

Hamilton 半群的自同态半群

张化生

聊城大学数学科学学院, 山东聊城 252059

摘要 Hamilton 半群是一种重要的代数结构。针对 Hamilton 半群的特点, 利用其半群性质和图论结果对其自同态的结构进行了研究。首先定义了其自同态的一种乘法运算, 并证明了 Hamilton 半群的自同态也构成一个 Hamilton 半群。其次, 在引入半序关系之后, 给出了 Hamilton 半群的自同态半群的一个图论表示, 即关于半序关系的覆盖图是有向森林。

关键词 Hamilton 半群; 自同态; Hasse 图; 有向森林

中图分类号 O152.7

文献标识码 A

doi 10.3981/j.issn.1000-7857.2011.18.009

The Endomorphism Simegroup of Hamilton Semigroup

ZHANG Huasheng

School of Mathematics Science, Liaocheng University, Liaocheng 252059, Shandong Province, China

Abstract As a well-known semigroup, Hamilton semigroup acts on continuous functions in an algebra system. According to the characteristics of Hamilton semigroup, some basic properties of the semigroup and graph theoretical representation are used to investigate the structure of endomorphism to Hamilton semigroup. First of all, a new multiplication, which can solve the problem with computing endomorphism for Hamilton semigroup, is defined and then the main result that the endomorphism of Hamilton semigroup is also a Hamilton semigroup is given. Moreover, by adopting the partial order to the endomorphism of Hamilton semigroup, an expression of graph theory is established and that the Hasse graph for endomorphism semigroup is an oriented forest is proved.

Keywords Hamilton semigroup; endomorphism; Hasse graph; oriented forest

0 引言

每个子群都是正规子群的群称为 Hamilton 群, 每个子圈都是理想的圈称为 Hamilton 圈^[1]。研究者对这些代数结构都已有了初步的研究。对于每个子环都是理想的环, 即 Hamilton 环, 它的一些特殊情况也已被刻画出来了, 例如刻画所有由一个生成元生成的 Hamilton 环和每一个子群都是理想的环^[2-3]。

1964 年, 刘绍学^[4]给出了“每一子代数都是理想的代数”, 即 H-代数, 刻画了一种特殊算子域的 H-环。1993 年, 李师正^[5]研究了“Hamilton 半群的结构”, 不仅给出了 H-半群的刻画, 而且给出了 H-半群的图论表示及 H-半群的同构。

定义 1 每个子半群都是左(右)理想的半群称为左(右) Hamilton 半群(以下简称左(右)H-半群), 既是左 H-半群又是右 H-半群的半群称为双侧 Hamilton 半群, 简称 H-半群。

引理 1^[5] 左 H-半群是且仅是以下半群之一:

- (1) 指数为 3 周期为 1 的循环半群, 即形如 $\langle a \rangle = \{a, a^2, a^3\}$, 适合 $a^3 = a^4 = \cdots = e(a)$ 的半群, 其中 $e(a)$ 表示 $\langle a \rangle$ 中的幂等元;
- (2) 指数为 2 周期为 1 的循环半群, 即形如 $\langle b \rangle = \{b, b^2\}$, 适合 $b^3 = b^4 = \cdots = e(b)$ 的半群, 其中 $e(b)$ 表示 $\langle b \rangle$ 中的幂等元;
- (3) 单元素半群 $\langle e \rangle = \{e\}$;
- (4) 若干互不包含(可以相交)的(1)、(2)、(3)型半群的并半群:

$$S = \bigcup_{i \in I} \langle a_i \rangle \bigcup_{\alpha \in A} \langle b_\alpha \rangle \bigcup_{p \in P} \langle e_p \rangle$$

其中, 指标集 $I \sqcup A \sqcup P$ 互不相交且不全为空, 上述表示式是唯一的同时有以下乘法表:

$$\forall i, j \in I, \alpha, \beta \in A, p, q \in P$$

$$a_i a_j = a_j^{M(i,j)}, \text{ 其中 } M: I \times I \rightarrow \{2, 3\}; b_\alpha b_\beta = a_i^{N(\alpha, \beta)}, N: A \times A \rightarrow \{2, 3\}$$

$$e_p e_q = a_i^3 = e(a); a_i b_\alpha = b_\alpha b_\beta = e_p b_\alpha = e(b_\alpha); a_i e_p = b_\alpha e_p = e_q e_p$$

引理 2^[5] H-半群是且仅是以下半群之一:

收稿日期: 2010-12-06; 修回日期: 2011-05-09

基金项目: 国家青年科学基金项目(11001115)

作者简介: 张化生, 讲师, 研究方向为半群、矩阵方程、矩阵广义逆, 电子邮箱: zhanghuasheng@lcu.edu.cn

(i) 引理 1 中的 (1)、(2)、(3) 型半群;

(ii) 若干互不包含 (可以相交) 的 (1)、(2) 型半群的下述并半群:

$$S = \bigcup_{i \in I} \langle a_i \rangle \bigcup_{\alpha \in A} \langle b_\alpha \rangle$$

其中, 指标集 $I \cap A = \Phi$. S 有唯一的幂等元 $e = e(a_i) = e(b_\alpha)$, $i \in I$, $\alpha \in A$, S 的表达式唯一, 同时有以下乘法表:

$$\begin{aligned} \forall i, j \in I, \alpha, \beta \in A \\ aa_j = a_j^{M(i,j)} = a_i^{M(i,j)}, \text{ 其中 } \bar{M}: I \times I \rightarrow \{2, 3\}, \bar{M}(i, j) = 2 \\ b_\alpha a_i = a_i b_\alpha = b_\alpha b_\beta = e \end{aligned}$$

1 自同态 Hamilton 半群及图论表示

Hamilton 半群的自同态也构成一个 Hamilton 半群, 证明如下。

定理 1 任意在左 (右) H-半群 S 的自同态集合 $EndS$, 关于乘法

$$fg(x) = f(x)g(x) \quad f, g \in EndS, x \in S$$

是一个左 (右) H-半群。

证明 设 S 为左 H-半群, 对任意的 $x, y \in S, f, g, h \in EndS$, 定义乘法

$$\begin{aligned} (fg)(xy) &= f(xy)g(xy) = f(x)g(x)g(y) = e(g(y)) \\ (fg)(x)(fg)(y) &= f(x)g(x)f(y)g(y) = e(g(y)) \end{aligned}$$

即

$$(fg)(xy) = (fg)(x)(fg)(y)$$

从而, $fg \in EndS$, 即关于乘法封闭性成立。

又由于

$$[(fg)h](x) = [f(x)g(x)]h(x) = [f(gh)](x)$$

即关于乘法结合律成立。

所以, $EndS$ 关于上面定义的乘法形成一个半群。

下面证明 $EndS$ 是左 H-半群。首先证明 $EndS$ 具有左 H-半群的表示形式。

(1) 对于任意 $f_i \in EndS$, 如果存在 $a_i, a_j \in S$, 有 $f_i(a_i) = a_j$, 则

$$f_i^2(a_i) = a_j^2, f_i^3(a_i) = a_j^3 = e(a_j), f_i^n(a_i) = e(f_i(a_i)) \quad n \geq 3$$

对于 S 中的其他元素显然有

$$f_i^n(x) = e(f_i(x)) \quad n \geq 3, x \in S$$

从而这类自同态构成了指数为 3 周期为 1 的循环半群, 即形如

$$\langle f_i \rangle = \{f_i, f_i^2, f_i^3\}$$

且 $f_i^3 = f_i^4 = \dots = e(f_i)$ 的半群, 其中 $e(f_i)$ 表示 $\langle f_i \rangle$ 中的幂等元。

同理可得如下结论。

(2) 对于 $g_\alpha \in EndS$, 这类自同态构成了指数为 2 周期为 1 的循环半群, 即形如

$$\langle g_\alpha \rangle = \{g_\alpha, g_\alpha^2\}$$

且 $g_\alpha^2 = g_\alpha^3 = \dots = e(g_\alpha)$ 的半群, 其中 $e(g_\alpha)$ 表示 $\langle g_\alpha \rangle$ 中的幂等元。

(3) 对于 $h_{p'} \in EndS$, 构成形如 $\langle h_{p'} \rangle = \{e(h_{p'}), h_{p'}\}$ 的一个

单元素半群。

(4) $EndS$ 是由 (1)、(2)、(3) 型半群组成的并半群:

$$EndS = \bigcup_{i' \in I'} \langle f_{i'} \rangle \bigcup_{\alpha' \in A'} \langle g_{\alpha'} \rangle \bigcup_{p' \in P'} \langle h_{p'} \rangle$$

其中, I', A', P' 互不相交且不全为空, 上述表示式唯一。

其次, 证明自同态集合的元素关于乘法满足左 H-半群乘法表:

$$\forall f_i, f_j \in EndS, a_i \in S, \exists a_j, a_k \in S, \text{ 即 } f_i(a_i) = a_j, f_j(a_i) = a_k$$

则

$$f_i f_j(a_i) = f_i(a_j) f_j(a_i) = a_j a_k = a_k^M = f_j^M(a_i), \text{ 其中 } M=2, 3, \text{ 即 } f_i f_j = f_j^M$$

同理可证明

$$\forall g_\alpha, f_{i'} \in EndS, f_{i'} g_\alpha = g_\alpha^{N_{i'}} = f_{i'}^N = e(f_{i'})$$

$$f_{i'} g_\alpha = g_\beta g_\alpha = h_{p'} g_\alpha = e(g_\alpha) = g_\alpha^2, f_{i'} h_{p'} = g_\alpha h_{p'} = h_{p'} h_{p'} = h_{p'}$$

所以, $EndS$ 满足左 H-半群乘法表。因此, $EndS$ 关于乘法 $fg(x) = f(x)g(x)$ 构成左 H-半群。

同理可证明, 右 H-半群 S 的自同态集合 $EndS$ 关于乘法 $fg(x) = f(x)g(x)$ 是一个右 H-半群。

推论 1 H-半群 S 的自同态集合 $EndS$, 关于乘法

$$fg(x) = f(x)g(x) \quad f, g \in EndS, x \in S$$

是一个 H-半群。

还可以给出 Hamilton 半群的自同态半群的一个图论表示, 即关于半序关系的覆盖图是有向森林。

定理 2 在左 H-半群 $EndS$ 中, 关于 S 的 Hasse 图 (即覆盖图记为 $E(EndS)$) 是 (可以无限的) 有向森林, 每个 (可以无限的) 有向树层数 2, 代表一个单一幂等元的极大子半群 $EndS_{e(h_p)} \in E(EndS)$ 叶为基元, 根为幂等元, 反之, 任给层数 2 的有向森林都是某个左 H-半群的 Hasse 图。

证明 $E(EndS)$ 中的每条弧 $(x \rightarrow y)$ 只有以下 3 种类型: $(f_i^2 \rightarrow f_i), (f_i^3 \rightarrow f_i^2), (g_\alpha^2 \rightarrow g_\alpha), i' \in I', \alpha \in A'$. 弧两端的点显然属于同一 $EndS_{e(h_p)}$, 因而不同的 $EndS_{e(h_p)}$ 之间既无公共顶点也不连通, 且所有极大通道形如 $(f_i^2 \rightarrow f_i), (f_i^3 \rightarrow f_i^2), (g_\alpha^2 \rightarrow g_\alpha), i' \in I', \alpha \in A'$. 在每个 $EndS_{e(h_p)}$ 中, 从幂等元 $e(h_{p'})$ 可达到每个顶点, 即 $e(h_{p'})$ 为根。从而根 $e(h_{p'})$ 到 $EndS_{e(h_p)}$ 中的每个顶点的通道唯一。因此, 每个 $EndS_{e(h_p)}$ 可表示为一个有向树, 最长通道长 (即树层数) ≤ 2 , 基元是极小元, 也就是叶。

反之, 设 G 为任意层数 ≤ 2 的非平凡有向森林, 顶点集为 $EndS$ 取 G 的层数为 2, 1, 0 的叶集分别为 $\{f_i | i' \in I'\}, \{g_\alpha | \alpha' \in A'\}, \{h_{p'} | p' \in P'\}$, 叶 f_i 到根的通道的 3 个点记为 f_i, f_i^2, f_i^3 . 叶 g_α 到根的通道的 2 个点记为 g_α, g_α^2 . 若 $f_i, f_j (i' = j')$ 到根的通道有 2 个公共点, 则规定 $f_i^2 = f_j^2, f_i^3 = f_j^3$. 若规定 $f_i^3 = f_j^3$, 如 f_i, g_α 到根的通道有 1 个公共点, 则规定 $f_i^3 = g_\alpha^2, f_i^2 = g_\alpha^2$. 另外规定 $\forall i' \in I', \alpha' \in A', p' \in P', f_i^3 = f_i^4 = \dots, g_\alpha^2 = g_\alpha^3 = \dots, h_{p'} = h_{p'}^2 = \dots$. $EndS$ 中可规定乘法为: 任取 $x, y, x^k \cdot x^l = x^{k+l}, x^k \cdot y^l = y^l$. 当 $x \neq y$ 时, 乘法是良定义的, 即若 $x_1 = x^k, y_1 = y^l$, 则 $x_1 y_1 = x^k y^l$; 同时, 乘法满足结合律, 且与每个叶的方幂运算一致, 即 $E(EndS, \cdot)$ 为左 H-半群。易见

$E(\text{End}S, \cdot)$ 的 Hasse 图即已给的有向森林。

2 结论

利用 Hamilton 半群的特点,构造了一种自同态并且证明了 Hamilton 半群的自同态也构成一个 Hamilton 半群。另外借助图论表示给出了 Hamilton 半群的自同态半群关于半序关系的覆盖图是有向森林。这些结果有助于进一步深入了解 Hamilton 半群和自同态性质结构与研究方法。利用本文结论还可以继续研究 Hamilton 半群的有向森林与其自同态半群的有向森林之间的关系。

参考文献 (References)

- [1] Norton D A. Hamiltonian loops[J]. *Proc Amer Math Soc*, 1952, 3(1): 56-65.
- [2] Howie J M. Fundamentals of semigroup theory [M]. Oxford: Oxford University Press, 1995.
- [3] Mitsch H, Petrich M. Basic properties of e-inversive semigroups[J]. *Communications in Algebra*, 2000, 28(11): 5169-5182.
- [4] 刘绍学. 每一子代数都是理想的代数[J]. 数学学报, 1964, 14(4): 532-537.
Liu Shaoxue. *Acta Mathematica Sinica*, 1964, 14(4): 532-537.
- [5] 李师正. Hamilton 半群的结构 [J]. 纯粹数学与应用数学, 1993, 9(1): 105-111.
Li Shizheng. *Pure and Applied Mathematics*, 1993, 9(1): 105-111.

(责任编辑 代丽)

·学术动态·



“中国营养学会第 13 届 全国临床营养学术会议”征文

“中国营养学会第 13 届全国临床营养学术会议”将于 2011 年 9 月 17—19 日在杭州召开。

征文范围: 医院营养科性质和职责定位及临床营养工作管理模式探讨和经验; 临床营养治疗规范化管理; 临床营养学的基础研究; 各类疾病的肠内及肠外营养支持研究和实践; 饮食营养以及生活方式与慢性病控制; 新型肠内营养制剂的开发及临床应用; 食物新资源的开发和临床应用; 临床营养门诊、宣教工作经验和体会以及其他与临床营养相关的科研和工作总结、调查和建议。

征文截止日期: 2011 年 9 月 1 日。

通信地址: 北京市海淀区复兴路 28 号解放军总医院营养科(100853), 张新胜。

电子信箱: cnxcy@163.com。

会议网址: http://cnsoc.org/cn/news_info.asp?nid=1110。



《科技导报》“卷首语”栏目征稿

“卷首语”栏目每期邀请一位中国科学院院士和中国工程院院士就重大科技现象、事件,以及学科发展趋势、科学研究热点和前沿问题等,撰文发表个人的见解、意见和评论。本栏目欢迎院士投稿,每篇文章约 2000 字,同时请提供作者学术简历、工作照和签名电子文档。投稿信箱: kjdbjb@cast.org.cn。