

关于级数绝对收敛的 Orlicz-Pettis 型定理

顾娟, 张向华

黑龙江科技学院理学院, 哈尔滨 150027

摘要 为深入探讨级数的绝对收敛问题, 引入一个具有普遍意义的抽象对偶系统 (E, F) , 其中 $F \subseteq G^E$, G 为局部凸空间。在 (E, F) 上给出级数绝对收敛的定义, 讨论子级数收敛与绝对收敛的关系, 得到了一个关于级数绝对收敛的 Orlicz-Pettis 型定理。

关键词 Orlicz-Pettis 拓扑; 绝对收敛; 序列完备

中图分类号 O177.3

文献标识码 A

doi 10.3981/j.issn.1000-7857.2011.17.009

Orlicz-Pettis Theorem in Absolutely Convergent Series

GU Juan, ZHANG Xianghua

College of Science, Heilongjiang Institute of Science and Technology, Harbin 150027, China

Abstract Series convergent is a research fields which has the great significance in functional analysis. In order to study the problem of absolutely convergent series, an abstract duality pair (E, F) which has the universal meaning on the basis of literature [4] was introduced, in the pair, $F \subseteq G^E$, where G is locally convex space. And then the definition of absolutely convergent series on it was given, the relationship between subseries convergent and absolute convergent was discussed, also a Orlicz-Pettis theorem of absolutely convergent series was obtained, that is, the topology of uniform convergence in every $M \in B_{op}(E, F)$ has the same absolutely convergent series. Such a conclusion expands the serviceable range of absolute convergence Orlicz-Pettis Theorem, which is very important to the study of absolute convergence theory, and is an effective way to depict the space to a certain extent.

Keywords Orlicz-Pettis topology; absolute convergence; sequentially complete

0 引言

级数的收敛问题是泛函分析中具有极强趣味性及广泛应用意义的一个研究方向。自 1929 年 Orlicz 给出第一个关于子级数收敛的 Orlicz-Pettis 定理后, 几十年来, 关于子级数收敛问题的研究日趋完善。近些年, 许多学者^[1-3]将探索的目光放到了级数绝对收敛的 Orlicz-Pettis 型定理上, 所得结论仅限于线性对偶空间中。文献[4]在一个抽象对偶系统 (E, F) 上, 得到关于级数绝对收敛的 Orlicz-Pettis 型定理, 虽然突破了对偶空间的线性限制, 但由于 G 为赋范空间, 其应用仍具有一定的局限性。

本文在文献[4]的基础上, 将 G 改为局部凸空间, 建立一个具有更广泛意义的抽象对偶系统 (E, F) , 然后在 (E, F) 上研究级数绝对收敛的 Orlicz-Pettis 型定理, 这对于空间理论和

绝对收敛、求和等领域的发展和完善具有重要意义。

1 预备知识

设 G 为局部凸空间, E 为任意非空集合, $F \subseteq G^E$, 则称 (E, F) 为向量值函数系统, 逐点收敛拓扑 $\sigma(E, F)$ 及 $\sigma(F, E)$ 的意义分别同线性对偶系统中的弱拓扑及弱*拓扑一致。

定义 1^[5] 称 E 上的拓扑 τ 是一个 (E, F) -拓扑, 若存在 $\Phi \subset 2^F$, 使 $\cup \Phi = F$, 且恰好是在每一个 $M \in \Phi$ 上一致收敛的拓扑, 即在 (E, τ) 中 $u_\alpha \rightarrow u$ 当且仅当对任意的 $M \in \Phi, f(u_\alpha) \rightarrow f(u)$ 关于 $f \in M$ 一致地成立。

定义 2 X 是拓扑线性空间, 称 $A \subseteq X$ 是平衡的, 若 $tA \subseteq A, \forall |t| \leq 1$ 。

定义 3^[6] 称序列空间 $l^p(p \geq 1)$ 的子集 K 是本性紧的, 若

收稿日期: 2011-01-10; 修回日期: 2011-05-20

基金项目: 黑龙江省教育厅科学技术研究项目(11541325)

作者简介: 顾娟, 讲师, 研究方向为泛函分析, 电子信箱: gujuan-1977@163.com

有 $j_0 \in N$, 使 $\{(t_{j_0+1}, t_{j_0+2}, \dots) \mid (t_j) \in K\}$ 在 $(l^p, \|\cdot\|_p)$ 中相对紧。

引理 1^[7] 设 X 是序列完备的局部凸空间, τ 是 E 上的一个 (E, F) -拓扑, 若 $\sum_{j=1}^{\infty} u_j$ 在 (E, τ) 中子级数收敛, 则 $\sum_{j=1}^{\infty} |x'(f(u_j))| < +\infty, \forall f \in F, x' \in X'$ 。

引理 2^[8] 设 $1 \leq p < +\infty, K \subset l^p$ 在 $(l^p, \|\cdot\|_p)$ 中本性紧的当且仅当 $\lim_n \sum_{j=n}^{\infty} |t_j|^p = 0$ 关于 $(t_j) \in K$ 一致地成立。

本文中的 $N(X)$ 表示 X 的 0 点邻域的全体。

2 主要结果

定义 4 设 $\Phi \subset 2^F$, 且 $\cup \Phi = F$, 对每一个 $M \in \Phi$ 上一致收敛的拓扑 τ 及 $\{u_j\} \subset E$, 称 $\sum_{j=1}^{\infty} u_j$ 是 τ -绝对收敛的, 设 A 是 X 中的平衡开子集, 若对任意连续的 Minkowski 范 $[\cdot]_A: X \rightarrow [0, +\infty)$, $\sum_{j=1}^{\infty} [f(u_j)]_A < +\infty$ 关于 $f \in M$ 。

定理 1 设 X 是局部凸空间, $E \neq \Phi, F \subset X^E$, 在 $(E, \sigma(E, F))$ 中, 以下的 3 个条件等价:

(1) 级数 $\sum_{j=1}^{\infty} u_j$ 绝对收敛;

(2) 对任意 X 上的连续半范 $\|\cdot\|$, $\sum_{j=1}^{\infty} \|f(u_j)\| < +\infty, \forall f \in F$;

(3) 对任意的平衡开子集 $A \subset X$, $\sum_{j=1}^{\infty} [f(u_j)]_A < +\infty, \forall f \in F$ 。

证明 (3) $\Rightarrow$ (1) 显然成立。

(2) $\Rightarrow$ (3), 设 $A \subset X$ 是平衡的开子集, 由于 X 是局部凸空间, 存在一个平衡、开且凸的 $U \in N(X)$, 使得 $U \subset A$, 所以 $[\cdot]_U$ 是 X 上的连续半范, 且 $[\cdot]_A \leq [\cdot]_U, \forall x \in X$ 。因此, 对任意 X 上的连续半范 $\|\cdot\|$, 都有 $\sum_{j=1}^{\infty} \|f(u_j)\| < +\infty, \forall f \in F$, 则 $\sum_{j=1}^{\infty} [f(u_j)]_U < +\infty$,

$\forall f \in F$, 因此对任意的平衡开子集 $A \subset X$, $\sum_{j=1}^{\infty} [f(u_j)]_A < +\infty, \forall f \in F$ 。

(1) $\Rightarrow$ (2), 设 $\|\cdot\|$ 是 X 上的连续半范, 令 $A = \{f(u) \in X: \|f(u)\| \leq 1, u \in E\}$, 其中 $\forall f \in F$, 则 A 是平衡、开、且凸的, 所以 $[\cdot]_A: X \rightarrow [0, +\infty)$ 是连续的, 并当 $f(u) \in tA, t > 0$ 时, $\|f(u)\| = t \|\frac{1}{t}f(u)\| < t$ 。因此, $\|f(u)\| \leq [f(u)]_A$ 。这说明, 若 $\sum_{j=1}^{\infty} u_j$ 绝对收敛, 则对任意 X 上的连续半范 $\|\cdot\|$, $\sum_{j=1}^{\infty} \|f(u_j)\| < +\infty, \forall f \in F$ 。

定理 2 设 X 是序列完备的局部凸空间, $E \neq \Phi, F \subset X^E$, 若 E 中级数 $\sum_{j=1}^{\infty} u_j$ 是 $\sigma(E, F)$ -绝对收敛, 则 $\sum_{j=1}^{\infty} u_j$ 在 $(E, \sigma(E, F))$ 中子级数收敛。

F) 中子级数收敛。

证明 设 $\|\cdot\|$ 是 X 上的连续半范, 由于 $\sum_{j=1}^{\infty} u_j$ 在 $(E, \sigma(E, F))$ 中绝对收敛, 故有 $\sum_{j=1}^{\infty} \|f(u_j)\| < +\infty, \forall f \in F$, 从而对任意正整数上升序列 $\{j_k\}$, 有 $\forall f \in F, \lim_{n, m \rightarrow +\infty} \|\sum_{k=m}^n f(u_{j_k})\| \leq \lim_{n, m \rightarrow +\infty} \sum_{k=m}^n \|f(u_{j_k})\| = 0$ 。由于 X 上的局部凸拓扑由连续半范生成, $\forall f \in F, (\sum_{k=1}^n f(u_{j_k}))_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中的柯西列, 且 X 序列完备, 故对 $\forall f \in F, \sum_{k=1}^{\infty} f(u_{j_k})$ 在 X 中收敛, 由子级数收敛的定义, 即知 $\sum_{j=1}^{\infty} u_j$ 在 $(E, \sigma(E, F))$ 中子级数收敛。

定理 3 设 X 是序列完备的局部凸空间, $E \neq \Phi, F \subset X^E$, τ 是 E 上的 (E, F) -拓扑, 若 $\sum_{j=1}^{\infty} u_j$ 在 (E, τ) 中绝对收敛, 则 $\sum_{j=1}^{\infty} |x'(f(u_j))| < +\infty, \forall f \in F, x' \in X'$ 。

定理 4 设 X 是序列完备的局部凸空间, $E \neq \Phi, F \subset X^E$, A 是 $\sigma(E, F)$ -绝对收敛的 E 中序列全体, 对 F 的子集 M , 下面的 (i) 和 (ii) 等价:

(i) $M \in B_{op}(E, F)$

其中, $B_{op}(E, F) = \cap_{\{u_j\} \in A} \{W \subset F: \text{对任意 } (u_j) \in A \text{ 及 } X \text{ 上连续半范 } \|\cdot\|, \{(x'(f(u_j)))_{j=1}^{\infty}: f \in W, x' \in X', \sup_{\|x\| \leq 1} |x'(x)| \leq 1\} \text{ 在 } l^1 \text{ 中本性紧}\}$

(ii) 对每个 $\{u_j\} \in A, \sum_{j=1}^{\infty} f(u_j)$ 关于 $f \in M$ 一致收敛。

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii), $M \in B_{op}(E, F)$, 设 $\{u_j\} \in A, \varepsilon > 0$, 且 $\|\cdot\|$ 是 X 上的连续半范, 由定理 3, 有 $n_0 \in N$, 使得对 $\forall n > n_0, f \in M$, 以及满足 $\sup_{\|u\| \leq 1} |x'(u)| \leq 1$ 的 $x' \in X'$ 有如下不等式成立:

$$|x'(\sum_{j=n}^{\infty} f(u_j))| \leq \sum_{j=n}^{\infty} |x'(f(u_j))| < \varepsilon$$

其中, 对任意的 $f \in F, \sum_{j=n}^{\infty} f(u_j)$ 在 X 中收敛。对任意 $y \in X$, 存在 $x' \in (X, \|\cdot\|)' \subset X'$ 使得 $\sup_{\|u\| \leq 1} |x'(u)| = 1$ 且 $\|y\| = |x'(y)|$, 因而

$$\|\sum_{j=n}^{\infty} f(u_j)\| = \sup \left\{ |x'(\sum_{j=n}^{\infty} f(u_j))| : x' \in X', \sup_{\|u\| \leq 1} |x'(u)| \leq 1 \right\} < \varepsilon$$

$$\forall n > n_0, f \in M$$

所以, $\sum_{j=1}^{\infty} f(u_j)$ 关于 $f \in M$ 一致收敛。

(ii) $\Rightarrow$ (i), 设任意的 $\{u_j\} \in A$ 及 X 上的连续半范 $\|\cdot\|$, 假设 $M \notin B_{op}(E, F)$, 即 $\{(x'(f(u_j)))_{j=1}^{\infty}: x' \in X', \sup_{\|u\| \leq 1} |x'(u)| \leq 1\}$

$f \in M$ 在 l^1 中不是本性紧的, 根据引理 2, 存在 $\varepsilon > 0$, 对 $\forall n_0 \in N$, $\exists n > n_0$, $f_0 \in M$ 以及 $x' \in X'$ 满足 $\sup_{\|u\| \leq 1} |x'(u)| \leq 1$ 使 $\sum_{j=n}^{\infty} |x'(f_0(u_j))| \geq \varepsilon$. 从而有 $n_1 > 1$, $f_1 \in M$ 以及 $x'_1 \in X'$ 满足 $\sup_{\|u\| \leq 1} |x'_1(u)| \leq 1$ 使 $\sum_{j=n_1}^{\infty} |x'_1(f_1(u_j))| \geq \varepsilon$, 但由于 $\sum_{j=1}^{\infty} f(u_j)$ 收敛, 存在 $m_1 > n_1$ 使 $\sum_{j>m_1} |x'_1(f_1(u_j))| < \frac{\varepsilon}{2}$, 所以有 $\sum_{j=n_1}^{m_1} |x'_1(f_1(u_j))| > \frac{\varepsilon}{2}$. 类似地, 有 $m_2 > n_2 > m_1$, $f_2 \in M$ 及 $x'_2 \in X'$ 满足 $\sup_{\|u\| \leq 1} |x'_2(u)| \leq 1$, 使 $\sum_{j>m_2} |x'_2(f_2(u_j))| < \frac{\varepsilon}{2}$, 所以有 $\sum_{j=n_2}^{m_2} |x'_2(f_2(u_j))| > \frac{\varepsilon}{2}$. 如此做下去, 可得自然数序列 $n_1 < m_1 < n_2 < m_2 < \dots$, $\{f_k\} \subset M$ 及 $\{x'_k\} \subset X'$, 满足 $\sup_{\|u\| \leq 1} |x'_k(u)| \leq 1$ 且有 $\sum_{j=n_k}^{m_k} |x'_k(f_k(u_j))| > \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall k \in N$, 不失一般性, 假设对所有的 $u \in X$ 及 $x' \in X'$, 由于 $\sum_{j=n_k}^{m_k} |x'_k(f_k(u_j))| = \sum_{\substack{n_k \leq j \leq m_k \\ x'(f_k(u_j)) \geq 0}} x'_k(f_k(u_j)) + \sum_{\substack{n_k \leq j \leq m_k \\ x'(f_k(u_j)) < 0}} [-x'_k(f_k(u_j))]$, 则 $\sum_{\substack{n_k \leq j \leq m_k \\ x'(f_k(u_j)) \geq 0}} x'_k(f_k(u_j)) + \sum_{\substack{n_k \leq j \leq m_k \\ x'(f_k(u_j)) < 0}} [-x'_k(f_k(u_j))] > \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall k \in N$. 因此, 式(1)和式(2)必有一个对无穷多个 k 成立。

$$\sum_{\substack{n_k \leq j \leq m_k \\ x'(f_k(u_j)) \geq 0}} x'_k(f_k(u_j)) \geq \frac{\varepsilon}{4} \quad (1)$$

$$\sum_{\substack{n_k \leq j \leq m_k \\ x'(f_k(u_j)) < 0}} [-x'_k(f_k(u_j))] \geq \frac{\varepsilon}{4} \quad (2)$$

假设式(1)成立, 并且对任意 k , 设 $\Delta_k = \{j \in N: n_k \leq j \leq m_k\}$, $x'_k(f(u_j)) \geq \frac{\varepsilon}{4}$, 则 $\sum_{j \in \Delta_k} x'_k(f_k(u_j)) = \sum_{\substack{n_k \leq j \leq m_k \\ x'(f_k(u_j)) \geq 0}} x'_k(f_k(u_j)) \geq \frac{\varepsilon}{4}$ 对无穷

多个 k 成立, 如果必要, 可取子列, 则有 $x'_k(\sum_{j \in \Delta_k} f_k(u_j)) = \sum_{j \in \Delta_k} x'_k(f_k(u_j)) \geq \frac{\varepsilon}{4}$, $\forall k \in N$. 由于对任意 k , $\sup_{\|u\| \leq 1} |x'_k(u)| \leq 1$, 所以

$x'_k \in (X, \|\cdot\|)'$, 则有 $x'_k(\sum_{j \in \Delta_k} f_k(u_j)) \leq \sup_{\|u\| \leq 1} |x'_k(u)| \cdot \|\sum_{j \in \Delta_k} f_k(u_j)\|$, 从而有

$$\|\sum_{j \in \Delta_k} f_k(u_j)\| \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall k \in N \quad (3)$$

设 $\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k = \{j_1, j_2, \dots\}$, $j_1 < j_2 < \dots$, 则 $\{u_{j_i}\}_{i=1}^{\infty}$ 是 $\sigma(E, F)$ -绝对收敛的。 X 是序列完备的, 由于 $\sum_{j=1}^{\infty} u_j$ 在 $(E, \sigma(E, F))$ 中绝对收敛,

$\sum_{i=1}^{\infty} u_{j_i}$ 在 $(E, \sigma(E, F))$ 中绝对收敛, 且又有 $\max \Delta_k \leq m_k < n_{k+1} \leq \min \Delta_{k+1}$, 由式(3)得到 $\sum_{i=1}^{\infty} f(u_{j_i})$ 关于 $f \in M$ 不一致收敛, 产生矛盾。

类似地, 若假设式(2)成立, 同样可得到矛盾, 所以(ii) $\Rightarrow$ (i)成立。

定理 5 X 是序列完备的局部凸空间 $E \neq \Phi$, $F \subset X^E$, $M \subseteq F$, 则在每个 $M \in B_{\sigma}(E, F)$ 上一致收敛的拓扑与 $\sigma(E, F)$ 具有相同的绝对收敛级数。

3 结论

本文建立了具有普遍意义的抽象对偶系统 (E, F) , 不仅得到了与 $\sigma(E, F)$ 具有相同绝对收敛级数的拓扑, 而且找到了生成该拓扑的子集族 $B_{\sigma}(E, F)$, 这对于级数理论的发展具有一定的意义。

参考文献 (References)

- [1] Antosik P. On the mikusinski diagonal theorem [J]. *Bull Acad Polon Sci*, 1971, 19: 305-310.
- [2] Dierolf P. Theorems of the Orlicz-Pettis type for locally convex spaces[J]. *Manuscripta Math Soc*, 1977, 20: 73-94.
- [3] Stuart C, Swartz C. Generalizations of the Orlicz-Pettis theorem [J]. *Proyecciones Antofagasta*, 2005, 24(1): 37-48.
- [4] 顾娟, 刘照升, 周永芳, 等. 抽象对偶系统中的 Orlicz-Pettis 型定理[J]. *数学的实践与认识*, 2010, 40(20): 143-145.
Gu Juan, Liu Zhaosheng, Zhou Yongfang, et al. *Math Practice Theory*, 2010, 40(20): 143-145.
- [5] Swartz C. Orlicz-Pettis theorem for operators [J]. *J Sea Bull Math*, 1998, 12(1): 31-38.
- [6] Swartz C, Stuart C. Orlicz-Pettis theorems for multiplier convergent series[J]. *J Anal*, 1998, 17(4): 805-811.
- [7] Wu J, Lu S. A general Orlicz-Pettis theorem[J]. *Taiwanese J Math*, 2002, 6(3): 433-440.
- [8] Li R, Yang Y, Swartz C. A general Orlicz-Pettis theorem [J]. *SScMath*, 2006, 43(1): 47-60.

(责任编辑 代丽)

《科技导报》征集“封面文章”

为快速反映我国最新科技研究成果,《科技导报》拟利用刊物最显著位置——封面将最新科研成果第一时间予以突出报道。来稿要求:研究成果具创新性或新颖性;反映该领域我国乃至世界前沿研究水平;可以图片形式予以反映,图片美观、清晰、分辨率超过 300dpi;文章篇幅不限,要说明研究的背景、方法、取得的结果,以及结论。在线投稿:www.kjdb.org。