变系数 mKdV 方程的椭圆函数周期解

陈自高,连汝续

华北水利水电学院数学与信息科学学院,郑州 450011

摘要　通过引入一个波变换,将变系数 mKdV 方程约化为常微分方程。假设方程的系数满足特定的约束条件,借助符号计算软件 Mathematica 和扩展的 F-展开函数法,在拟设法、齐次平衡原理和 Jacobi 椭圆函数展开法的基础上,求得了精确解的浓缩公式。利用第一类椭圆方程中 P,Q,R 的不同取值与相应的 $F(\xi)$ 值之间的关系,从解的浓缩公式中,得到了丰富的显式精确解,特别是以两个不同的 Jacobi 椭圆函数表示的精确解。在极限的情况下,即当模 $m\to1$ 或 $m\to0$ 时,这些解退化为相应的类孤立波解和三角函数表示的精确解。该方法具有直接、简洁的特点,可以用来求解更多的在数学物理、自然科学和应用科学等领域出现的非线性偏微分方程的精确解。

关键词　精确解;类孤立波解;扩展的 F-展开法;变系数 mKdV 方程

中图分类号　O175.2　　**文献标识码**　A　　**doi**　10.3981/j.issn.1000-7857.2011.10.010

Solutions of mKdV Equation with Variable Coefficients in Jacobi Elliptic and Periodic Functions

CHEN Zigao, LIAN Ruxu

Department of Mathematics and Information Science, North China University of Water Resources and Electric Power, Zhengzhou 450011, China

Abstract　The mKdV equation with variable coefficients is reduced to an ordinary differential equation through a traveling wave transformation. With the aid of the symbolic computation software Mathematica as well as the extended F-expansion method recently proposed on the basis of the analogical method, the homogeneous balance principle and Jacobian elliptic function method, the concentrated formulas of exact solutions are derived if the coefficients of the mKdV equation satisfy some specific constraint conditions. By using the relations between values of P, Q, R and corresponding solutions $F(\xi)$ for the first kind of elliptic equation, from the concentrated formulae of solutions, a large number of explicit exact solutions, especially, the solutions expressed in two different Jacobian elliptic functions are obtained. In the limit cases, that is, when the module approaches 1 or 0, these explicit exact solutions degenerate into the soliton-like solutions and the exact solutions in the form of trigonometric functions, respectively. It is worthwhile to mention that the method used here is straightforward, concise and powerful and can be used for solving many other similar nonlinear partial differential equations which would appear in the fields of mathematical physics, natural sciences and applied sciences.

Keywords　exact solution; soliton-like solution; extended F-expansion method; mKdV equation with variable coefficients

0　引言

mKdV 方程[1-3]是非线性数学物理学中的一个重要方程,作为描述弱非线性长波的模型方程,它在物理学尤其是等离子体物理中具有十分广泛的应用,并且具有重要的工程应用前景。mKdV 方程作为一种与等离子体物理研究紧密相关的非线性发展方程,对其深入研究将有利于解决物理实际问题。对于常系数 mKdV 方程,已有许多文献进行了深入研究,并获得了相当多的研究成果。文献[4]利用齐次平衡法得到了 mKdV 方程的 Backlund 变换及求解公式;文献[5]利用 F-展开法得到了 KdV-Burgers 方程的精确解,作为特例,给出 mKdV 方程的双曲函数、三角函数表示的精确解;文献[6]用拟小波方法求解了 mKdV 方程的数值解;文献[7]利用双曲函数法求

收稿日期:2010-10-08;修回日期:2011-03-06

基金项目:河南省教育厅自然科学基金项目(2010A110012);河南省科技厅自然科学基金项目(102102210216)

作者简介:陈自高,讲师,研究方向为孤立子与可积系统,电子信箱:chenzigao@ncwu.edu.cn

出了组合 KdV-mKdV 方程的钟状孤波解和激波状孤波解，作为特例，给出 mKdV 方程的两类孤波解；文献[8]利用广义扩展的 F-展开法得到了具有非线性色散耗项的 mKdV 方程的 Riccati 函数解。然而，在实际应用中，常系数非线性发展方程只是现实中的非线性问题的理想化和近似，事实上，这些非线性演化方程的系数是随时间和空间变化的。由于变系数非线性方程能更准确地描述物质的属性，因此研究变系数非线性发展方程的精确解更有应用价值。近年来，对于变系数 mKdV 方程的分析和求解已引起了越来越多的关注，也取得了一定进展。文献[9]所讨论的变系数 mKdV 方程为

$$u_t+6F(t)u^2u_x+G(t)u_{xxx}=0$$

其中，$F(t)$ 为自由参数，$G(t)$ 为色散系数，利用齐次平衡法得到了此方程的 Backlund 变换，并利用此 Backlund 变换得到了求解该方程的一般方法，又应用截断展开法和延拓齐次平衡法得到了该方程的一组精确孤子解。在此方程的基础上，将系数变为时间和空间的函数，即考虑

$$u_t+\alpha(x,t)u^2u_x+\beta(x,t)u_{xxx}=0 \tag{1}$$

其中，$\alpha(x,t)$，$\beta(x,t)$ 均为 x,t 的函数。这样既深入研究了经典的变系数 mKdV 方程，又丰富了原有方程的类型。本文主要利用扩展的 F-展开法，并借助于符号软件 Mathematica，得到了变系数 mKdV 方程(1)的精确解的浓缩公式，从而得到了很丰富的显式精确解，特别是以两个不同的 Jacobi 椭圆函数表示的显式精确解。在极限的情况下，即当模 $m\to1$ 或 $m\to0$ 时，这些解退化为相应的类孤立波解和三角函数表示的显式精确解。

1　方法简述

扩展 F-展开法是齐次平衡原则的新应用，可视为 Jacobi 椭圆函数、三角函数、双曲正切展开法及 F-展开法的概括。

考虑关于 u 的变系数非线性方程

$$F(u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt},\cdots)=0 \tag{2}$$

其中，F 为 u 及其各阶偏导数的多项式，包含非线性项和以线性出现的高阶偏导数项。若偶阶偏导数和奇阶偏导数不共存，则采用下述方法求其精确解。设方程(2)有行波解

$$u(x,t)=\sum_{i=-n}^{n}a_iF^i(\xi)\quad(a_i\neq0) \tag{3}$$

其中，$a_{-n},\cdots,a_n$ 为待定常数，$\xi=f(t)x+g(t)$，这里 $f(t)$，$g(t)$ 是关于 t 的待定函数。$F(\xi)$ 满足一阶常微分方程

$$F'^2=PF^4+QF^2+R\quad(P\neq0) \tag{4}$$

其中，P,Q,R 为实常数。

平衡方程(2)中具支配地位的非线性项与最高阶偏导数项确定正整数 n。将式(3)代入方程(2)，同时利用常微分方程(4)，将方程(2)的左边化为关于 F^i 的多项式。由于 F^i 的线性无关性，可令该多项式的系数为 0，得到关于 $a_{-n},\cdots,a_n,f(t)$ 和 $g(t)$ 的一组非线性微分方程组。求解该微分方程组，并利用常微分方程(4)的解，可以求得方程(2)的类椭圆函数周期波解和其他形式的解。

2　mKdV 方程(1)解的浓缩公式

考虑到方程(1)的 u^2u_x 与 u_{xxx} 的齐次平衡，可设方程(1)的解为

$$u=a_{-1}F^{-1}(\xi)+a_0+a_1F(\xi)\ (a_1\neq0) \tag{5}$$

将式(5)代入方程(1)，令 F 的各次幂为 0，得到关于 a_{-1}，a_0，a_1 的代数方程组

$$6\beta Ra_{-1}f^3+\alpha a_{-1}^3f=0 \tag{6}$$

$$2\alpha fa_{-1}^2a_0=0 \tag{7}$$

$$\beta Qa_{-1}f^3+\alpha a_{-1}a_0^2f+\alpha a_{-1}^2a_1f+xa_{-1}f'+a_{-1}g'=0 \tag{8}$$

$$\beta Qa_1f^3+\alpha a_{-1}a_1^2f+\alpha a_0^2a_1f+xa_1f'+a_1g'=0 \tag{9}$$

$$2\alpha fa_0a_1^2=0 \tag{10}$$

$$6\beta Pa_1f^3+\alpha a_1^3f=0 \tag{11}$$

由式(7)和(10)，得

情形Ⅰ　若 $a_0=a_{-1}=0$ 时，将其分别代入式(6)—(11)，化简可得

$$\begin{cases}\beta Qf^3+xf'+g'=0\\ 6\beta Pf^2+\alpha a_1^2=0\end{cases} \tag{12}$$

为求解方程组(12)，令

$$\beta(x,t)=\beta_1(t)x+\beta_2(t)$$

其中，$\beta_1(t)$，$\beta_2(t)$ 为关于 t 的任意函数。则

$$f(t)=\pm\frac{1}{\sqrt{2\int_1^tQ\beta_1(\tau)\mathrm{d}\tau}},g(t)=-\int_1^tQf^3(\tau)\beta_2(\tau)\mathrm{d}\tau$$

因此，当系数函数服从约束条件

$$\begin{cases}\beta(x,t)=\beta_1(t)x+\beta_2(t)\\ \alpha(x,t)a_1^2\int_1^tQ\beta_1(\tau)\mathrm{d}\tau+3P\beta(x,t)=0\end{cases} \tag{13}$$

方程(1)解的浓缩公式为

$$u(x,t)=a_1F(\xi) \tag{14}$$

其中，$\xi=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2\int_1^tQ\beta_1(\tau)\mathrm{d}\tau}}x-\int_1^tQf^3(\tau)\beta_2(\tau)\mathrm{d}\tau$。

情形Ⅱ　若 $a_0=0$ 且 $a_{-1}\neq0$ 时，将其分别代入式(6)—(11)，化简得

$$\begin{cases}6\beta Rf^2+\alpha a_{-1}^2=0\\ \beta Qf^3+\alpha a_{-1}a_1f+xf'+g'=0\\ 6\beta Pf^2+\alpha a_1^2=0\end{cases} \tag{15}$$

为求解方程组(15)，令 $\alpha(x,t)=\alpha_1(t)x+\alpha_2(t)$，$\beta(x,t)=\beta_1(t)\cdot x+\beta_2(t)$，其中 $\alpha_1(t)$，$\alpha_2(t)$，$\beta_1(t)$，$\beta_2(t)$ 为关于 t 的任意函数，则

$$f(t)=\pm\frac{\mathrm{e}^{-\int_1^ta_{-1}a_1\alpha(s)\mathrm{d}s}}{\sqrt{2\int_1^t\mathrm{e}^{-2\int_1^{\tau}a_{-1}a_1\alpha(s)\mathrm{d}s}Q\beta_1(\tau)\mathrm{d}\tau}}$$

$$g(t)=-\int_1^t[Q\beta_2(\tau)f^3(\tau)+a_{-1}a_1\alpha_2(\tau)f(\tau)]\mathrm{d}\tau$$

因此，当系数函数服从约束条件

$$\begin{cases}\alpha(x,t)=\alpha_1(t)x+\alpha_2(t)\\ \beta(x,t)=\beta_1(t)x+b\beta_2(t)\\ Pa_{-1}^2=Ra_1^2\end{cases} \tag{16}$$

方程(1)解的浓缩公式为

$$u(x,t)=a_{-1}F^{-1}(\xi)+a_1F(\xi) \tag{17}$$

其中，$\xi=\pm\dfrac{e^{-\int_1^t a_{-1}a_1\alpha(s)ds}}{\sqrt{2\int_1^t e^{-2\int_1^\tau a_{-1}a_1\alpha(s)ds}Q\beta_1(\tau)d\tau}}x-\int_1^t[Q\beta_2(\tau)f^3(\tau)+a_{-1}a_1\cdot\alpha_2(\tau)f(\tau)]d\tau$

3　mKdV 方程(1)的类周期波解

利用文献[10]中附录 A，从第 2 部分获得的两类浓缩公式中分解出多种 Jacobi 椭圆函数表示的类周期波解(其中 m 为模数，$0<m<1$，讨论中不考虑平凡解和重复出现的解)。

(1) 首先可以从浓缩公式(14)中分离出 12 类单个 Jacobi 椭圆函数表示的类周期波解。

取 $P=m^2$，$Q=-(1+m^2)$，$R=1$，则 $F(\xi)=\mathrm{sn}\xi$ 或 $\mathrm{cd}\xi$。当系数 $\alpha(x,t)$，$\beta(x,t)$满足约束条件 $\beta(x,t)=\beta_1(t)x+\beta_2(t)$，$3m^2\beta(x,t)-\alpha(x,t)a_1^2\int_1^t(1+m^2)\beta_1(\tau)d\tau=0$ 时，得到方程(1)的精确解为 $u_1(x,t)=a_1\mathrm{sn}\xi$，$u_2(x,t)=a_1\mathrm{cd}\xi$。

类似地，可得到方程(1)的单个椭圆函数表示的类周期波解。当系数 $\alpha(x,t)$，$\beta(x,t)$ 满足约束条件 $\beta(x,t)=\beta_1(t)x+\beta_2(t)$，$\alpha(x,t)a_1^2\int_1^t(2m^2-1)\beta_1(\tau)d\tau-3m^2\beta(x,t)=0$ 时，得到方程(1)的精确解为 $u_3(x,t)=a_1\mathrm{cn}\xi$。

当系数函数服从约束条件 $\beta(x,t)=\beta_1(t)x+\beta_2(t)$，$\alpha(x,t)a_1^2\cdot\int_1^t(2-m^2)\beta_1(\tau)d\tau-3\beta(x,t)=0$ 时，则方程(1)的精确解为 $u_4(x,t)=a_1\mathrm{dn}\xi$。

当系数函数服从约束条件 $\beta(x,t)=\beta_1(t)x+\beta_2(t)$，$3\beta(x,t)-\alpha(x,t)a_1^2\int_1^t(1+m^2)\beta_1(\tau)d\tau=0$ 时，则方程(1)的精确解为 $u_5(x,t)=a_1\mathrm{ns}\xi$，$u_6(x,t)=a_1\mathrm{dc}\xi$。

当系数函数服从约束条件 $\beta(x,t)=\beta_1(t)x+\beta_2(t)$，$\alpha(x,t)a_1^2\cdot\int_1^t(2m^2-1)\beta_1(\tau)d\tau+3(1-m^2)\beta(x,t)=0$ 时，则方程(1)的精确解为 $u_7(x,t)=a_1\mathrm{nc}\xi$。

当系数函数服从约束条件 $\beta(x,t)=\beta_1(t)x+\beta_2(t)$，$\alpha(x,t)a_1^2\cdot\int_1^t(2-m^2)\beta_1(\tau)d\tau+3(m^2-1)\beta(x,t)=0$ 时，则方程(1)的精确解为 $u_8(x,t)=a_1\mathrm{nd}\xi$。

当系数函数服从约束条件 $\beta(x,t)=\beta_1(t)x+\beta_2(t)$，$\alpha(x,t)a_1^2\cdot\int_1^t(2-m^2)\beta_1(\tau)d\tau+3(m^2-1)\beta(x,t)=0$ 时，则方程(1)的精确解为 $u_9(x,t)=a_1\mathrm{sc}\xi$。

当系数函数服从约束条件 $\beta(x,t)=\beta_1(t)x+\beta_2(t)$，$\alpha(x,t)a_1^2\cdot\int_1^t(2m^2-1)\beta_1(\tau)d\tau+3\beta(x,t)(m^4-m^2)=0$ 时，则方程(1)的精确解为 $u_{10}(x,t)=a_1\mathrm{sd}\xi$。

当系数函数服从约束条件 $\beta(x,t)=\beta_1(t)x+\beta_2(t)$，$\alpha(x,t)a_1^2\cdot\int_1^t(2-m^2)\beta_1(\tau)d\tau+3\beta(x,t)=0$ 时，则方程(1)的精确解为 $u_{11}(x,t)=a_1\mathrm{cs}\xi$。

当系数函数服从约束条件 $\beta(x,t)=\beta_1(t)x+\beta_2(t)$，$\alpha(x,t)a_1^2\cdot\int_1^t(2m^2-1)\beta_1(\tau)d\tau+3\beta(x,t)=0$ 时，则方程(1)的精确解为 $u_{12}(x,t)=a_1\mathrm{ds}\xi$。

(2) 其次，可以从浓缩公式（17）中分离出 12 类两个 Jacobi 椭圆函数表示的类周期波解。

当方程(1)系数 $\alpha(x,t)$，$\beta(x,t)$满足约束条件 $\alpha(x,t)=\alpha_1(t)x+\alpha_2(t)$，$\beta(x,t)=\beta_1(t)x+\beta_2(t)$时，取 $P=m^2$，$Q=-(1+m^2)$，$R=1$，则 $F(\xi)=\mathrm{sn}\xi$ 或 $\mathrm{cd}\xi$，得到方程(1)的精确解为 $u_1(x,t)=\pm\frac{1}{m}\cdot a_1\mathrm{ns}\xi+a_1\mathrm{sn}\xi$，$u_2(x,t)=\pm\frac{1}{m}\mathrm{dc}\xi+a_1\mathrm{cd}\xi$。

类似地，可得方程(1)两椭圆函数表示的类周期波解

$$u_3(x,t)=\pm\frac{\sqrt{m^2-1}}{m}a_1\mathrm{nc}\xi+a_1\mathrm{cn}\xi$$

$$u_4(x,t)=\pm\sqrt{1-m^2}\,a_1\mathrm{nd}\xi+a_1\mathrm{dn}\xi$$

$$u_5(x,t)=\pm ma_1\mathrm{sn}\xi+a_1\mathrm{ns}\xi$$

$$u_6(x,t)=\pm ma_1\mathrm{cd}\xi+a_1\mathrm{dc}\xi$$

$$u_7(x,t)=\pm\frac{m}{\sqrt{m^2-1}}a_1\mathrm{cn}\xi+a_1\mathrm{nc}\xi$$

$$u_8(x,t)=\pm\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}a_1\mathrm{dn}\xi+a_1\mathrm{nd}\xi$$

$$u_9(x,t)=\pm\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}a_1\mathrm{cs}\xi+a_1\mathrm{sc}\xi$$

$$u_{10}(x,t)=\pm\frac{1}{m\sqrt{m^2-1}}a_1\mathrm{ds}\xi+a_1\mathrm{sd}\xi$$

$$u_{11}(x,t)=\pm\sqrt{1-m^2}\,a_1\mathrm{sc}\xi+a_1\mathrm{cs}\xi$$

$$u_{12}(x,t)=\pm m\sqrt{m^2-1}\,a_1\mathrm{sd}\xi+a_1\mathrm{ds}\xi$$

当模 $m\to1$ 和 $m\to0$ 时，上述精确解退化为相应的类孤立波解和三角函数解。

4　结论

本文利用扩展 F-展开函数法并借助于计算机符号系统 Mathematica，得到变系数 mKdV 方程解的浓缩公式，并借助辅助常微分方程分离解的浓缩公式，得到了较为丰富的精确解析解，其中既有用 Jacobi 椭圆函数表示的类周期波解又有孤立波解和三角函数解。这些解有助于进一步深入了解 mKdV 方程的物理运动规律。本研究方法同样可以用来求解其他变系数的非线性发展方程或方程组。

参考文献(References)

[1] Kappeler T, Perry P, Shubin M. Solutions of mKdV in classes of fuctions unbounded at infinity [J]. *Journal of Geometric Analysis*, 2008, 18(2): 443-477.

[2] 张金良, 王明亮, 王跃明. 推广的 F-展开法及变系数 KdV 和 mKdV 的

精确解[J]. 数学物理学报, 2006, 26(3): 353-360.
Zhang Jinliang, Wang Mingliang, Wang Yueming. *Acta Mathematica Scientia*, 2006, 26(3): 353-360.
[3] Yang Q, Zhang H J. Exact two-soliton solutions for discrete mKdV equation[J]. *Commun Theor Phys*, 2008, 49(6): 1553-1556.
[4] 张玉峰, 张鸿庆. 组合 KdV 与 MKdV 方程 Backlund 变换及其一类精确解[J]. 大连理工大学学报, 2001, 41(4): 392-395.
Zhang Yufeng, Zhang Hongqing. *Journal of Dalian University of Technology*, 2001, 41(4): 392-395.
[5] 李向正, 王跃明, 李晓燕, 等. 组合 KdV-Burgers 方程的一种解法[J]. 河南科技大学学报: 自然科学版, 2003, 24(4): 104-107.
Li Xiangzheng, Wang Yueming, Li Xiaoyan, *et al*. *Journal of Henan University of Science and Technology: Natural Science Edition*, 2003, 24(4): 104-107.
[6] 唐驾时, 刘铸永, 李学平. MKdV 方程的拟小波解 [J]. 物理学报, 2003, 52(3): 522-525.
Tang Jiashi, Liu Zhuyong, Li Xueping. *Acta Physica Sinica*, 2003, 52(3): 522-525.
[7] 朱燕娟. 用双曲函数法求 KdV-mKdV 方程的钟状孤波解和激波状孤波解[J]. 华南理工大学学报: 自然科学版, 2004, 32(7): 78-80.
Zhu Yanjuan. *Journal of South China University of Technology: Natural Science Edition*, 2004, 32(7): 78-80.
[8] 蔡国梁, 唐晓芬, 马昆. 非线性色散耗散 mKdV 方程的 Riccati 函数解[J]. 江苏大学学报, 2009, 30(6): 640-644.
Cai Guoliang, Tang Xiaofen, Ma Kun. *Journal of Jiangsu University: Natural Science Edition*, 2009, 30(6): 640-644.
[9] 徐传友. 变系数 MKdV 方程的 B(a)cklund 变换和精确解[J]. 阜阳师范学院学报: 自然科学版, 2007, 24(2): 8-10.
Xu Chuanyou. *Journal of Fuyang Teachers College: Natural Science Edition*, 2007, 24(2): 8-10.
[10] 刘式适, 付遵涛, 刘式达, 等. 变系数非线性方程的 Jacobi 椭圆函数展开解[J]. 物理学报, 2002, 51(9): 1923-1926.
Liu Shishi, Fu Zuntao, Liu Shida, *et al*. *Acta Physica Sinica*, 2002, 51(9): 1923-1926.

(责任编辑　刘志远)