

非线性脉冲中立型抛物方程振动性的新准则

李元旦, 高正晖, 彭白玉

衡阳师范学院数学与计算科学系, 湖南衡阳 421002

摘要 考虑一类具高阶 Laplace 算子的非线性脉冲中立型抛物微分方程的振动性, 利用一阶脉冲中立型微分不等式, 建立了该类方程在 Robin 边值条件下所有解振动的若干新的充分条件。所得结果推广和包含了已有的相应结论。

关键词 脉冲; 非线性中立型; 抛物微分方程; 振动准则; 高阶 Laplace 算子

中图分类号 O175.26

文献标识码 A

doi 10.3981/j.issn.1000-7857.2011.22.009

New Criteria for Oscillation of Nonlinear Impulsive Neutral Parabolic Equations

LI Yuandan, GAO Zhenghui, PENG Baiyu

Department of Mathematics and Computational Science, Hengyang Normal University, Hengyang 421002, Hunan Province, China

Abstract The oscillation of a class of nonlinear impulsive neutral parabolic differential equations with higher order Laplace operators is considered. By using the first order impulsive delay differential inequalities, some new sufficient conditions for oscillation of all solutions of the equations are established under the Robin boundary value condition. The results in this paper have generalized some existing conclusions.

Keywords impulse; nonlinear neutral type; parabolic differential equation; oscillation criteria; higher order Laplace operator

0 引言

现代科技诸领域中许多实际问题的数学模型都可归结为脉冲偏微分方程, 其最突出的特点是能够充分考虑瞬时突变现象对状态的影响, 能够更深刻、更精确地反映事物的变化规律。脉冲偏微分方程已成功地被应用于力学、理论物理、化学及人口动力学、生物工程、最优控制和经济学等方面的数学模拟。振动理论作为其中的一个重要研究领域, 对其研究仅是近 10 年的事情, 并陆续有许多好的研究工作发表^[1-9], 但对具高阶 Laplace 算子的脉冲偏微分方程的振动性研究还不多见^[10]。本文讨论一类具高阶 Laplace 算子的非线性脉冲中立型抛物偏微分方程的振动性, 借助于某类一阶脉冲中立型微分不等式, 得到了该类方程在 Robin 边值条件下所有解振动的若干新的充分判据。所得结果充分反映了时滞和脉冲在振动中的影响作用。

考虑如下的具高阶 Laplace 算子的非线性脉冲中立型抛

物偏微分方程

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(u+c(t)u(t-\tau, x))=a(t)\Delta^{2l}u+\sum_{i=1}^m b_i(t)\Delta^{2l}u(t-\delta_i, x)- \\ p(t, x)u(t-\sigma, x)-\sum_{j=1}^n q_j(t, x)f_j(u(t-\rho_j, x)), \\ (t, x) \in R_+ \times \Omega, t \neq t_k \\ u(t_k^+, x)-u(t_k^-, x)=b_k u(t_k, x), k \in I_\infty=\{1, 2, \dots\} \end{cases} \quad (1)$$

解的振动性, 其中 $u=u(t, x)$, $R_+=[0, +\infty)$, $G \equiv R_+ \times \Omega$, $G_T=[T, +\infty) \times \Omega$, $\Omega \subset R^m$ 是有界区域, $\partial\Omega$ 逐片光滑, Δ 是 R^m 中的 M 维 Laplace 算子, $l \geq 1$ 是整数, $\Delta^r u = \Delta(\Delta^{r-1} u)$, $r \geq 1$, 当 $r=0$ 时, 记 $\Delta^r u = u$, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots$ 是固定点列且 $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ 。

考虑 Robin 边值条件:

$$\frac{\partial \Delta^l u}{\partial N} + \beta(x) \Delta^l u = 0$$

收稿日期: 2011-04-06; 修回日期: 2011-07-25

基金项目: 湖南省教育厅科学研究计划项目 (09C171)

作者简介: 李元旦, 讲师, 研究方向为微分方程定性理论, 电子信箱: liziren1971@163.com

$$(t, x) \in R_+ \times \partial\Omega, t \neq t_k, r=0, 1, 2, \dots, 2l-2 \quad (2)$$

其中 N 表示 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, $\beta(x) \in C(\partial\Omega, (0, \infty))$ 。

对于上述边值问题, 在本文中, 总假设下列条件成立:

(H₁) $\tau, \delta_i, \sigma, \rho_j$ 为正常数, $i \in I_m = \{1, 2, \dots, m\}, j \in I_n = \{1, 2, \dots, n\}$, 且 $b_k > -1, k \in I_\infty$ 。

(H₂) $a(t), b_i(t) \in PC(R_+, R_+), p(t, x), q_j(t, x) \in PC(\bar{G}, R_+), i \in I_m, j \in I_n$, 这里 PC 表示具有如下性质的分片连续函数类: 仅在 $t=t_k, k \in I_\infty$ 为第一类间断点, 但在 $t=t_k, k \in I_\infty$ 为左连续; $P(t) = \min_{x \in \Omega} \{p(t, x)\}, Q_j(t) = \min_{x \in \Omega} \{q_j(t, x)\}, j \in I_n; c(t) \in C(R_+, R)$ 。

(H₃) $f_j(u) \in C(R, R)$, 且当 $u \neq 0$ 时, $uf_j(u) > 0, j \in I_n$ 。

定义 1 函数 $u(t, x)$ 称为边值问题 (1), (2) 的解, 若 $u(t, x)$ 关于 x 任意次连续可微, 关于 t 是以 $t=t_k$ 为第一类间断点的分片连续函数, $u(t_k, x) = u(t_k^-, x), k \in I_\infty$, 并且满足边值问题 (1), (2)。

定义 2 边值问题 (1), (2) 的解 $u(t, x)$ 称为在 G 内振动的, 若对于任意大的 $T > 0$, 存在 $(t_0, x_0) \in G_T$, 使得等式 $u(t_0, x_0) = 0$ 成立。否则称 $u(t, x)$ 在 G 内是非振动的。

引理 1^[11] 设 $\beta(x) \in C(\partial\Omega, (0, \infty)), \lambda_0$ 是如下 Robin 特征值问题

$$\begin{cases} \Delta\phi(x) + \lambda\phi(x) = 0 & x \in \Omega, \lambda \text{ 是常数} \\ \frac{\partial\phi(x)}{\partial N} + \beta(x)\phi(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3)$$

的第一特征值, $\phi(x)$ 是与 λ_0 对应的特征函数, 则 $\lambda_0 > 0, \phi(x) > 0, x \in \Omega$ 。

引理 2^[12] 设 τ, σ 是正常数, $c(t), q(t) \in (R_+, R)$ 是局部可积函数, 且 $y(t_k) = y(t_k^-), k \in I_\infty$ 。若下列条件成立:

$$(a) \quad q(t) \geq 0, \prod_{t-\tau \leq s < t} (1+b_k)^{-1} c(s) \leq -1;$$

$$(b) \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+\tau-\sigma} \prod_{s \leq t_k < s+\tau-\sigma} (1+b_k) \frac{q(s)}{-c(s+\tau-\sigma)} ds > \frac{1}{e}.$$

则脉冲中立型微分不等式

$$\begin{cases} (y(t) + c(t)y(t-\tau))' + q(t)y(t-\sigma) \leq 0 & t \geq 0, t \neq t_k, k \in I_\infty \\ y(t_k^-) - y(t_k) = b_k y(t_k) & k \in I_\infty \end{cases}$$

无最终正解 (参见文献 [12] 中的定理 2.2)。其中, $\inf$ 表示下确界。

1 主要结果及其证明

定理 1 设下列条件成立:

$$\prod_{t-\tau \leq s < t} (1+b_k)^{-1} c(s) \leq -1 \quad (4)$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+\tau-\sigma} \prod_{s \leq t_k < s+\tau-\sigma} (1+b_k) \frac{P(s)}{-c(s+\tau-\sigma)} ds > \frac{1}{e} \quad (5)$$

则边值问题 (1), (2) 的所有解在 G 内振动。

证明 (反证法) 假设边值问题 (1), (2) 有一个非振动解 $u(t, x)$, 不失一般性, 设存在 $T > 0$, 使当 $(t, x) \in G_T$ 时, 有 $u(t, x) > 0$ 。

令 $T_1 = T + \max_{i \in I_m, j \in I_n} \{\tau, \delta_i, \sigma, \rho_j\}$, 则 $u(t-\tau, x) > 0, u(t-\delta_i, x) > 0,$

$u(t-\sigma, x) > 0, u(t-\rho_j, x) > 0, (t, x) \in G_T, i \in I_m, j \in I_n$ 。

当 $t \neq t_k, k \in I_\infty$ 时, 注意到 (H₂), (H₃), 由方程 (1) 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (u + c(t)u(t-\tau, x)) &\leq a(t)\Delta^{2l-1}u + \sum_{i=1}^m b_i(t)\Delta^{2l-1}u(t-\delta_i, x) - \\ &P(t)u(t-\sigma, x) \quad t \geq T_1 \end{aligned} \quad (6)$$

式 (6) 两边乘以问题 (3) 的最小特征值 λ_0 对应的特征函数 $\phi(x)$, 并关于 x 在 Ω 上积分, 有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} u\phi(x) dx + c(t) \int_{\Omega} u(t-\tau, x)\phi(x) dx \right) &\leq \\ a(t) \int_{\Omega} \Delta^{2l-1}u\phi(x) dx + \sum_{i=1}^m b_i(t) \int_{\Omega} \Delta^{2l-1}u(t-\delta_i, x)\phi(x) dx - \\ P(t) \int_{\Omega} u(t-\sigma, x)\phi(x) dx \quad t \geq T_1 \end{aligned} \quad (7)$$

由 Green 公式及边值条件 (2) 有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta^{2l-1}u\phi(x) dx &= \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial \Delta^{2l-2}u}{\partial N} \phi(x) - \Delta^{2l-2}u \frac{\partial \phi(x)}{\partial N} \right] dS + \\ \int_{\Omega} \Delta^{2l-2}u \Delta \phi(x) dx &= \int_{\Omega} \Delta^{2l-2}u \Delta \phi(x) dx = -\lambda_0 \int_{\Omega} \Delta^{2l-2}u \cdot \\ \phi(x) dx &= \dots = -\lambda_0^{2l-1} \int_{\Omega} u\phi(x) dx \quad t \geq T_1 \quad (8) \\ \int_{\Omega} \Delta^{2l-1}u(t-\delta_i, x)\phi(x) dx &= -\lambda_0^{2l-1} \int_{\Omega} u(t-\delta_i, x)\phi(x) dx \\ t \geq T_1, j \in I_n \end{aligned} \quad (9)$$

其中 dS 是 $\partial\Omega$ 上的面积元素。

令 $y(t) = \int_{\Omega} u(t, x)\phi(x) dx, t \geq T_1$, 易知 $y(t) > 0, t \geq T_1$ 。则结合式 (6) — 式 (9), 可得

$$\begin{aligned} (y(t) + c(t)y(t-\tau))' + \lambda_0^{2l-1} a(t)y(t) + \lambda_0^{2l-1} \sum_{i=1}^m b_i(t)y(t-\delta_i) + \\ P(t)y(t-\sigma) \leq 0 \quad t \geq T_1 \end{aligned} \quad (10)$$

进而有

$$(y(t) + c(t)y(t-\tau))' + P(t)y(t-\sigma) \leq 0 \quad t \geq T_1 \quad (11)$$

当 $t=t_k, k \in I_\infty$ 时, 由方程 (1) 中的脉冲条件可知

$$\int_{\Omega} u(t_k^+, x) dx - \int_{\Omega} u(t_k^-, x) dx = b_k \int_{\Omega} u(t_k^-, x) dx$$

于是

$$y(t_k^+) - y(t_k^-) = b_k y(t_k^-) \quad (12)$$

因此可得 $y(t) > 0$ 是微分不等式 (11), (12) 的最终正解。另一方面, 由定理的条件 (4), (5) 及引理 2 知式 (11), 式 (12) 无最终正解, 这是一个矛盾, 所以边值问题 (1), (2) 的所有解在 G 内振动。

定理 1 证毕。

由微分不等式 (10) 有

$$(y(t) + c(t)y(t-\tau))' + \lambda_0^{2l-1} \sum_{i=1}^m b_i(t)y(t-\delta_i) \leq 0 \quad t \geq T_1, t \neq t_k$$

类似地, 可以得到如下结果。

定理 2 设条件 (4) 成立, 且存在某个 $i_0 \in I_m$, 使得

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+\tau-\delta_{i_0}} \prod_{s \leq t_i < s+\tau-\delta_{i_0}} (1+b_k) \frac{\lambda_0^{2l-1} b_{i_0}(s)}{-c(s+\tau-\delta_{i_0})} ds > \frac{1}{e}$$

成立,则边值问题(1),(2)的所有解在 G 内振动,其中 λ_0 由问题(3)确定。

定理 3 设条件(4)成立,且存在某个 $j_0 \in I_n$ 及常数 $C_{j_0} > 0$,使得

$$|f_{j_0}(u)| \geq C_{j_0} |u| \quad u \neq 0 \quad (13)$$

及

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+\tau-p_{j_0}} \prod_{s \leq t_i < s+\tau-p_{j_0}} (1+b_k) \frac{C_{j_0} Q_{j_0}(s)}{-c(s+\tau-p_{j_0})} ds > \frac{1}{e}$$

成立,则边值问题(1),(2)的所有解在 G 内振动。

证明 (反证法) 假设边值问题(1),(2)有一个非振动解 $u(t,x)$,不失一般性,类似于定理 1 的证明,设存在 $T_1 > 0$,使当 $(t,x) \in G_{T_1}$ 时,有 $u(t,x) > 0, u(t-\tau,x) > 0, u(t-\delta_i,x) > 0, u(t-\sigma,x) > 0, u(t-p_j,x) > 0, (t,x) \in G_{T_1}, i \in I_m, j \in I_n$ 。

当 $t \neq t_k, k \in I_\infty$ 时,注意到 $(H_2), (H_3)$,由方程(1)可得

$$\frac{\partial}{\partial t} (u(t,x) + c(t)u(t-\tau,x)) \leq a(t)\Delta^{2l-1}u - Q_{j_0}(t)f_{j_0}(u(t-p_{j_0},x)) \quad t \geq T_1 \quad (14)$$

注意到条件(13),由式(14)可得

$$\frac{\partial}{\partial t} (u(t,x) + c(t)u(t-\tau,x)) \leq a(t)\Delta^{2l-1}u - C_{j_0}Q_{j_0}(t)u(t-p_{j_0},x) \quad t \geq T_1 \quad (15)$$

式(15)两边乘以问题(2)的最小特征值 λ_0 对应的特征函数 $\phi(x)$,并关于 x 在 Ω 上积分,有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} u(t,x)\phi(x)dx + c(t) \int_{\Omega} u(t-\tau,x)\phi(x)dx \right) &\leq \\ a(t) \int_{\Omega} \Delta^{2l-1}u\phi(x)dx - C_{j_0}Q_{j_0}(t) \int_{\Omega} u(t-p_{j_0},x) \cdot \\ \phi(x)dx \quad t \geq T_1 \end{aligned} \quad (16)$$

令 $y(t) = \int_{\Omega} u(t,x)\phi(x)dx, t \geq T_1$,则 $y(t) > 0, t \geq T_1$ 。于是由式(8),式(16)可得

$$(y(t) + c(t)y(t-\tau))' + \lambda_0^{2l-1}a(t)y(t) + C_{j_0}Q_{j_0}(t)y(t-p_{j_0}) \leq 0 \quad t \geq T_1$$

进而有

$$(y(t) + c(t)y(t-\tau))' + C_{j_0}Q_{j_0}(t)y(t-p_{j_0}) \leq 0 \quad t \geq T_1$$

余下部分完全类似定理 1 后半部分的证明,同样可以得到矛盾的结果,详证在此略去。

定理 3 证毕。

注 1 若用下面条件

$$(a') \quad q(t) \geq 0, -1 \leq \prod_{t-\tau \leq t_i < t} (1+b_k)^{-1}c(t) \leq 0;$$

$$(b') \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{t-\sigma}^t \prod_{s-\sigma \leq t_i < s} (1+b_k)^{-1}q(s)ds > \frac{1}{e}$$

代替引理 2 中的条件(a),(b)(参见文献[12]中的定理 2.3),则还可以得到分别平行于本文定理 1—定理 3 的关于边值问题(1),(2)解振动的新结果。

注 2 利用本文的思想,还可以考虑其他边值条件。譬如,考虑如下的 Dirichlet 边值条件

$$\Delta^l u = 0 \quad (t,x) \in R_+ \times \partial\Omega, t \neq t_k, r=0,1,2,\dots,2l-2 \quad (17)$$

不难得到边值问题(1),(17)的若干振动判据。限于篇幅,在此省略之。

2 结论

本文针对一类具高阶 Laplace 算子的非线性脉冲中立型抛物微分方程,采用一阶脉冲中立型微分不等式,给出了该类方程在 Robin 边值条件下所有解振动的若干新的判据,当式(1)中 $l=1$ 时,本文的结果即是文献[4],[5]的全部结果,因此,本文的结果推广和包含了文献[4],[5]中相应的结果,但更具一般性和广泛性。

参考文献 (References)

- [1] 傅希林, 闫宝强, 刘衍胜. 非线性脉冲微分系统[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
Fu Xilin, Yan Baoqiang, Liu Yansheng. Nonlinear impulsive differential systems[M]. Beijing: Science Press, 2008.
- [2] 罗李平, 俞元洪. 脉冲向量中立型抛物偏微分方程的 H-振动性[J]. 数学学报, 2010, 53(2): 257-262.
Luo Liping, Yu Yuanhong. Acta Mathematica Sinica, 2010, 53 (2): 257-262.
- [3] 罗李平, 杨柳, 曾云辉. 脉冲向量中立型抛物方程解的 H-振动性[J]. 高校应用数学学报 A 辑, 2010, 25(4): 463-468.
Luo Liping, Yang Liu, Zeng Yunhui. Applied Mathematics A Journal of Chinese Universities, 2010, 25(4): 463-468.
- [4] 罗李平, 彭白玉. 非线性脉冲中立型时滞抛物方程解的振动性质[J]. 数学的实践与认识, 2009, 39(13): 174-179.
Luo Liping, Peng Baiyu. Mathematics in Practice and Theory, 2009, 39 (13): 174-179.
- [5] 罗李平, 欧阳自根. 非线性脉冲中立型时滞抛物偏微分方程的振动性[J]. 吉林大学学报: 理学版, 2007, 45(1): 23-28.
Luo Liping, Ouyang Zigen. Journal of Jilin University: Science Edition, 2007, 45(1): 23-28.
- [6] Luo L P, Peng B Y, Ouyang Z G. Oscillation of nonlinear impulsive delay hyperbolic partial differential equations [J]. Chin Quart J of Math, 2009, 24(3): 439-444.
- [7] Luo L P, Liao J D, Gao Z H. Oscillation of systems of impulsive delay hyperbolic equations [J]. International Journal of Applied Mathematics and Applications, 2008, 1(2): 147-154.
- [8] 罗李平, 俞元洪. 脉冲向量时滞双曲型方程的 H-振动性[J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2008, 47(6): 1-4.
Luo Liping, Yu Yuanhong. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2008, 47(6): 1-4.
- [9] Luo L P. Oscillation theorem of systems of quasilinear impulsive delay hyperbolic equations[J]. Northeast Math J, 2007, 23(3): 255-262.
- [10] 罗李平, 杨柳. 具高阶 Laplace 算子的非线性脉冲时滞双曲型方程的振动判据[J]. 系统科学与数学, 2009, 29(12): 1672-1678.
Luo Liping, Yang Liu. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2009, 29(12): 1672-1678.
- [11] Gilbarg D, Trudinger N S. Elliptic partial equations of second order[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1977.
- [12] 燕居让. 脉冲中立型时滞微分方程的振动性[J]. 数学年刊 A 辑, 2000, 21A(6): 755-762.
Yan Jurang. Chinese Annals of Mathematics: series A, 2000, 21A(6): 755-762.

(责任编辑 代丽)