

求解拟五对角线性方程组的两参数法

李文强¹, 张海霞¹, 李卫霞²

1. 河南师范大学数学与信息科学学院, 河南新乡 453007
2. 河南师范大学附属中学, 河南新乡 453007

摘要 针对拟五对角线性方程组的特点, 选择最后两个未知量 x_{n-1} 和 x_n 作为参数 (两参数法), 将它们代入其他 $n-2$ 个方程中, 从而将原方程组的求解问题转化为求解 3 个五对角线性方程组, 然后再求出参数 x_{n-1} 和 x_n , 最终求出全部解向量。由于算法的主要运算是运用追赶法求解五对角线性方程组, 具有较好的数值稳定性。数据实验表明, 与四参数算法相比, 两参数法不仅速度快, 对同阶的线性方程组求解时间比约为 1.47, 内存开销也比四参数法少。该算法需要的乘除次数为 $O(23n)$, 加减次数为 $O(16n)$, 内存占用量约为 $O(10n)$ 。算术运算次数和内存占用量均与 n 呈线性关系。

关键词 拟五对角线性方程组; 拟五对角矩阵; 参数法; 追赶法

中图分类号 0241.6

文献标识码 A

doi 10.3981/j.issn.1000-7857.2011.07.009

Tow Parameters Algorithm for Solving the Quasi-pentad-diagonal Linear Equations Set

LI Wenqiang¹, ZHANG Haixia¹, LI Weixia²

1. College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, Henan Province, China
2. Affiliated Middle School of Henan Normal University, Xinxiang 453007, Henan Province, China

Abstract An algorithm is presented for solving quasi quinque-diagonal linear system of equation. First, the last two variables are selected as the parameters and are put into the other $n-2$ equations. Then the original problem can be transformed into a problem for solving three quinque-diagonal linear systems of equation. Finally, all the solution vectors can be obtained by solving the parameters x_{n-1} and x_n . A forward elimination and backward substitution algorithm is used to solve the quasi quinque-diagonal linear system, it shows a good numerical stability. Experimental data indicate that comparing with the four parameter algorithm, not only the two parameter method is fast for solving the same order of linear equations with time ratio of about 1.47, but also the memory consumption is less than that used by the four parameters. The measure of multiplication or division in this algorithm is $O(23n)$ and $O(16n)$ for addition and subtraction, respectively. The memory needed is about $O(10n)$. The number of arithmetical operations and memory consumption all have a linear relation with the n .

Keywords quasi quinque-diagonal linear system of equation; quasi quinque-diagonal matrix; parameter method; chasing algorithm

0 引言

在构造具有周期边界条件的 5 次样条函数^[1]或者用紧致差分格式计算函数的一阶或二阶导数等^[2-4]问题中, 经常遇到拟五对角线性方程组的求解。近年来, 已有不少学者关注拟五对角线性方程组的求解, 王晶昕等^[5]给出的五参数法算术运算量为 $O(49n)$, 文献[6]的四参数法运算量仍是 $O(49n)$, 它们的内存占用量为 $O(12n)$ 。

文中给出了一种求解 n 阶拟五对角线性方程组的两参数法, 该算法先求解 3 个 $n-2$ 阶的五对角线性方程组, 然后

确定视为参数的最后两个解分量 x_{n-1} 和 x_n , 最后组合求出全部解。该算法主要运用五对角线性方程组的追赶法, 因此, 对于对角占优的五对角线性方程组具有良好的数值稳定性。

1 算法分析

拟五对角线性方程组的矩阵形式为

$$Ax=f \quad (1)$$

其中, 解向量 $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$; 右端向量 $f=(f_1, f_2, \dots, f_n) \in R^n$; 系数矩阵 $A \in R^{n \times n}$,

收稿日期: 2010-08-16; 修回日期: 2011-02-21

作者简介: 李文强, 副教授, 研究方向为数值线性代数, 电子信箱: liwenqiangxx@126.com

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & \beta_1 & & \alpha_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \beta_2 & & \alpha_2 \\ \alpha_3 & a_3 & b_3 & c_3 & \beta_3 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \alpha_{n-2} & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} & \beta_{n-2} \\ \beta_{n-1} & & \alpha_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ c_n & \beta_n & & \alpha_n & a_n & b_n \end{bmatrix}$$

称为拟五对角矩阵。

在式(1)中将 x_{n-1}, x_n 看作参数,并代入前 $n-2$ 个方程,整理后得

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & \beta_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & a_3 & b_3 & c_3 & \beta_3 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \alpha_{n-4} & a_{n-4} & b_{n-4} & c_{n-4} & \beta_{n-4} \\ & & \alpha_{n-3} & a_{n-3} & b_{n-3} & c_{n-3} \\ & & \alpha_{n-2} & a_{n-2} & b_{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-4} \\ x_{n-3} \\ x_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{n-4} \\ f_{n-3} \\ f_{n-2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta_{n-3} \\ c_{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ -x_{n-1} \\ \vdots \\ -x_n \\ 0 \\ 0 \\ \beta_{n-2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

记式(2)的五对角系数矩阵为 $T = \text{diag}(\alpha_i, a_i, b_i, c_i, \beta_i) \in R^{(n-2) \times (n-2)}$, $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-2})^T$, $\tilde{f} = (f_1, f_2, \dots, f_{n-2})^T$, 则式(2)可写成下列向量形式:

$$T\tilde{x} = \tilde{f} - x_{n-1}(\alpha_1 e_1 + \beta_{n-3} e_{n-3} + c_{n-2} e_{n-2}) - x_n(a_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \beta_{n-2} e_{n-2}) \quad (3)$$

设 $u = (u_1, u_2, \dots, u_{n-2})^T$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_{n-2})^T$, $w = (w_1, w_2, \dots, w_{n-2})^T$ 分别满足

$$Tu = \alpha_1 e_1 + \beta_{n-3} e_{n-3} + c_{n-2} e_{n-2} \quad Tv = a_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \beta_{n-2} e_{n-2}, \quad Tw = \tilde{f} \quad (4)$$

则

$$x_i = w_i - u_i x_{n-1} - v_i x_n \quad (i=1, 2, \dots, n-2) \quad (5)$$

至此,式(1)解向量 x 的求解可分3步:先计算出 u, v, w , 再求出 x_{n-1}, x_n , 最后代入式(5)依次求出 $x_1, x_2, \dots, x_{n-2}$ 。

为求出 x_{n-1}, x_n , 将式(5)代入式(1)中最后两个方程,整理得

$$\begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中

$$\begin{cases} \xi_{11} = b_{n-1} - \beta_{n-1} u_1 - \alpha_{n-1} u_{n-3} - a_{n-1} u_{n-2} \\ \xi_{12} = c_{n-1} - \beta_{n-1} v_1 - \alpha_{n-1} v_{n-3} - a_{n-1} v_{n-2} \\ d_1 = f_{n-1} - \beta_{n-1} w_1 - \alpha_{n-1} w_{n-3} - a_{n-1} w_{n-2} \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_{21} = a_n - c_n u_1 - \beta_n u_2 - \alpha_n u_{n-2} \\ \xi_{22} = b_n - c_n v_1 - \beta_n v_2 - \alpha_n v_{n-2} \\ d_2 = f_n - c_n w_1 - \beta_n w_2 - \alpha_n w_{n-2} \end{cases}$$

2 算法过程

根据上述算法分析,可得到如下求解拟五对角线性方程

组的两参数算法。算法步骤如下。

步骤1 用追赶法^[7]思想分解五对角矩阵 $T=LU$ 。其中

$$L = \begin{bmatrix} p_1 & & & & \\ g_2 & p_2 & & & \\ \alpha_3 & g_3 & p_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha_{n-2} & g_{n-2} & p_{n-2} \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & q_1 & h_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & q_{n-4} & h_{n-4} \\ & & & 1 & q_{n-3} \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

这里,

$$\begin{cases} p_1 = b_1, q_1 = c_1/p_1, h_1 = \beta_1/p_1 \\ g_2 = a_2, p_2 = b_2 - g_2 q_1, q_2 = (c_2 - g_2 h_1)/p_2, h_2 = \beta_2/p_2 \\ \begin{cases} g_i = a_i - \alpha_i q_{i-1}, p_i = b_i - \alpha_i h_{i-2} - g_i q_{i-1} \\ q_i = (c_i - g_i h_{i-1})/p_i, h_i = \beta_i/p_i \end{cases} \quad (i=3, 4, \dots, n-4) \\ g_{n-3} = a_{n-3} - \alpha_{n-3} q_{n-4}, p_{n-3} = b_{n-3} - \alpha_{n-3} h_{n-5} - g_{n-3} q_{n-4}, q_{n-3} = (c_{n-3} - g_{n-3} h_{n-4})/p_{n-3} \\ g_{n-2} = a_{n-2} - \alpha_{n-2} q_{n-3}, p_{n-2} = b_{n-2} - \alpha_{n-2} h_{n-4} - g_{n-2} q_{n-3} \end{cases} \quad (7)$$

步骤2 分别求解出 u, v, w 。

$$\begin{cases} w_1 = f_1/p_1, w_2 = (f_2 - g_2 w_1)/p_2 \\ w_i = (f_i - \alpha_i w_{i-2} - g_i w_{i-1})/p_i \quad (i=3, 4, \dots, n-2) \\ \begin{cases} w_{n-3} = w_{n-3} - q_{n-3} w_{n-2} \\ w_i = w_i - q_i w_{i+1} - h_i w_{i+2} \end{cases} \quad (i=n-4, n-5, \dots, 1) \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} u_1 = \alpha_1/p_1, w_2 = -g_2 u_1/p_2 \\ u_i = (-\alpha_i u_{i-2} - g_i u_{i-1})/p_i \quad (i=3, 4, \dots, n-4) \\ \begin{cases} u_{n-3} = (\beta_{n-3} - \alpha_{n-3} u_{n-5} - g_{n-3} u_{n-4})/p_{n-3} \\ u_{n-2} = (c_{n-2} - \alpha_{n-2} u_{n-4} - g_{n-2} u_{n-3})/p_{n-2} \end{cases} \\ \begin{cases} u_{n-3} = u_{n-3} - q_{n-3} u_{n-2} \\ u_i = u_i - q_i u_{i+1} - h_i u_{i+2} \end{cases} \quad (i=n-4, n-5, \dots, 1) \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} v_1 = a_1/p_1, v_2 = (\alpha_2 - g_2 v_1)/p_2 \\ v_i = (-\alpha_i v_{i-2} - v_i u_{i-1})/p_i \quad (i=3, 4, \dots, n-3) \\ \begin{cases} v_{n-2} = (\beta_{n-2} - \alpha_{n-2} v_{n-4} - g_{n-2} v_{n-3})/p_{n-2} \\ \begin{cases} v_{n-3} = v_{n-3} - q_{n-3} v_{n-2} \\ v_i = v_i - q_i v_{i+1} - h_i v_{i+2} \end{cases} \end{cases} \quad (i=n-4, n-5, \dots, 1) \end{cases} \quad (10)$$

步骤3 计算参数 x_{n-1} 和 x_n 。

$$x_{n-1} = \frac{d_1 \xi_{22} - d_2 \xi_{12}}{\xi_{11} \xi_{22} - \xi_{12} \xi_{21}} \quad x_n = \frac{d_2 \xi_{11} - d_1 \xi_{21}}{\xi_{11} \xi_{22} - \xi_{12} \xi_{21}} \quad (11)$$

步骤4 计算其他解。

$$x_i = w_i - u_i x_{n-1} - v_i x_n \quad (i=1, 2, \dots, n-2) \quad (12)$$

算法复杂性分析:式(7)乘除法约 $O(6n)$, 加减法约 $O(4n)$; 式(8)乘除法约 $O(5n)$, 加减法约 $O(4n)$; 式(9)乘除法约 $O(5n)$, 加减法约 $O(3n)$; 式(10)乘除法约 $O(5n)$, 加减法约 $O(3n)$; 式(12)乘除法约 $O(2n)$, 加减法约 $O(2n)$, 因此,该算法总计乘除法约 $O(23n)$, 加减法约 $O(16n)$, 即总运算量约为 $O(39n)$ 。

内存开销分析:原方程组需 $6n$, 追赶法矩阵分解需 $4n$, 方程组的解向量及中间解向量需 $3n$, 共计约 $13n$ 个实数单元的内存容量。如果方程组是 Teoplitz 的, 仅需 $8n$ 个单元。在实际编程时, 若将算法第1步和第2步合并, 可以不保存 $p_i, g_i (i=1, 2, \dots, n)$, 而且可以将 w 和 f 合二为一, 这样内存占用量约

为 $10n$, Teoplitz 方程约为 $5n$ 。

文献[5]和文献[6]给出的算法运算量相同, 都需乘法约 $O(29n)$, 加减法约 $O(20n)$, 内存占用量约 $O(12n)$, 无论是算术运算量和内存占用量都比本文算法略差。

3 数值实验

利用紧致差分格式对一阶导数进行差分离散, 一般可以写成如下形式^[3-4]:

$$\beta f'_{i-2} + \alpha f'_{i-1} + f'_i + \alpha f'_{i+1} + \beta f'_{i+2} = c \frac{f_{i+3} - f_{i-3}}{6h} + b \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4h} + a \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$$

当系数取为: $\beta = \frac{1}{20}$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $a = \frac{17}{12}$, $b = \frac{101}{150}$, $c = \frac{1}{100}$ 时, 精度可达到 10 阶。

例 设函数 $f(x) = \sin x$, 等距剖分区间 $[0, 2\pi]$: $h = 2\pi/n$, $x_i = ih$ ($i=0, 1, 2, \dots, n$)。对应函数值为 $f_i = f(x_i)$, $i=0, 1, 2, \dots, n$ 。利用紧致差分格式计算导函数值 $f'_i = f'(x_i)$, $i=0, 1, 2, \dots, n$ 。

显然具有周期性边界条件: $f_i = f_{n+i}$ ($i=-2, -1, 0, 1, 2, 3$); $f'_i = f'_{n+i}$ ($i=-1, 0, 1, 2$), 从而差分方程可写成:

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha & \beta & & \beta & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha & \beta & & \beta \\ \beta & \alpha & 1 & \alpha & \beta & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \beta & \alpha & 1 & \alpha & \beta \\ \beta & & \beta & \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \beta & & \beta & \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \\ \vdots \\ f'_{n-2} \\ f'_{n-1} \\ f'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

其中, $d_i = c \frac{f_{i+3} - f_{i-3}}{6h} + b \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4h} + a \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$ ($i=1, 2, \dots, n$)。

分别运用本文算法和文献[4]的四参数法进行计算。数值试验的平台是曙光天阔 W560I 工作站 (CPU 为 Intel Xeron 2.33GHz, 内存 4GB), 操作系统为 Windows Server 2003, 使用 Fortran 语言编程, 数据类型为双精度浮点型。计算结果如表 1 所示。

由表 1 可知, 算法的计算时间与方程组阶数 n 呈线性关系。与四参数算法相比较, 两参数法不仅速度快, 对同阶的线性方程组求解时间比约为 1.47。表中最后两组计算数据表明本文算法的内存开销也比四参数法要少。

4 结论

拟五对角线性方程组是科学与工程计算中的一个常见问题, 通常采用传统的高斯消元法或迭代算法进行求解。针对五对角线性方程组的特点设计的专门算法还不是很多。本文给出了求解拟五对角线性方程组的两参数法, 将拟五对角线性方程组的求解问题转化为求解 3 个五对角线性方程组的问题。3 个五对角线性方程组全部采用追赶法求解, 只要系数矩阵是严格对角占优或不可约对角占优的, 整个算法就具有很好的数值稳定性。在求解拟五对角线性方程组时, 总的算数运算量约为 $O(39n)$, 内存占用量约为 $O(10n)$ 。数值试验

表 1 拟五对角方程组的求解时间阶数

Table 1 Computational time for sloving the quasi-pentad-diagonal linear equations

阶数 $n \times 10^6$	两参数法 t_1/s	四参数法 t_2/s	时间比 (t_2/t_1)
1	2.3750	3.4844	1.4671
2	4.7344	6.9844	1.4752
3	7.1094	10.4531	1.4703
4	9.5000	13.9688	1.4704
5	11.8438	17.4219	1.4710
6	14.2188	20.8906	1.4692
7	16.6074	24.4219	1.4705
8	18.9531	27.8750	1.4707
9	21.3125	31.3906	1.4729
10	23.7354	34.8906	1.4700
11	26.1250	38.3438	1.4677
12	28.4531	41.8594	1.4712
13	30.8594	45.3438	1.4694
14	33.2188	48.7813	1.4685
15	35.9219	52.7031	1.4672
16	38.0156	溢出	
17	40.7031	溢出	

结果也表明, 对于百万阶的拟五对角线性方程组本算法都可以在几秒内给出准确结果。

参考文献 (References)

- [1] 王省富. 样条函数及其应用[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1989.
Wang Shengfu. Spline function and its application [M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1989.
- [2] 罗柏华. 用于波动方程计算的高阶精度紧致差分方法[J]. 上海大学学报: 自然科学版, 2009, 15(2): 134-141.
Luo Baihua. Journal of Shanghai University: Natural Science Edition, 2009, 15(2): 134-141.
- [3] Lee S K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution [J]. J Comp Phys, 1992, 103: 16-42.
- [4] Lacor C S, Baelmans S. M. A finite volume formulation of compact central schemes on arbitrary structured grids [J]. J Comp Phys, 2004, 198: 535-566.
- [5] 王晶昕, 薛静. 用五参数法求解拟五对角方程组 [J]. 吉林师范大学学报: 自然科学版, 2008, 29(2): 5-8.
Wang Jingxin, Xue Jing. Jilin Normal University Journal: Natural Science Edition, 2008, 29(2): 5-8.
- [6] 李文强, 马民. 求解拟五对角线性方程组的两参数法 [J]. 科技导报, 2010, 28(17): 46-49.
Li Wenqiang, Ma Min. Science & Technology Review, 2010, 28(17): 46-49.
- [7] 王礼广, 蔡放, 熊岳山. 五对角线性方程组追赶法 [J]. 南华大学学报: 自然科学版, 2008, 22(1): 1-4.
Wang Liguang, Cai Fang, Xiong Yueshan. Journal of University of South China: Science & Technology Edition, 2008, 22(1): 1-4.

(责任编辑 代丽)