分形数集自相似新异类型

杨冠平

武警郑州指挥学院,郑州 451450

摘要 按照集合特征把分形自相似划分为4类,以前分形数集中出现的自相似可归为第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ类,未见第Ⅳ类。发现一种新的三元数集,具有Ⅳ类自相似性。数集整体外观像3叶片叶轮,叶边有序排列着无数芽枝。芽枝上结有两种不同形状的自相似子集,结在枝梢段的子集具有全集形,结在枝干段的子集具有Mandelbrot集形,呈现一棵树结两种果的现象。两种子集各带有自己的自相似后代,自相似传递方式迥异。Mandelbrot集形子集的后代都是Mandelbrot集形;全集形子集的后代也分两种形,像全集那样遵循枝干段与枝梢段不同的规则。芽枝干梢两段有可辨的交接处,却是无穷精致的极限点。比较多种分形数集的运算规则和形象,得出数算规则小差别可以导致数集形态和自相似特性大差别的结论,也推测分形数集或有自相似的趋向性。文中给出了该三元数集的定义、样集参数和空间位置,附图21幅展示了整体三维形象、两种子集的剖面形态以及局部复杂的自相似结构。

关键词 三维分形;分形数集;自相似类型;Mandelbrot集;三元数

中图分类号 O189.12 **文献标识码** A **doi** 10.3981/j.issn.1000-7857.2011.02.13

New Type of Self-similarity in Fractal Numbers Sets

YANG Guanping

Zhengzhou Command College of CAPF, Zhengzhou 451450, China

Abstract The fractal self-similarities are divided into four types according to set characters. All examples of self-similarities ever seen in fractal numbers sets are ranged over type I, II, III, except type IV. It is discovered that a new set of ternary numbers is of the nature of type IV. The numbers set has the shape of three blades vane-wheel in 3D. Unnumbered sprouts are orderly arranged on the vane edges. An interesting phenomenon shows that there are two different kinds of self-similar subsets growing on the same branches of sprouts, which is just like two different kind of fruits growing on a tree. The subsets on the trunks of the branches are of Mandelbrot set shape, and the subsets on the tips of the branches are of the whole set shape. Both of them have their own ways to transmit self-similarity. The subsets of Mandelbrot set shape have subsets of Mandelbrot set shape. The subsets of the whole set shape have two kinds of self-similar subsets just like their mother sets; they obey different rules at different position. The trunk and the tip of each branch have a visible joint but a limit point. By comparing some fractal numbers sets with their shapes and number operating rules, it can be seen that little difference of the number operating rules make much difference in shape and mark difference in self-similarity property. And it infers that there probably exist self-similarity tendency in fractal numbers sets. With the definitions, the parameters and coordinates are given; there are 21 pictures to show 3D shapes of the whole set, the section images for two kinds of subsets, and complex structures of self-similarity at location.

Keywords 3D fractal; fractal numbers set; types of self-similarity; Mandelbrot set; ternary number

0 引言

经过自然数、分数、负数、无理数的一步步认识,数学才弄清楚实数。实数是一元数,其数集排列在一维直线上,给人的感觉是抽象。16世纪数学家解代数方程时引入复数[1],有了二元数。1800年前后,J. K. F. Gauss等很多杰出数学家都看出复数的几何意义[2],数与二维平面上点对应,数集开始出形象。到1918年,法国数学家P. J. L. Fatou和G. M. Julia研究复数的迭代运算,带来一种数集生成方法,并提出J集(Julia sets)[3], 数集成为研究对象。1975年,B. B. Mandelbrot使用fractal一词发表法文专著《分形对象:形、机遇与维数》[4],1977

收稿日期:2010-10-01;修回日期:2010-12-16

作者简介:杨冠平,教授,研究方向为分形几何、数理逻辑、计算机图形学,电子信箱:yangguanping@msn.com

年出英文版《分形:形状、机遇和维数》[5],1982 年改版《大自然的分形几何学》[6],创立了分形几何学。分形数集自然成为这门学科重要的研究方向和领域。1980 年前后,Mandelbrot 与 R. W. Brooks、J. P. Matelski 分别发现了 M 集(Mandelbrot set)[7]。数集呈显具象,那不规则、不可微、无穷精细、分数维、简因繁果及奇特的自相似等诸多新特性迭出,引起广泛关注。于是探求分形数集特性和规律、寻求新数集、追索形态成因、理解,以及与物质形态的联系等成为研究热点。

数集的二维表现不能令人满足,故而期待真切的三维新特性。三维数集生成须要三元数,19 世纪 W. R. Hamilton 曾研究过这种数,并有四元数的发明,而后来发展应用仅落到向量上[2]。确实,三元数集的采集和形象展示需要海量的运算,只有计算机技术发展成熟,三维分形数集才能被撩开面纱。2007 年 M 旋集面世[8],2009 年 Mandel 球(Mandelbulb)出现[9],新颖的三维分形结构绚丽夺目。笔者尝试用非常规数算法则定义三元数集,发现一些奇特分形现象。2010 年动物形三元数集发表[10],展现了一种形态酷似动物的分形数集。客观的分形世界进一步露出它的似物性。

在分形诸特性中最重要的当属自相似性。起初还以为,分形数集的形态可以千差万别, 而自相似性是万变不离其宗,M 集类型的全集形自相似应算作分形自相似的最高境界。可是,当根据特性和差异对自相似进行分类,才发现已知晓的分形数集并未占全自相似的各种类型,分类表中还缺少一种超越 M 集类型的自相似。这激起更广泛的搜索,终于有新型自相似数集被发现,填补了自相似分类空缺。本文将介绍之。

1　分形自相似和典型实例

自相似性是分形的基本特征,是指部分以某种形式与整体相似,不仅形状相似,而且逐级细分的样式也相似。起初的简单分形,自相似性比较单纯,分形体中自相似形只有一种,形与形相似符合初等几何相似规范。分形图案构画起来容易,只要确定了基形、划分方式和成形规则之三要素,便可逐级构造各层次的局部,直到完成整体分形。例如 Menger 海绵(图 1)等。如此便可以人为创意成形,设计了三要素就决定了一种分形,稍微改变一下三要素就能绘出一种新的分形。

自然分形数集中出现的自相似性就不那么简单了,可谓形态复杂、结构新奇、组分不规整;多种相似形交织在一起,不同层级或有形变;自相似形式出乎人的意料,新数集不乏新的自相似现象。

J 集(Julia set)中的自相似一目了然,相似形或链接成串,或搭构成团, 相似结构从本体始连绵不断延展到细节末梢,见图 2。设定 J 集迭代式中的常数还可以改变数集的形态,所以 J 集千变万化[11]。这是一种客观的自相似,并无造形意志参合。

M 集的自相似展现了另一种范例,数集中稀疏地、星罗棋布地蕴含着全集形子集,子集的相应部位还带有更精细的下一代相似子集,好像数集有全息穴位、有传代规则,把全集

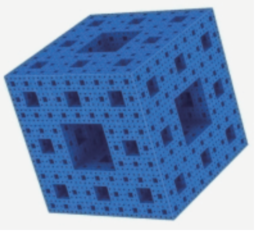


图 1　Menger 海绵

Fig. 1　Menger sponge

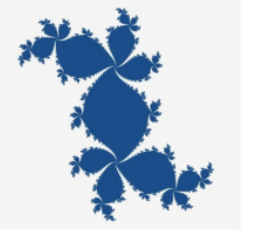


图 2　Julia 集,C=0.26+0.52i

Fig. 2　Julia set, C=0.26+0.52i

的形态和自相似子集的位置一级一级传给了下一代。全集形子集遍布在母体身边的芽枝上,类似树上结着的大大小小的果实[12]。这种自相似现象比 J 集中的更为特殊。图 3 反映 M 集形象和局部自相似子集的形态。

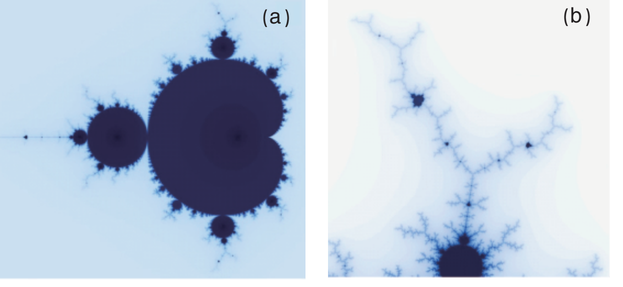


图 3　Mandelbrot 集(a)及其 2 分叉芽枝(b)

Fig. 3　Mandelbrot set (a) and its two-branch sprout (b)

三维分形数集中存在着更形真的自相似。当把复数扩展成的三元数,按 M 集规则取集,最容易得到的是三维的 M 旋集,见图 4(a)。它具有 M 集绕对称轴旋转一周的痕迹所形成的三维体形态。在头前那段直线段上分布着大大小小的整体的微小形象,一旦提高分辨率观察便能看清端倪,图 4(b)便是此区局部放大 2500 倍所见,这是三维自然的自相似表现。比较 M 旋集整体样和子集样,可以明显看出这种分形数集实在的三维自相似结构。

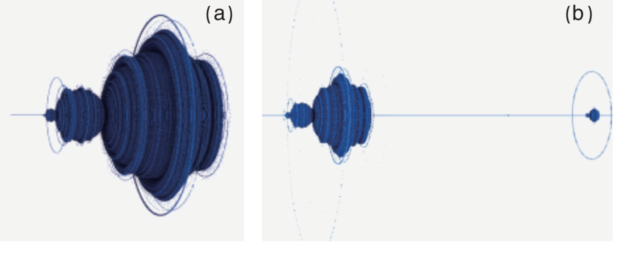


图 4　M 旋集(a)及其自相似子集(b)

Fig. 4　Spinning Mandelbrot set (a) and its self-similar subsets (b)

新近发现的数集 T(动物形数集)更神奇地表现了三维空间的自相似性,整体具有动物形,其鼻尖和两足尖方向的直线段上出现了传代的动物形子集。子集相应部位所带更小的相似子集虽然略有变样,可依然与全集结构相同、形态相似。这种自相似比 M 集、M 旋集的自相似更真切, 更貌似物质存

在。而数集的运算规则也突破了复数 $i^2=-1$ 的传统运算规则。图 5 是动物形数集全集和子集的三维成像,从中可以看出两者的相似与差异。

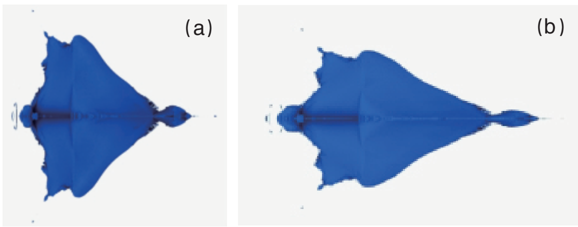


图 5　动物形数集(a)及其自相似子集(b)的背部形象

Fig. 5　Top view of the zoomorphic numbers set (a) and its self-similar subset (b)

从以上数集形象结构可以看出,自相似是有区别的。分形数集越来越多,自相似也各式各样,有必要进行归纳分类。

2　分形自相似基本类型划分

分形自相似性可由集合学表述。如果集合 S 含有与自身相似的子集 S_i,S_i 又含有与自身相似的子集 S_{ij},且如此可以逐层细分下去,称集合 S 具有分形自相似性。一般地,结构中还含有自相似形之外的其余部分 A,A_i,…,则分形自相似可以表示为

$$S=A\bigcup_i S_i \mid S_i=A_i\bigcup_j S_{ij} \mid Ø$$

注:相似符∽的含义不限于初等几何相似,而是广义形态相似,指形状相似,结构类同。

由此,可以根据自相似形是否是全集 Ω 形,所含其余部分是否是空集 Ø,把分形自相似划分为 4 类:

I 类:$S=\Omega, A=Ø$。自相似形是全集形,其余部分是空集。

II 类:$S\neq\Omega, A=Ø$。自相似形不是全集形,其余部分是空集。

III 类:$S=\Omega, A=Ø$。自相似形是全集形,其余部分不是空集。

IV 类:$S\neq\Omega, A\neq Ø$。自相似形不是全集形,其余部分不是空集。

这样,分类恰好由简单到复杂、由一般到特殊把分形自相似排定类序。

I 类自相似比较单纯,人为创意的分形不乏其中,Menger 海绵等明显属于这一类。

II 类自相似在 J 集群中比比皆是,Mandelbulb 中可见三维表现。自相似形可以进一步分割成相似的若干部分,更表现了诸多自相似形的巧妙搭构。

III 类自相似实例还不很多,只能从客观存在的分形数集中遇到。在二维 M 集,三维 M 旋集和动物形数集中存在这类自相似。以全集形作自相似形在数集局部代代相传,必然使这类自相似具有唯一的自相似形,因为全集形唯一,与全集相似的子集统统都相似。III 类自相似现象有点类似生物现象,自相似子集结在各芽枝上符合一棵树结一种果的常理。

前 3 类自相似已都有实例,唯独 IV 类自相似未见端倪。下面数集可补这一空缺。

3　数集 Y 及其形象

定义 1　三元数 $t=xi+yj+zk$ 三分量 x、y、z 取实数,三基量 i、j、k 间乘法规则为

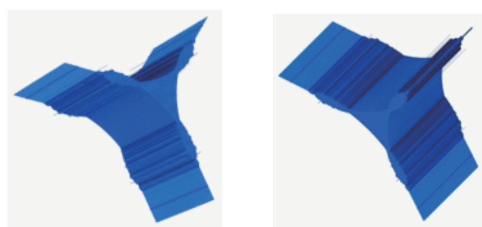
$$ii=i \quad jj=j \quad kk=k$$
$$ij=ji=k \quad ik=ki=j \quad jk=kj=i$$

其他运算规则同复数。

定义 2　三元数集 Y 是所有迭代运算 $f_n=f_{n-1}^2+t$ $(f_0=t, n\to\infty)$模值有界的三元数 t 构成的集合。

$$Y=\{t: |f_n=f_{n-1}^2+t| < r(f_0=t, r\in N, n\to\infty)\}$$

Y 集三维外观如图 6,呈 3 叶片叶轮形,形体也像英文大写字母 Y。图 6 数集采样中心位于(−0.618,−0.618,−0.618),根据样集成像结果估算数集范围半径约为 1.73。几何体斜置在欧氏空间中,中心轴方向(1,1,1),其特征面、线不与坐标轴平行或垂直。3 叶形状相同,叶尖向外直伸。叶边不规则,有条条直棱凸起,显得叶厚超过叶宽。从外形看,Y 集像是平面 3 叶片沿叶面垂直方向平移一个叶长距,由痕迹所形成的空间三维体。



(a) 顶部侧观像　(b) 底部侧观像

(a) Top-lateral view　(b) Bottom-lateral view

图 6　Y 集三维侧观像

Fig. 6　Lateral views of Y set in 3D

过点(0.117277,0.105236,−0.222513),从中心轴垂面(平面法线方向数(1,1,1))上切开 Y 集,得到 3 叶片切面图,见图 7。3 叶片形同,两两夹角相等,应该是 120°对称。同时每个叶片以叶尖中线为准左右对称,叶前端明显带有 M 集的某些特征。叶长与三角形叶心边长大概相等,也与叶尖的延伸长

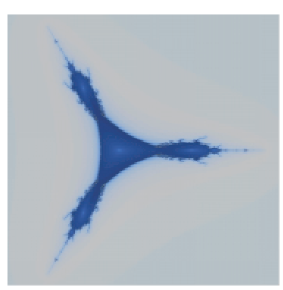


图 7　Y 集 3 叶片形正切面

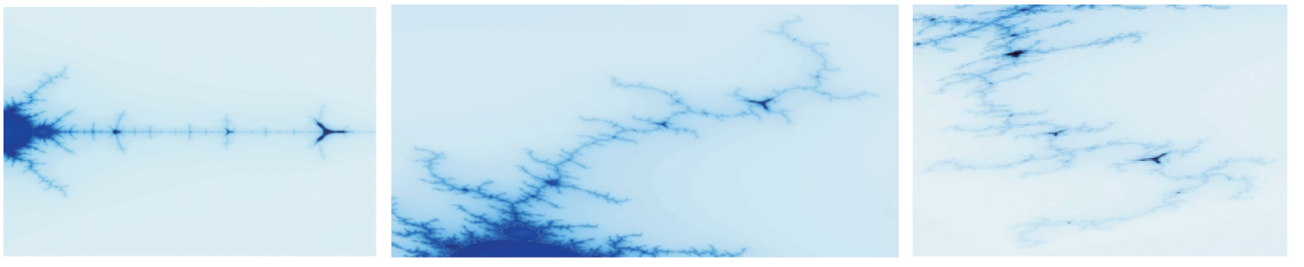
Fig. 7　Normal section image of Y set

度大概相等。

与 M 集类似,Y 集叶边也长满了大小不一、长短不齐的芽枝,芽枝按分叉数多少分层有序排列在叶边,据排列规律可推断:它的所有分叉数对应着全体自然数。明显不同的是,3 叶有 6 个芽枝排列边沿,比 M 集多出 4 个。芽枝也有所变形,显得倾斜拉长,枝梢弯曲前伸,且越靠近中心形变越大,最靠中心的芽枝已面目全非,如同受到一个向心力的作用所致。

4 Y 集特有的自相似现象

Y 集芽枝上也有全集形自相似子集,从图 7 叶尖延伸处已大致看到这类子集的出现,标志着 III 类自相似性的存在。更清晰地,聚焦横向叶片(0.525099,0.524451,-1.049550)处的 1 分叉芽枝、(0.278963,0.471236,-0.750199)处的 2 分叉芽枝和(0.203704,0.372353,-0.576057)处的 3 分叉芽枝见局部切面图(图 8)。新情况出现了,芽枝上结有两种形状的果,一种是 Y 集形子集,另一种是 M 集形子集。探索表明,其他分叉数芽枝的情况均是如此。究其位置规律发现,每一芽枝或杈枝自然分成枝干和枝梢两段,枝干段上的自相似子集都是 M 集形的,枝梢段上的自相似子集才有 Y 集形的。或者说,Y 集的近身区域结 M 集形果,外围区域才结 Y 集形果。这是一个有趣现象。



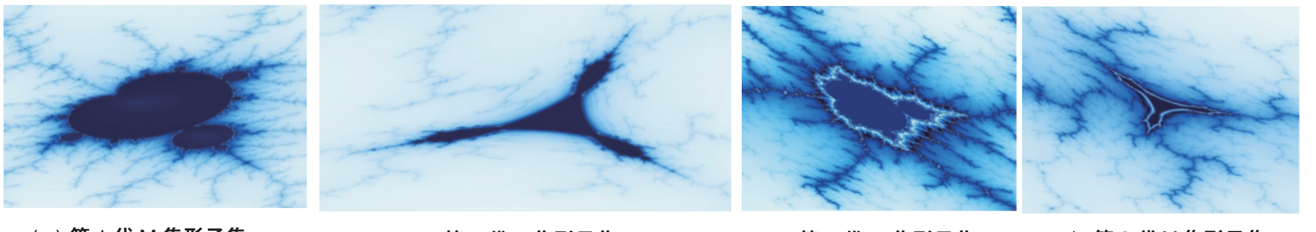
(a) 1 分叉芽枝
(a) Single branch sprout

(b) 2 分叉芽枝
(b) Two-branch sprout

(c) 3 分叉芽枝
(c) Three-branch sprout

图 8　Y 集 1~3 分叉“芽枝”切面形态

Fig. 8　Section images of sprouts from single to three branches of Y set



(a) 第 1 代 M 集形子集
(a) The first generation subset of M set shape

(b) 第 1 代 Y 集形子集
(b) The first generation subset of Y set shape

(c) 第 2 代 M 集形子集
(c) The second generation subset of M set shape

(d) 第 2 代 Y 集形子集
(d) The second generation subset of Y set shape

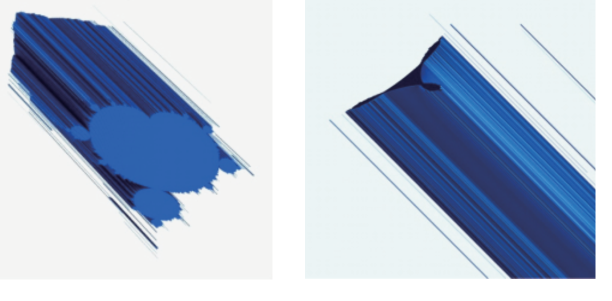
图 9　Y 集两种自相似子集的切面形象

Fig. 9　Section images of two types of self-similar subsets in Y set

为更清晰地看到自相似子集的具体形态,这里针对 2分叉芽枝上的 2 种自相似子集,生成更高分辨率的局部图像,如图 9 所示。此图取自三元数空间(0.278630,0.444476,-0.723106)处的第 1 代 M 集形子集,(0.288816,0.494716,-0.783532)处的第 1 代 Y 集形子集,(0.289488,0.497220,-0.786708)处的第 2 代 M 集形子集,(0.289570,0.497374,-0.786945)处的第 2 代 Y 集形子集。

图 9 所看到的是自相似子集的二维切面形象,而这些子集本也是三维柱体存在,其三维形象可以从图 10 看样。

Y 集有 Y 集形自相似子集,这仿先例,是正常的,属 III 类自相似现象。Y 集含有 M 集形子集,就不同寻常了,一个数集的子集具有另外一个数集的完整形象还未曾遇到过。这是否仍属于自相似还要看其细微结构,如果 M 集形子集中找不到



(a) M 集形子集
(a) M set shape subset

(b) Y 集形子集
(b) Y set shape subset

图 10　Y 集两种自相似子集的三维形象

Fig. 10　3D images of two types of self-similar subsets in Y set

M 集形子集，那 M 集形子集就不能算作自相似；只有在 M 集形子集中含有下一代 M 集形子集，且还能代代相传时，才能表明 M 集形子集具有自相似性。

5　Y 集自相似的传代形式

实际情况是两种形状的子集各含有自己的自相似子集，并且以既定形式代代相传，向精细深处延续发展。这不比一种子集的情况，势必给自相似传代形式增添了复杂性。Y 集形子集含有更小的 Y 集形子集，M 集形子集含有更小的 M 集形子集，均是分形自相似基本条件，也是最简单的传代形式。可是，Y 集形子集是否含有 M 集形子集，M 集形子集是否含有 Y 集形子集，后代中什么情况出现 Y 集形子集，什么情况出现 M 集形子集，就存在多种可能性了。实际情况应该是多种合乎逻辑的可能中最有道理的一种。对 Y 集更广泛细致的探索表明，M 集形子集的后代只有 M 集形的，Y 集形子集的后代同 Y 集本身一样，既有 Y 集形子集，也有 M 集形子集。两种子集在 Y 集形子集芽枝上所处位置也如同 Y 集全集一样，枝干段上是 M 集形子集，枝梢段上是 Y 集形子集。

这样，M 集形子集也成为了自相似集，使得 Y 集不仅具有 III 类自相似性，而且又具有 IV 类自相似性。两种自相似子集在 Y 集中同时出现，又规矩地分布在同一芽枝上，如同一棵树结两种果。

当知道芽枝枝干段和枝梢段的自相似情况差异较大，那么就希望知道两段之间的接合部情况怎样，更希望看到一种子集变成另一种子集的过渡方式。真实状况从图 8 可以看出些眉目，两段的接合部没有特殊标志，但顺着芽枝从根端和末端向接合部走，杈枝长度显然是越来越短，所以大致能判断出两段的分界位置。从深度形态发展可以断定，接合部是个极限点。其位置可以逐渐逼近，坐标精度可以逐步提高，但却不能给出准确坐标位置。就像圆周率等无理数那样，有限精度有近似值，无限精度无确准值。同理，这个位置的三元数应该是三元无理数，对此还没有更多的研究。

6　Y 集的复杂自相似表现

Y 集的自相似终归是自然的，自相似表现十分复杂，不只是多种自相似同时出现那么简单。前文的 III 类、IV 类自相似形还能分离开来，而多数情况是多种多类自相似形混杂纠缠在一起分不开。图 11 是 Y 集(0.344567，0.229549，-0.574117)处局部，相比图 7 已提高放大倍数 4096 倍，本是芽枝小杈局部的自在形态，却显出多样的自相似形交织、复合、浑然一体。从图形看，一个四旋臂涡旋有着深无尽头的涡旋中心，每旋臂由更小的涡旋排列纽结，小涡旋同样是四旋臂，再由更小的下一代涡旋构成，细微深处的结构均是如此，纵深传递着自相似。每一局部结构都能在其成分上找到相似结构，乍看像是 II 类自相似，但具体分析起来，情况多出乎意料。单从旋臂上涡旋间的连接部分看，有两涡旋通过旋臂末梢牵手的；有两涡旋挽臂触接，接合部结出 M 集形子集的；还有多涡旋交接在一起，接合部出现另类结构的。每个涡旋都有自己的涡旋中心，每条旋臂上还周期地另外长出相似的涡旋串。每种情况都能形成自相似，而这里多样自相似情况同时出现，互相包含、牵连、交结成复杂现象。

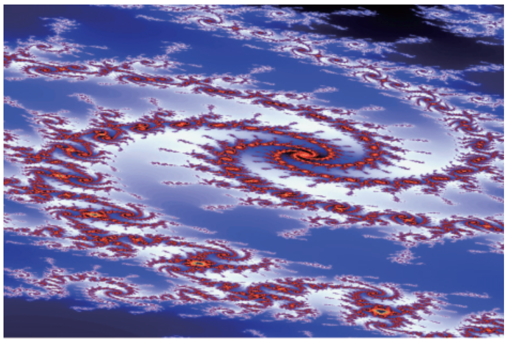


图 11　Y 集复杂自相似表现

Fig. 11　Complex behavior of self-similarity in Y set

7　讨论

7.1　5 种分形数集数算差别对比

分形数集的形态和自相似表现不同，定有其原因。形式上数集和形态的成因并不会头绪纷繁，直接因素显然应归结到数和数集的定义上。把这 5 种数集定义展开放一起比较，除去三元数表达形式和数集取集方式相同外，浮现两点不同之处：数算规则和迭代函数。表 1 给出了 J 集、M 集、M 旋集、T 集和 Y 集数算差别的对比。

导致数集形态和自相似表现迥异的因素可以对比出来。M 集和 J 集比较，数算规则相同而迭代函数有异，仅是迭代常数项不同，造成 M 集具有而 J 集不具有 III 类自相似性。说明 III 类自相似现象与迭代函数有关。Y 集和 T 集比较，迭代函

表 1　5 种分形数集数算差别对比表

Table 1　Comparison of the number operating rules of five fractal numbers sets

	J 集	M 集	M 旋集	T 集	Y 集
三元数	$t=xi+yj+0k$	$t=xi+yj+0k$	$t=xi+yj+zk$	$t=xi+yj+zk$	$t=xi+yj+zk$
基乘规则	$ii=i$, $jj=-i$, $ij=ji=j$	$ii=i$, $jj=-i$, $ij=ji=j$	$ii=i$, $jj=-i$, $kk=-i$, $ij=ji=j$, $ik=ki=k$, $jk=-kj=i$	$ii=i$, $jj=j$, $kk=k$, $ij=ji=k$, $ik=ki=j$, $jk=kj=-i$	$ii=i$, $jj=j$, $kk=k$, $ij=ji=k$, $ik=ki=j$, $jk=kj=i$
迭代函数	$f_n=f_{n-1}^2+c$	$f_n=f_{n-1}^2+t$	$f_n=f_{n-1}^2+t$	$f_n=f_{n-1}^2+t$	$f_n=f_{n-1}^2+t$
迭代初值	$f_0=t$	$f_0=t$	$f_0=t$	$f_0=t$	$f_0=t$

数相同而数算规则有异,仅是三元数基量乘法规则中相差一个负号,造成 Y 集具有而 T 集不具有Ⅳ类自相似性。说明 IV 类自相似现象与数算规则有关。

7.2　分形数集或许存在自相似趋向性

一个静态确定性数集有且只有一种形态,如果包含有两种以上形态的子集,那就会对其自相似性形成考验。以 Y 集为例,Y 集已经含有 Y 集形子集和 M 集形子集,那么,Y 集形子集可包含或者不包含 Y 集形子集或者 M 集形子集,M 集形子集也可包含或者不包含 Y 集形子集或者 M 集形子集,排列组合各种可能的情况,共有 16 种可能。而其中 14 种要么 Y 集形子集中不包含 Y 集形子集,要么 Y 集形子集中不包含 M 集形子集,要么 M 集形子集中不包含 M 集形子集,这些情况都会破坏 Y 集形子集或者 M 集形子集的自相似性。只有两种情况能够使得 Y 集形和 M 集形都是 Y 集的自相似形,Y 集的实际情况正是两种情况之一种。另一种情况是两种子集的每一种也都含有两种子集,但那还要对两种子集安排恰当位置,以使自相似有规则能传递,局面必然更复杂。要取最简单形式,又要保证两子集都能形成自相似,只好是 Y 集现有的这个结果。所以惊叹 Y 集自相似的巧妙安排,推测分形数集或有自相似的趋向性。

7.3　自相似现象与生物现象有可比性

M 集的 III 类自相似现象可比一棵树结一种果,而 Y 集的 III 类和 IV 类自相似子集分布在同一芽枝上,则可比作一棵树结两种果。后者现象若非人工嫁接,在植物界也是罕见的,出现在数集中,数学对此还无法解释。

若按一种数集中含有另一种形的自相似子集,在生物世界也可以找到可比之现象。蛙类等两栖动物的幼虫与成虫形态差异就很大,生物学以进化与返祖来解释。那么蛙类后代不同时段有形态差别相比 Y 集子集不同区段有形态差别,是否也可以类比出 M 集与 Y 集有特定的内在联系?或者能否说明生物规律与数学规律也有一定的相向性?

8　结论

根据自相似形是否是集合全集形和其余部分是否是空集对自相似进行分类是合适的、完全的,4 种类型由简到繁、由普遍到特殊把自相似完整分类,其顺序也吻合各类被发现的顺序。Y 集作新类型补填空缺后,各类型实例已能配齐。

分形数集的特性之一是简单规则生成复杂形体,更深一步可以确认,不仅函数与运算规则的小差别可以导致数集形态的大差别,而且又可以导致自相似性的大差别。现在已经可以肯定:III 类自相似现象与迭代函数有关,IV 类自相似现象与数算规则有关。

M 旋集、T 集和 Y 集都是三元数集,且迭代函数相同。所不同的是数算规则。M 旋集沿用 $i^2=-1$ 之传统规则,T 集和 Y 集突破该传统新定义规则,结果 M 旋集不新奇,而 T 集和 Y 集能表现不寻常的新异特性。所以,起因偏差大者新特性明显,这一点分形数集不例外。

分形数集不仅形态复杂多样,它的自相似性也是复杂多样的。IV 类自相似分形数集浮现出来更说明这一点,多种多类自相似纠结在一起的现象离我们所掌握的迭代函数和数算规则差异所能解释的还相当遥远。一个数集不仅把自己的全集形作自相似形,还把其他数集的全集形做自己的自相似形,这样的珍稀实例也是客观存在的。在 IV 类自相似传代形式的诸多可能中,Y 集客观选定的形式恰是最简单而又能保证自相似完整的那一种,这又见证自然规律之巧妙安排。

参考文献(References)

[1] 余家荣. 复数 [M]//华罗庚, 苏步青, 等. 中国大百科全书: 数学. 北京: 中国大百科全书出版社, 1988: 226–227.
Yu Jiarong. Complex number [M]//Hua Luogeng, Su Buqing, *et al*. Chinese Encyclopaedia: Mathematics. Beijing: Chinese Encyclopaedia Publishing Company, 1988: 226–227.

[2] 莫里斯·克莱因. 古今数学思想: 第 3 册 [M]. 万伟勋, 石生明, 孙树本, 等译. 上海: 上海科学技术出版社, 2002: 1–8, 169–196.
Kline M. Mathematical thought from ancient to modern times [M]. Wan Weixun, Shi Shengming, Sun Shuben, *et al* tran. Shanghai: Shanghai Science & Technology Publishing Company, 2002: 1–8, 169–196.

[3] Julia G. Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles [J]. *Journal de Mathématiques Pures et Appliqués*, 1918, 8(1): 47–245.

[4] Mandelbrot B B. Les objets fractals: Forme, hasard et dimension [M]. Paris: Flammarion, 1975.

[5] Mandelbrot B B. Fractals: Form, chance and dimension[M]. New York: W H Freeman & Co, 1977.

[6] Mandelbrot B B. The fractal geometry of nature [M]. New York: W H Freeman & Co, 1982.

[7] Horgan J. Who discovered the Mandelbrot set[R/OL]. [2009-03-13]. http://www.scientifcamerican.com/article.cfm.

[8] 杨冠平. 一种神奇的三维数学体[J]. 科学中国, 2007(8): 19–23.
Yang Guanping. *Scientific China*, 2007(8): 19–23.

[9] White D. The unravelling of the real 3D Mandelbulb[EB/OL]. [2009-11-08]. http://www.skytopia.com/project/fractal/mandelbulb.html.

[10] 杨冠平. 发现一种动物形三元数集[J]. 科技导报, 2010, 28(3): 19–23.
Yang Guanping. *Science & Technology Review*, 2010, 28(3): 19–23.

[11] Falconer K. Fractal geometry mathematical foundations and applications [M]. 2nd ed. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2003: 227–235.

[12] Mandelbrot B B. Fractal and chaos: The Mandelbrot set and beyond[M]. New York: Springer-Verlag Inc, 2004: 9–136.

(责任编辑　朱宇)