转化为单时滞^[8-9, 14]。对于系统(1), 以往很多文献只针对单时滞或时滞相等的特殊情况加以讨论, 并没有讨论多时滞的系统稳定性情况, 本文充分考虑实际情况, 真实反映两种群间的捕食关系, 令食饵与捕食者的生长时滞相同, 追捕时滞与捕食者的成熟时滞相同时, 分别以这两个时滞对系统(2)进行稳定性讨论, 并确定稳定性区域, 研究分支性质:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)[r_1 - a_{11}x(t - \tau_1) - a_{12}y(t - \tau_2)] \\ \dot{y}(t) = y(t)[-r_2 + a_{21}x(t - \tau_2) - a_{22}y(t - \tau_1)] \end{cases} \quad (2)$$

1 平衡点的稳定性及 Hopf 分支

如果 $r_1 a_{21} - r_2 a_{11} > 0$, 则系统(2)存在正平衡点 (x^*, y^*) , 其中

$$x^* = \frac{r_1 a_{22} + r_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21}}, \quad y^* = \frac{r_1 a_{21} - r_2 a_{11}}{a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21}}$$

令 $m(t) = x(t) - x^*, n(t) = y(t) - y^*$, 代入系统(2), 得

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = (m(t) + x^*)[-a_{11}m(t - \tau_1) - a_{12}n(t - \tau_2)] \\ \frac{dn}{dt} = (m(t) + y^*)[a_{21}m(t - \tau_2) - a_{22}n(t - \tau_1)] \end{cases} \quad (3)$$

则式(3)线性部分所对应的特征方程为

$$\lambda^2 + u\lambda e^{-\lambda\tau_1} + v e^{-2\lambda\tau_1} + w e^{-2\lambda\tau_2} = 0 \quad (4)$$

其中, $u = a_{11}x^* + a_{22}y^* > 0, v = a_{11}a_{22}x^*y^* > 0, w = a_{12}a_{21}x^*y^* > 0$ 。

首先, 讨论系统(2)在追捕时滞(捕食者的成熟时滞)与两种群的生长时滞均为 0 时的稳定性, 即 $\tau_1 = \tau_2 = 0$ 时, 方程(4)变形为

$$\lambda^2 + u\lambda + v + w = 0 \quad (5)$$

整理方程(5)得

$$\lambda_{1,2} = \frac{-u \pm \sqrt{u^2 - 4(v+w)}}{2}$$

由于 $u, v, w > 0$, 因此 $\lambda_{1,2} < 0$, 系统(3)的平衡点 $(0, 0)$ 的稳定性取决于方程(5)根的实部, 当方程根具有负实部时, 零点稳定^[6]。

引理 1 系统(2)在 $\tau_1 = \tau_2 = 0$ 时, 平衡点 (x^*, y^*) 稳定。

其次, 讨论系统(2)在两种群的生长时滞为 0 时, 以追捕时滞(捕食者的成熟时滞)为参数时的稳定性, 即 $\tau_2 = 0$ 时, 方程(4)变形为

$$\lambda^2 + u\lambda e^{-\lambda\tau_1} + v e^{-2\lambda\tau_1} + w = 0 \quad (6)$$

引理 2 当 $\tau_2 = 0$ 时,

(i) 当 $v - w > 0$ 时, 方程(6)在 $\tau_{ij}^* = \frac{2j\pi + \pi/2}{\omega_1^*} (j=0, 1, \dots, n)$

存在一对纯虚根; 当 $v - w < 0$ 时, 方程(6)在 $\tau_{ij} = \frac{2j\pi + \pi/2}{\omega_2^*} (j=0, 1, \dots, n)$ 或 $\tau_{ij}' = \frac{2j\pi + 3\pi/2}{\omega_3^*} (j=0, 1, \dots, n)$ 存在一对纯虚根;

当 $v - w = 0$ 时, 方程(6)在 $\tau_{ij}'' = \frac{2j\pi + \pi/2}{u} (j=0, 1, \dots, n)$ 存在一对纯虚根, 其中 $\omega_1^* = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 4(v-w)}}{2}, \omega_2^* = \frac{u + \sqrt{u^2 - 4(v-w)}}{2}, \omega_3^* =$

$\frac{-u + \sqrt{(-u)^2 - 4(v-w)}}{2}$;

(ii) 系统(2)在 $\tau_1 \in [0, \tau_1^0)$ 时平衡点稳定, 且在 $\tau_1 = \tau_{ij}^* \cup \tau_{ij}' \cup \tau_{ij}''$ 处经历 Hopf 分支, 其中 $\tau_1^0 = \min\{\tau_{ij}^*, \tau_{ij}', \tau_{ij}''\}$ 。

证明 (i) 令 $\lambda = i\omega (\omega > 0)$ 为方程(6)的根, 代入方程(6)有

$$-\omega^2 + u\omega i(\cos\omega\tau_1 - i\sin\omega\tau_1) + v(\cos 2\omega\tau_1 - i\sin 2\omega\tau_1) + w = 0$$

分离实虚部得

$$\begin{cases} -\omega^2 + u\omega \sin\omega\tau_1 + v \cos 2\omega\tau_1 + w = 0 \\ u\omega \cos\omega\tau_1 - v \sin 2\omega\tau_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-\omega^2 + v + w) \cos\omega\tau_1 = 0 \\ (\omega^2 + v - w) \sin\omega\tau_1 - u\omega = 0 \end{cases}$$

当 $-\omega^2 + v + w = 0$, 即 $\omega = \sqrt{v+w}$ 时, 代入 $(\omega^2 + v - w) \sin\omega\tau_1 - u\omega = 0$, 有 $\sin\omega\tau_1 = \frac{u\sqrt{v+w}}{2v} > 1$, 矛盾, 故有 $\cos\omega\tau_1 = 0$, 即 $\sin\omega\tau_1 = \pm 1$ 。若 $\sin\omega\tau_1 = 1$, 代入 $(\omega^2 + v - w) \sin\omega\tau_1 - u\omega = 0$ 有

$$(\omega^2 + v - w) - u\omega = 0 \Rightarrow \omega = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 4(v-w)}}{2} \quad (7)$$

当 $v - w > 0$ 时, 式(7)存在 2 个正根 ω_1^* ; 当 $v - w < 0$ 时, 式(7)存在 1 个正根 ω_2^* ; 当 $v - w = 0$ 时, 式(7)存在 1 个正根 u , 将所有解得的正根代入 $\sin\omega\tau_1 = 1$, 得

$$\sin\omega\tau_1 = 1 \Rightarrow \tau_1^j = \frac{2j\pi + \pi/2}{\omega} \quad j=0, 1, \dots, n$$

将 $\sin\omega\tau_1 = -1$ 代入 $(\omega^2 + v - w) \sin\omega\tau_1 - u\omega = 0$ 有

$$(\omega^2 + v - w) + u\omega = 0 \Rightarrow \omega = \frac{-u \pm \sqrt{(-u)^2 - 4(v-w)}}{2}$$

当 $v - w < 0$ 时, 式(7)存在 1 个正根 ω_3^* , 当 $v - w \geq 0$ 时, 式(7)不存在正根, 解得正根代入

$$\sin\omega_3^*\tau_1 = -1 \Rightarrow \tau_1 = \frac{2j\pi + 3\pi/2}{\omega_3^*} \quad j=0, 1, \dots, n$$

结论得证。

(ii) 令 $\lambda(\tau_1) = R(\tau_1) + i\omega(\tau_1)$ 为方程(6)的根, 则代入并对方程(6)两端同时对 τ_1 求导得

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau_1} \right)^{-1} = \frac{2\lambda + u e^{-\lambda\tau_1}}{u\lambda^2 e^{-\lambda\tau_1} + 2v\lambda e^{-2\lambda\tau_1}} - \frac{\tau_1}{\lambda}$$

整理得

$$\begin{aligned} \text{sign}\{R'(\tau_{ij}^*)\} &= \text{sign}\{R''(\tau_{ij}^*)\} = \text{sign}\{R'(\tau_{ij})\} \\ &= \text{sign}\left\{\text{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau_1}\right)^{-1}\right\}_{\lambda=i\omega_2^*, \tau_1=\tau_{ij}^*} = \frac{2\omega_2^*-u}{\omega_2^*(u\omega_2^*-2v)} > 0 \\ \text{sign}\{R'(\tau_{ij}')\} &= \text{sign}\left\{\text{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau_1}\right)^{-1}\right\}_{\lambda=i\omega_3^*, \tau_1=\tau_{ij}'} = -\frac{2\omega_3^*+u}{u\omega_3^{*2}+2v\omega_3^*} < 0 \end{aligned}$$

由文献[15]中的定理 2.1 得, 结论(ii)成立。

再次, 讨论系统(2)在追捕时滞(捕食者的成熟时滞)为 0 时, 以两种群的生长时滞为参数时的稳定性, 即 $\tau_1=0$ 时, 方程(4)变形为

$$\lambda_2 + u\lambda + v + we^{-2\lambda\tau_2} = 0 \quad (8)$$

引理 3 当 $\tau_1=0, v-w<0$ 时, 则存在 τ_2^0 使方程(8)在 $\tau_2 \in [0, \tau_2^0]$ 时, 所有根具有严格的负实部, 当 $\tau_2 > \tau_2^0$ 时方程(8)至少

存在 1 个具有正实部的根, 其中 $\tau_2^0 = \frac{\arcsin \frac{u\omega}{w}}{w}, \omega^2 = \frac{2v-u^2 \pm \sqrt{(u^2-2v)^2-4(v^2-w^2)}}{2}$ 。

证明: 令 $\lambda=i\omega(\omega>0)$ 为方程(8)的根, 代入有 $-\omega^2+u\omega i+v+w(\cos 2\omega\tau_2-i\sin 2\omega\tau_2)=0$

分离实虚部得

$$\begin{cases} -\omega^2+v+w\cos 2\omega\tau_2=0 \\ u\omega-w\sin 2\omega\tau_2=0 \end{cases} \Rightarrow (-\omega^2+v)^2+u^2\omega^2=w^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{2v-u^2 \pm \sqrt{(u^2-2v)^2-4(v^2-w^2)}}{2} \quad (9)$$

由于 $u=a_{11}x^*+a_{22}y^*, v=a_{11}a_{22}x^*y^*$, 则 $2v-u^2<0$, 故当 $v-w<0$ 时, 式(9)存在 1 个正根, 解得的正根代入 $u\omega-w\sin 2\omega\tau_2=0$ 有

$$\tau_2 = \frac{2j\pi + \arcsin \frac{u\omega}{w}}{2\omega} \quad j=0, 1, \dots, n$$

令 $\lambda(\tau_2)=R(\tau_2)+i\omega(\tau_2)$ 为方程(8)满足 $R(\tau_2^0)=0, \omega(\tau_2^0)=\sqrt{\frac{2v-u^2-(u^2-2v)^2-4(v^2-w^2)}{2}}$ 的根, 则代入并对方程(8)两端同时对 τ_2 求导得

$$\frac{d\lambda}{d\tau_2} = \frac{2w\lambda e^{-2\lambda\tau_2}}{2\lambda+u-2w\tau_2 e^{-2\lambda\tau_2}}$$

整理得

$$\text{sign}\{R'(\tau_2^0)\} = \text{sign}\left\{\text{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau_2}\right)^{-1}\right\}_{\lambda=i\omega, \tau_2=\tau_2^0} = \frac{u^2-2v+2\omega^2}{2w^2} > 0$$

由函数的性质及引理 1, 结论得证。

随后, 讨论系统(2)在追捕时滞(捕食者的成熟时滞)在稳定区域内时, 以两种群的生长时滞为参数时的稳定性, 即 $\tau_1 \in (0, \tau_1^0)$ 时, 方程(4)根的分布情况。

为方便起见, 不妨设

- (I) $v-w<0, \tau_1 \in [0, \tau_1^0], \tau_1^0 = \min\{\tau_{10}, \tau_{10}'\};$
- (II) $v-w=0, \tau_1 \in [0, \tau_{10}']$ 。

引理 4 如果(I)或(II)成立, 则存在 $\omega>0$ 使得方程(4)在 $\tau_2=\tau_{2j}(j=0, 1, \dots, n)$ 处存在一对纯虚根 $\pm i\omega$, 且当 $\tau_2 \in [0, \tau_{20})$ 时,

方程(4)的根具有严格的负实部, 其中

$$\tau_{2j} = \frac{\arcsin \frac{u\omega \cos \omega\tau_1 - v \sin 2\omega\tau_1}{w} + 2j\pi}{2\omega} \quad j=0, 1, \dots, n$$

证明 令 $\lambda=i\omega(\omega>0)$ 为方程(4)的根, 代入有

$$-\omega^2+u\omega i(\cos \omega\tau_1-i\sin \omega\tau_1)+v(\cos 2\omega\tau_1-i\sin 2\omega\tau_1)+w(\cos 2\omega\tau_2-i\sin 2\omega\tau_2)=0$$

分离实虚部得

$$\begin{cases} -\omega^2+u\omega \sin \omega\tau_1+v\cos 2\omega\tau_1+w\cos 2\omega\tau_2=0 \\ u\omega \cos \omega\tau_1-v\sin 2\omega\tau_1-w\sin 2\omega\tau_2=0 \end{cases} \Rightarrow \omega^4-2u\omega^3 \sin \omega\tau_1+u^2\omega^2-2v\omega^2 \cos 2\omega\tau_1-2u\omega \sin \omega\tau_1+v^2=w^2$$

不妨令

$$z(\omega) = \omega^4-2u\omega^3 \sin \omega\tau_1+u^2\omega^2-2v\omega^2 \cos 2\omega\tau_1-2u\omega \sin \omega\tau_1+v^2-w^2 \quad (10)$$

则有

$$z(0)=v^2-w^2, z(+\infty)=+\infty, z'(0)=0, z''(0)=2u-4v-4u\tau_1$$

故若 $z(0)=v^2-w^2=0$ 时, 且 $z''(0)=2u-4v-4u\tau_1<0$ 时, 则由函数的连续性与凹凸性得到函数(10)存在正根 $\omega>0$, 若 $z(0)=v^2-w^2<0$ 时, 则由函数的连续性得函数(10)存在正根 $\omega>0$, 结论得证。

定理 1 如果(I)或(II)成立, 且当 $\tau_2 \in [0, \tau_2^0]$ 时, 系统(2)的平衡点稳定; 系统(2)在平衡点处当 $\tau_2=\tau_{2j}(j=0, 1, \dots, n)$ 时经历 Hopf 分支。

证明 令 $\lambda(\tau_2)=\sigma(\tau_2)+i\omega(\tau_2)$ 为方程(4)满足 $\sigma(\tau_2^0)=0, \omega(\tau_2^0)=\omega$ 的根, 将 $\lambda(\tau_2)$ 代入方程(4), 再在方程(4)的两端对 τ_2 求导, 得

$$\frac{d\lambda}{d\tau_2} = \frac{2w\lambda e^{-2\lambda\tau_2}}{2\lambda+u-2w\tau_2 e^{-2\lambda\tau_2}}$$

由 $\sigma(\tau_2)=0, \omega(\tau_2)=\omega$, 得

$$\sigma'(\tau_2)|_{\tau_2=\tau_2^0} = \text{Re}\left[\frac{d\lambda}{d\tau_2}\right]_{\tau_2=\tau_2^0}$$

$$[2w\omega^2(u^2-uw\tau_1 \cos \omega\tau_1+2\omega^2-uw^2\tau_1 \cos \omega\tau_1+2v\omega\tau_1 \cos \omega\tau_1-3u\omega\tau_1 \sin \omega\tau_1-2v\cos 2\omega\tau_1)]/[u\cos \omega\tau_1-uw\tau_1 \sin \omega\tau_1-2v\tau_1 \cos 2\omega\tau_1-2w\tau_2 \cos 2\omega\tau_2]^2+\Delta^2]$$

其中, $\Delta=[2\omega-usin \omega\tau_1-uw\tau_1 \cos \omega\tau_1+2v\tau_1 \sin 2\omega\tau_1+2w\tau_2 \sin 2\omega\tau_2]^2$ 。

假设 $\sigma'(\tau_2)|_{\tau_2=\tau_2^0} \neq 0$, 则系统(2)在平衡点处当 $\tau_2=\tau_{2j}^0(j=1, 2, \dots, n)$ 时经历 Hopf 分支。

2 Hopf 分支的性质

采用 Hassard 等在文献[15]中给出的中心流形理论、规范型方法和类似于 Wei 与 Ruan^[16]给出的算法研究系统(2)的 Hopf 分支性质。

对于方程(3)经尺度变换 $t \rightarrow (t/\tau_2)$, 得到

$$\begin{cases} \dot{m}(t) = \tau_2[-a_{11}x^*m(t-\tau^*)-a_{12}x^*n(t-1)-a_{11}m(t)m(t-\tau^*)-a_{12}m(t)n(t-1)] \\ \dot{n}(t) = \tau_2[a_{21}y^*m(t-1)-a_{22}y^*n(t-\tau^*)+a_{21}n(t)m(t-1)-a_{22}n(t)n(t-\tau^*)] \end{cases} \quad (11)$$

设 $\tau^* = \frac{\tau_1}{\tau_2}$, 且 $\tau^* < 1$ 。取相空间为 $C = C([-1, 0], R^2)$, 且 $\varphi \in C$ 有

$|\varphi| = \sup_{-1 \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|$, 对于 $\varphi \in C$, 记

$$L_\gamma \varphi = (\tau_{20} + \gamma) G \varphi(-\tau^*) + (\tau_{20} + \gamma) H \varphi(-1)$$

$$f(\gamma, \varphi) = (\tau_{20} + \gamma) \begin{cases} -a_{11} \varphi_1(t) \varphi_1(t - \tau^*) - a_{12} \varphi_1(t) \varphi_2(t - 1) \\ a_{21} \varphi_2(t) \varphi_1(t - 1) - a_{22} \varphi_2(t) \varphi_2(t - \tau^*) \end{cases}$$

$$\text{其中, } G = \begin{bmatrix} -a_{11} x^* & 0 \\ 0 & -a_{22} y^* \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} x^* \\ a_{21} y^* & 0 \end{bmatrix}.$$

由 Riesz 表示定理得, 存在一个有界变差函数矩阵 $\eta(\theta)$, γ , 其中 $\theta \in [-1, 0]$, 使得 $\forall \varphi \in C$ 有 $L_\gamma \varphi = \int_{-1}^0 d\eta(\theta, \gamma) \varphi(\theta)$, 对于 $\varphi \in C$, 定义

$$A(\gamma) \varphi = \begin{cases} \frac{d\varphi(\theta)}{d\theta} & \theta \in [-1, 0) \\ \int_{-1}^0 d\eta(\theta, \gamma) \varphi(\theta) & \theta = 0 \end{cases}$$

$$R(\gamma) \varphi = \begin{cases} 0 & \theta \in [-1, 0) \\ f(\gamma, \varphi) & \theta = 0 \end{cases}$$

因此, 方程(11)可写为

$$\dot{u}_t = A(\gamma) u_t + R(\gamma) u_t \quad (12)$$

其中, $u = (m, n)^T$, $u_t = u(t + \theta)$, $\theta \in [-1, 0]$ 。对于 $\psi \in C^1([0, 1], R^2)$, 定义

$$A^* \psi(s) = \begin{cases} -\frac{d\psi(s)}{ds} & s \in (0, 1] \\ \int_{-1}^0 d\eta(t, 0) \psi(-t) & s = 0 \end{cases}$$

对于 $\varphi \in C([-1, 0], R^2)$ 和 $\psi \in C^1([0, 1], R^2)$, 定义双线性积

$$\langle \psi, \varphi \rangle = \bar{\psi}(0) \varphi(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta(\theta) \varphi(\xi) d\xi$$

其中, $\eta(\theta) = \eta(\theta, 0)$ 。

$A^*(0)$ 和 $A(0)$ 是当 $\mu=0$ 时的伴随算子, $\pm i\omega_{20}\tau_{20}$ 是 $A(0)$ 的特征值, 也是 $A^*(0)$ 的特征值, 通过直接计算, 可以得到 $A(0)$ 关于 $i\omega_{20}\tau_{20}$ 的特征向量 $q(\theta)$ 和 $A^*(0)$ 关于 $-i\omega_{20}\tau_{20}$ 的特征向量 $q^*(s)$ 。

经计算可得它们的具体形式为

$$[i\omega_{20}\tau_{20}I - \tau_{20}(Ge^{-i\omega_{20}\tau_{20}\tau^*} + He^{-i\omega_{20}\tau_{20}})]q(0) = 0$$

解得

$$q(\theta) = q(0)e^{i\omega_{20}\tau_{20}\theta} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} e^{i\omega_{20}\tau_{20}\theta} \quad \theta \in [-1, 0]$$

$$q^*(s) = N(1, \beta)e^{i\omega_{20}\tau_{20}s} \quad s \in [0, 1]$$

$$\alpha = \frac{a_{21}y^*e^{-i\omega_{20}\tau_{20}}}{i\omega + a_{22}y^*e^{-i\omega_{20}\tau_{20}\tau^*}}$$

$$\beta = \frac{a_{12}x^*e^{i\omega_{20}\tau_{20}}}{i\omega - a_{22}y^*e^{i\omega_{20}\tau_{20}\tau^*}}$$

$$N = [1 + \alpha\bar{\beta} - \tau_{20}e^{-i\tau_{20}\omega_{20}}(\alpha a_{12}x^* - a_{21}y^*\bar{\beta}) - \tau_{20}\tau^*e^{-i\tau_{20}\omega_{20}\tau^*}]^{-1}$$

$$(a_{11}x^* + a_{22}y^*\alpha\bar{\beta})^{-1}$$

且 $\langle q^*, q \rangle = 1, \langle q^*, \bar{q} \rangle = 0$ 。

当 $\gamma=0$ 时, 令 u_t 是方程(12)的解, 定义

$$z(t) = \langle q^*(\theta), u_t \rangle$$

$$w(t, \theta) = u_t(\theta) - 2\text{Re}\{z(t)q(\theta)\} \quad (13)$$

在中心流形 C_0 上, $w(t, \theta) = w(z(t), \bar{z}(t), \theta)$, 其中

$$w(z(t), \bar{z}(t), \theta) = w_{20}(\theta)\frac{z^2}{2} + w_{11}(\theta)z\bar{z} + w_{02}(\theta)\frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \quad (14)$$

式(14)中, $z, \bar{z}$ 分别是在中心流形 C_0 上沿着 $q^*, \bar{q}^*$ 方向上的局部坐标。注意, 如果只考虑 u 为实数时, w 也为实数。对于方程(13)的解 $u_t \in C_0$, 由 $\gamma=0$, 得

$$\dot{z}(t) = \langle q^*(\theta), \dot{u}_t \rangle = i\omega_{20}\tau_{20}\langle q^*(\theta), u_t \rangle + \bar{q}^*(0)f_0(z, \bar{z}) = i\omega_{20}\tau_{20}z(t) + \bar{q}^*(0)f_0(z, \bar{z})$$

方程(13)亦可写为

$$\dot{z}(t) = i\omega_{20}\tau_{20}z(t) + g(z, \bar{z})$$

其中,

$$g(z, \bar{z}) = \bar{q}^*(0)f_0(z, \bar{z}) = g_{20}\frac{z^2}{2} + g_{11}z\bar{z} + g_{02}\frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21}\frac{z^2\bar{z}}{2} + \dots$$

$$f_0(z, \bar{z}) = \tau_{20} \begin{cases} -a_{11}x_1(t)x_1(t - \tau^*) - a_{12}x_1(t)x_2(t - 1) \\ a_{21}x_2(t)x_1(t - 1) - a_{22}x_2(t)x_2(t - \tau^*) \end{cases}$$

$$= f_{z^2}\frac{z^2}{2} + f_{z\bar{z}}z\bar{z} + f_{\bar{z}^2}\frac{\bar{z}^2}{2} + f_{z^2\bar{z}}\frac{z^2\bar{z}}{2} + \dots$$

$$x_1(t) = z + \bar{z} + w^{(1)}(z, \bar{z}, 0)$$

$$x_2(t) = iz\omega_{20}^{-1}\bar{z}\omega_{20} + w^{(2)}(z, \bar{z}, 0)$$

$$x_1(t - \tau^*) = ze^{-i\omega_{20}\tau_{20}\tau^*} + \bar{z}e^{-i\omega_{20}\tau_{20}\tau^*} + w^{(1)}(z, \bar{z}, -\tau^*)$$

$$x_2(t - \tau^*) = iz\omega_{20}e^{-i\omega_{20}\tau_{20}\tau^*} - i\bar{z}\omega_{20}e^{-i\omega_{20}\tau_{20}\tau^*} + w^{(2)}(z, \bar{z}, -\tau^*)$$

$$x_1(t - 1) = ze^{-i\omega_{20}\tau_{20}} + \bar{z}e^{-i\omega_{20}\tau_{20}} + w^{(1)}(z, \bar{z}, -1)$$

$$x_2(t - 1) = iz\omega_{20}e^{-i\omega_{20}\tau_{20}} - i\bar{z}\omega_{20}e^{-i\omega_{20}\tau_{20}} + w^{(2)}(z, \bar{z}, -1)$$

这里,

$$w^{(1)}(z, \bar{z}, -\tau^*) = w_{20}^{(1)}(-\tau^*)\frac{z^2}{2} + w_{11}^{(1)}(-\tau^*)z\bar{z} + w_{02}^{(1)}(-\tau^*)\frac{\bar{z}^2}{2} + \dots$$

$$w^{(1)}(z, \bar{z}, -1) = w_{20}^{(1)}(-1)\frac{z^2}{2} + w_{11}^{(1)}(-1)z\bar{z} + w_{02}^{(1)}(-1)\frac{\bar{z}^2}{2} + \dots$$

通过比较系数, 可以得到

$$g_{20} = 2\bar{N}\tau_{20}[(-a_{11} + \bar{\beta}\omega_{20}^2a_{22})M^{\tau^*} + (-a_{12}i\omega_{20} + \bar{\beta}a_{21}i\omega_{20})M]$$

$$g_{11} = 2\bar{N}\tau_{20}[(-a_{11} - \bar{\beta}\omega_{20}^2a_{22})M^{\tau^*} - (a_{11} + \omega_{20}^2a_{22})M^{\tau^*} - (a_{12}i\omega_{20} + \bar{\beta}a_{21}i\omega_{20})M + (a_{12}i\omega_{20} + \bar{\beta}a_{21}i\omega_{20})M^{-1}]$$

$$g_{02} = 2\bar{N}\tau_{20}[(-a_{11} + \bar{\beta}\omega_{20}^2a_{22})M^{\tau^*} + (a_{12}i\omega_{20} - \bar{\beta}a_{21}i\omega_{20})M^{-1}]$$

$$g_{21} = 2\bar{N}\tau_{20}[-a_{11}(w_{20}^{(1)}(\tau^*) + w_{11}^{(1)}(\tau^*) + M^{\tau^*}w_{20}^{(1)}(0) + M^{\tau^*}w_{11}^{(1)}(0)) - a_{12}(w_{20}^{(2)}(-1) + w_{11}^{(2)}(-1) - i\omega_{20}M^{-1}w_{21}^{(1)}(0) + i\omega_{20}Mw_{11}^{(1)}(0)) + \beta a_{21}(-i\omega_{20}w_{20}^{(1)}(-1) + i\omega_{20}w_{11}^{(1)}(-1) + M^{-1}w_{20}^{(2)}(0) + Mw_{11}^{(2)}(0)) - \beta a_{22}(-i\omega_{20}w_{20}^{(2)}(-1) + i\omega_{20}w_{11}^{(2)}(-1) - i\omega_{20}M^{\tau^*}w_{20}^{(2)}(0) + M^{\tau^*}w_{11}^{(2)}(0))]$$

其中, $M=e^{-i\omega_{20}\tau_{20}}$ 。由等式(12)、式(13)得

$$\begin{aligned} \dot{w}=\dot{u}_r-\dot{z}q-\dot{z}q &= \begin{cases} Aw-2\operatorname{Re}\{g(z,\bar{z})q(\theta)\} & \theta\in[-1,0) \\ Aw-2\operatorname{Re}\{g(z,\bar{z})q(\theta)\}+f_0 & \theta=0 \end{cases} \\ &=Aw+H(z,\bar{z},\theta) \end{aligned} \quad (15)$$

其中, $H(z,\bar{z},\theta)=H_{20}(\theta)\frac{z^2}{2}+H_{11}(\theta)z\bar{z}+H_{02}(\theta)\frac{\bar{z}^2}{2}+\dots$ 。

式(14)两端求导,并与式(15)比较系数得

$$(A-2i\omega_{20}\tau_{20})w_{20}(\theta)=-H_{20}(\theta), Aw_{11}(\theta)=-H_{11}(\theta) \quad (16)$$

当 $\theta\in[-1,0)$ 时, $H(z,\bar{z},\theta)=-g(z,\bar{z})q(\theta)-\bar{g}(z,\bar{z})\bar{q}(\theta)$ 。

将 $g(z,\bar{z}), \bar{g}(z,\bar{z})$ 代入式(16),整理计算得

$$\begin{aligned} w_{20}(\theta) &= \frac{i\bar{g}_{20}}{\omega_{20}\tau_{20}}q(0)M^{-\theta} + \frac{i\bar{g}_{02}}{3\omega_{20}\tau_{20}}\bar{q}(0)M^{\theta} + E_1M^{-2\theta} \\ w_{11}(\theta) &= \frac{i\bar{g}_{11}}{\omega_{20}\tau_{20}}q(0)M^{-\theta} + \frac{i\bar{g}_{11}}{3\omega_{20}\tau_{20}}\bar{q}(0)M^{\theta} + E_2 \end{aligned}$$

其中, E_1 和 E_2 是 $\theta=0$ 当时所确定的边值条件。

整理得

$$\begin{aligned} [2i\omega_{20}\tau_{20}I-\tau_{20}(GM^{2\tau}+HM^2)]E_1 &= f_z \\ \int_{-1}^0 d\eta(\theta)E_2 &= -f_{zz} \end{aligned}$$

解得 $E_1=f_z[2i\omega_{20}\tau_{20}I-\tau_{20}(GM^{2\tau}+HM^2)]^{-1}, E_2=-f_{zz}[\tau_{20}(G+H)]^{-1}$ 。

于是,可以计算下列性质参数: $C_1(0)=\frac{g_{21}}{2}+\frac{i}{2\omega_0}(g_{20}g_{11}-$

$$2|g_{11}|^2-\frac{1}{3}|g_{02}|^2), \mu_2=-\frac{\operatorname{Re}\{C_1(0)\}}{\sigma'(\tau_{20})}, \beta_2=2\operatorname{Re}\{C_1(0)\}。$$

根据文献[15]中的一般定理,可得出如下结论。

定理 2 对于系统(3): (1) 当 $\mu_2>0, \beta_2>0$ 时, $\tau_2=\tau_{20}$ 时的 Hopf 分支是上临界分支,分支周期解不稳定; (2) 当 $\mu_2<0, \beta_2>0$ 时, $\tau_2=\tau_{20}$ 时的 Hopf 分支是下临界分支,分支周期解不稳定; (3) 当 $\mu_2>0, \beta_2<0$ 时, $\tau_2=\tau_{20}$ 时的 Hopf 分支是上临界分支,分支周期解轨道渐近稳定; (4) 当 $\mu_2<0, \beta_2<0$ 时, $\tau_2=\tau_{20}$ 时的 Hopf 分支是下临界分支,分支周期解轨道渐近稳定。

3 结论

本文主要针对一类具有双时滞的食饵-捕食者模型的平衡点的稳定性和分支性质进行分析。

(1) 对系统的线性稳定性进行了详细地分析。由于系统的食饵与捕食者的数量变化率为 0 时,生态系统保持稳定,故讨论平衡点的局部稳定性有实际意义,而且出于实际问题的需要,在系统中引入追捕时滞与两种群的生长时滞,以这两个时滞为参数,通过线性化系统的特征值分析,给出了平衡点的稳定性条件。

(2) 利用 Hopf 分支的存在性理论,讨论了系统存在 Hopf 分支的条件,并采用 Hassard 等给出的中心流形理论和规范型方法和类似于 Wei 与 Ruan 给出的算法研究了系统的 Hopf 分支性质。

本文的后继工作还有很多,例如系统的 Hopf-zero 分支

及其奇异性情况没有得到分析,这将是之后需要深入研究的课题。

参考文献 (References)

- [1] 李怡. 一类捕食模型的非负平衡点的全局渐进稳定性[J]. 徐州师范大学学报, 2008, 26(4): 18-22.
Li Yi. *Journal of Xuzhou Normal University*, 2008, 26(4): 18-22.
- [2] 王鲁欣, 李波. 一类具有交错扩散的捕食模型的定性分析 [J]. 徐州师范大学学报, 2009, 27(1): 33-37.
Wang Luxin, Li Bo. *Journal of Xuzhou Normal University*, 2009, 27(1): 33-37.
- [3] Gakkhar S, Naji R K. Chaos in seasonally perturbed ratio-dependent prey-predator system [J]. *Chaos Solitons & Fractals*, 2003, 15 (1): 107-118.
- [4] 宋永利, 韩茂安, 魏俊杰. 多时滞捕食-食饵系统正平衡点的稳定性及全局 Hopf 分支[J]. 数学年刊, 2004, 25(6): 783-790.
Song Yongli, Han Mao'an, Wei Junjie. *Chinese Annals of Mathematics*, 2004, 25(6): 783-790.
- [5] Song Y, Wei J. Local Hopf bifurcation and global periodic solutions in a delayed predator-prey system [J]. *Journal of Mathematics Analysis and Applications*, 2005, 301:1-21.
- [6] Hale J, Lunel S. Theory of functional differential equations [M]. New York: Springer, 1977.
- [7] Wu J H. Symmetric functional differential equations and neural networks with memory [J]. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1998, 350(12): 4799-4838.
- [8] Zhang J, Jin Z, Yan J, et al. Stability and Hopf bifurcation in a delayed competition system[J]. *Nonlinear Analysis*, 2009, 70(2): 658-670.
- [9] 李小玲, 胡广平. 时滞食饵-捕食系统平衡点的稳定性和周期解[J]. 兰州大学学报:自然科学版, 2009, 45(2): 81-84.
Li Xiaoling, Hu Guangping. *Journal of Lanzhou University: Natural Sciences*, 2009, 45(2): 81-84.
- [10] Wei J J, Yuan Y. Synchronized Hopf bifurcation analysis in a neural network model with delays [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2005, 312(1): 205-229.
- [11] Song Y L, Peng Y H, Wei J J. Bifurcations for a predator-prey system with two delays [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2008, 337(1): 466-479.
- [12] Yu W, Cao J. Stability and Hopf bifurcation analysis on a four-neuron BAM neural network with time delays [J]. *Physics Letters A*, 2006, 351 (1-2): 64-78.
- [13] Ruan S G, Wei J J. On the zeros of transcendental functions with applications to stability of delay differential equations with two delays [J]. *Dynamics of Continuous, Discrete & Impulsive Systems: Series A, Mathematical Analysis*, 2003, 10(6): 863-874.
- [14] Song Y L, Han M A, Peng Y H. Stability and Hopf bifurcation in a competitive Lotka-Volterra system with two delays [J]. *Chaos Solitons Fractals*, 2004, 22(5): 1139-1148.
- [15] Hassard B, Kazarinoff N, Wan Y H. Theory and application of Hopf bifurcation[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1981: 14-35.
- [16] 魏俊杰, 阮士贵. 中立型微分方程零解的稳定性与全局 Hopf 分支[J]. 数学学报, 2002, 45(1): 93-104.
Wei Junjie, Ruan Shigui. *Acta Mathematica Sinica*, 2002, 45(1): 93-104.

(责任编辑 刘志远)