

## 内凹角型负泊松比蜂窝结构力学性能研究

郑战光<sup>1</sup> 陈俊翔<sup>1</sup> 孙腾<sup>1,2</sup> 谢昌吉<sup>1</sup> 黄增<sup>1,3</sup>

(1. 广西大学 机械工程学院 广西高校现代设计与先进制造重点实验室, 南宁 530004)

(2. 北部湾大学 机械与船舶海洋工程学院, 钦州 535011)

(3. 广西机电职业技术学院 先进制造技术学院, 南宁 530007)

**摘要:** 负泊松比结构由于具有优异的力学性能而广泛应用于各工程领域。将星形蜂窝结构与内凹结构相结合, 提出了一种新型内凹角型负泊松比蜂窝结构。首先, 基于对称性将胞元结构简化分析, 利用能量法对该结构的泊松比和等效弹性模量解析式进行推导。其次, 采用Abaqus有限元软件对该结构竖直方向压缩力学性能进行研究, 将数值模拟结果与理论计算结果比较分析, 验证了解析表达式的准确性。最后, 讨论了胞元结构的不同几何参数对结构等效泊松比和等效弹性模量变化的影响, 并将该结构的等效力学性能与常规星形蜂窝结构进行了对比分析。结果表明, 该结构具有良好的负泊松比特性, 并且通过改变几何参数的大小, 可以对结构的等效力学性能进行调整。研究结果可为新型负泊松比超材料的设计提供一定的参考。

**关键词:** 内凹角型蜂窝结构; 能量法; 胞元结构; 力学性能; 负泊松比

**中图分类号:** TB122 **DOI:** 10.16579/j.issn.1001.9669.2025.07.017

## 0 引言

负泊松比材料不同于常规物理性质的材料, 它具有当纵向拉伸时横向产生膨胀的独特拉胀特性<sup>[1-2]</sup>。具有负泊松比效应的超材料拥有高刚度和高强度<sup>[3]</sup>、负热膨胀<sup>[4]</sup>等独特的力学性能以及高可设计性、轻量化等能力<sup>[5-6]</sup>, 因此在航空航天、车辆船舶、机器人以及国防领域都得到了广泛应用。

由于负泊松比超材料具有优异的力学性能, 为了使其能够实现人为设计, GIBSON等<sup>[7]</sup>在1982年研究发现了具有负泊松比特性的二维内凹六边形结构, 并将其命名为内凹蜂窝结构。

YANG等<sup>[8]</sup>通过微极弹性理论, 研究了内凹蜂窝结构中胞元结构的几何参数对泊松比的影响。侯秀慧等<sup>[9]</sup>在内凹六边形蜂窝结构的基础上进行改良, 提出了一种具有更优异抗冲击特性的多凹角型负泊松比蜂窝结构。随着负泊松比材料的快速发展, 越来越多新型结构(如星形结构<sup>[10]</sup>、手性模型<sup>[11]</sup>、褶皱类及折纸类结构<sup>[12]</sup>等)被提出。国内外学者通过对各类新型结构进行研究, 设计出很多具有创新性的负泊松比蜂窝结构。

在经典的负泊松比结构中, 星形结构由于其良好的性能, 受到众多相关学者的研究。THEOCARIS等<sup>[13]</sup>在1997年首次研究发现星形内凹结构, 通过数值

均质化方法, 研究了胞元结构不同内凹角与泊松比之间的变化关系。DOS等<sup>[14]</sup>对星形结构的变形机制与力学性能进行研究, 在此基础上将获得的结构均质模量与有限元模拟进行比较, 结果表明预测的有效机械行为具有非常好的精度。AI等<sup>[15]</sup>设计了3种结构不同的负泊松比星形结构, 利用卡氏第二定理, 分别对其结构的等效泊松比及等效弹性模量解析式进行推导, 得到了胞元结构的几何参数与等效力学性能之间的影响规律。由于常规星形结构受到拉压时应力过于集中, 刘海涛等<sup>[16]</sup>在此基础上将杆改为弧形构件, 设计了一种新型负泊松比结构, 研究了结构几何参数对泊松比变化的影响, 通过调节相关参数能够很好地处理应力集中的现象。GONG等<sup>[17]</sup>在已有的负泊松比星形结构基础上进行改良, 提出了一种新型的零泊松比结构, 该结构可通过抑制未发生变形方向的泊松比来提升结构的稳定性。通过将星形蜂窝结构与其他形状相结合, 卢子兴等<sup>[18]</sup>提出了一种箭头形状的星形蜂窝结构, 分别设定不同条件对该结构进行有限元模拟分析, 得到了该结构的3种变形模式。为获得具有较高能量吸收能力的蜂窝结构, WANG等<sup>[19]</sup>在传统星形蜂窝结构基础上加入菱形结构, 提出了3种星形-菱形负泊松比结构, 通过有限元分析证明了加入菱形部分的结构具有更强承载能力和吸能能力。韩广等<sup>[20]</sup>对传统负泊松

收稿日期: 2023-12-23 修回日期: 2024-02-05

基金项目: 国家自然科学基金项目(52265018, 51675110); 广西自然科学基金项目(2021GXNSFAA220119); 柳州市科技计划项目(2022ABA0101)

作者简介: 郑战光, 男, 1975年生, 江西抚州人, 博士, 教授, 博士研究生导师; 主要研究方向为机械强度理论; E-mail: zhenglight@126.com。

引用格式: 郑战光, 陈俊翔, 孙腾, 等. 内凹角型负泊松比蜂窝结构力学性能研究[J]. 机械强度, 2025, 47(7): 135-143.

ZHENG Zhanguang, CHEN Junxiang, SUN Teng, et al. Study on mechanical property of internal concave angle honeycomb structure with negative Poisson ratio[J]. Journal of Mechanical Strength, 2025, 47(7): 135-143.

比星形结构进行改进设计,得到了一种内凹斜十字结构,并对其等效泊松比和等效弹性模量理论表达式进行推导,研究了该结构几何参数对等效力学性能的影响规律。ZHANG等<sup>[21]</sup>通过将蝶形结构与星形结构相结合,设计了一种新型的膨胀蝶形蜂窝结构,实现了负泊松比特性以及平面内刚度的耦合改善。LI等<sup>[22]</sup>对传统星形蜂窝结构进行改良,设计了一种力学性能优异的蜂窝结构,该结构可应用于提升船舶结构的稳定性。综上所述,经典的负泊松比结构及其混合结构的力学性能受到国内外众多学者的广泛研究,故通过对传统的负泊松比结构进行改良设计,使其具有更加优异的力学性能在实际应用中具有重要的意义。

本文将内凹蜂窝结构与星形结构相结合,提出一种在竖直方向上具有负泊松比特性的内凹角型负泊松比蜂窝结构。利用材料力学中的能量法和卡氏第二定理,计算该新型结构在弹性变形下的等效泊松比和等效弹性模量理论表达式。同时,采用有限元仿真对内凹角型负泊松比蜂窝结构进行竖直方向压缩力学性能分析,并给出结构的等效泊松比和等效弹性模量在不同几何参数下的变化规律。在此基础上还对对比分析内凹角型负泊松比蜂窝结构与常规星形负泊松比蜂窝结构等效力学性能之间的差异。

## 1 理论模型

### 1.1 内凹角型负泊松比蜂窝结构设计

内凹角型负泊松比蜂窝结构的胞元由1个内凹角型结构和4根连杆构成,代表胞元具有垂直对称性,如图1所示。其中, $L_x$ 为内凹角型蜂窝结构胞元整体长度; $L_y$ 为结构胞元整体高度; $L_1$ 为胞元斜杆 $CB$ 、 $CD$ 的长度; $L_2$ 为胞元斜杆 $AB$ 的长度; $L_3$ 为胞元4根连杆的长度; $\theta_1$ 为胞元连杆 $CH$ 与斜杆 $CB$ 、 $CD$ 的夹角; $\theta_2$ 代表胞元连杆 $AG$ 与斜杆 $AB$ 的夹角。壁杆横截面为矩形,胞元壁杆的厚度为 $t$ ,内凹角型负泊松比蜂窝结构的整体厚度为 $b$ 。

在内凹角型负泊松比蜂窝结构参数设计时,需防止胞元相连壁杆出现接触及相交的情况,也为避免结构参数过于趋近临界值而导致误差,因此设置下列约束,即

$$100^\circ < \theta_1 + \theta_2 \quad (1)$$

$$L_2 \cos \theta_2 < 2L_1 \sin \theta_1 \quad (2)$$

$$L_1 \cos \theta_1 < L_2 \sin \theta_2 \quad (3)$$

由于内凹角型负泊松比蜂窝结构是 $Y$ 轴对称结构,所以其胞元结构体积 $V_1$ 为

$$V_1 = [2(L_3 + L_2 \sin \theta_2 - L_1 \cos \theta_1) \cdot (2L_3 - L_2 \cos \theta_2 + 2L_1 \sin \theta_1)]b \quad (4)$$

不考虑胞元结构中各壁杆连接处的损失,其材料体积 $V_2$ 为

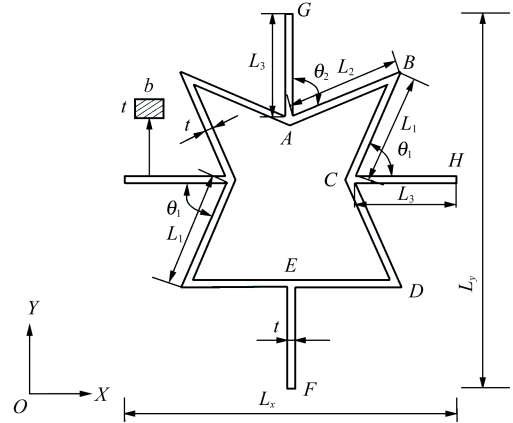


图1 内凹角型负泊松比蜂窝结构胞元

Fig. 1 Cellular of the internal concave angle negative Poisson ratio honeycomb structure

$$V_2 = [2t(2L_1 + L_2 + L_2 \sin \theta_2 + 2L_3)]b \quad (5)$$

因此,可计算出内凹角型负泊松比蜂窝结构的密度为

$$\rho^* = \frac{V_2 \rho}{V_1} \quad (6)$$

式中, $\rho$ 为内凹角型负泊松比蜂窝结构材料密度。

根据胞元结构密度以及结构材料的密度可计算出结构的相对密度。因此,内凹角型负泊松比蜂窝结构的相对密度为

$$\rho_s = \frac{\rho^*}{\rho} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{2t(2L_1 + L_2 + L_2 \sin \theta_2 + 2L_3)}{[2(L_3 + L_2 \sin \theta_2 - L_1 \cos \theta_1) \cdot (2L_3 - L_2 \cos \theta_2 + 2L_1 \sin \theta_1)]} \quad (7)$$

### 1.2 内凹角型负泊松比蜂窝结构静力分析

对整体胞元结构在 $Y$ 轴方向上的直杆连接点 $G$ 、 $F$ 处施加竖直方向的集中载荷,如图2(a)所示。由于受到载荷作用,胞元结构中各杆会产生3种变形,分别为弯曲、剪切和拉压变形。

由于该胞元结构中各壁杆均为细长杆,相较于弯曲应变能,杆件由剪切和拉压变形所产生的应变能很小,所以,通过能量法分析结构位移时,可忽略剪切和拉压变形,只考虑胞元结构各壁杆之间的弯曲应变<sup>[23]</sup>。对胞元结构进行力学分析时将连杆视为刚性杆,直接对胞元主体内凹角型结构进行研究,胞元结构承受对称载荷作用在 $A$ 、 $E$ 处。基于能量法,对内凹角型负泊松比蜂窝结构进行力学分析。

由于内凹角型负泊松比蜂窝结构为 $Y$ 轴对称结构,所以选取胞元结构的1/2模型进行研究,其中,在点 $A$ 的 $X$ 方向上剪力为0。在点 $A$ 施加集中载荷 $F_y$ 和弯矩 $M_0$ ,受力分析如图2(b)所示,并且将点 $E$ 作为固定端约束。由于对称性,可计算得到集中载荷 $F_y = P/2$ 。根据力矩平衡可得 $AB$ 、 $BC$ 、 $CD$ 、 $DE$ 4根杆上的弯矩分别为

$$M_{AB}(x) = F_y x \sin \theta_2 - M_0, x \in [0, L_2] \quad (8)$$

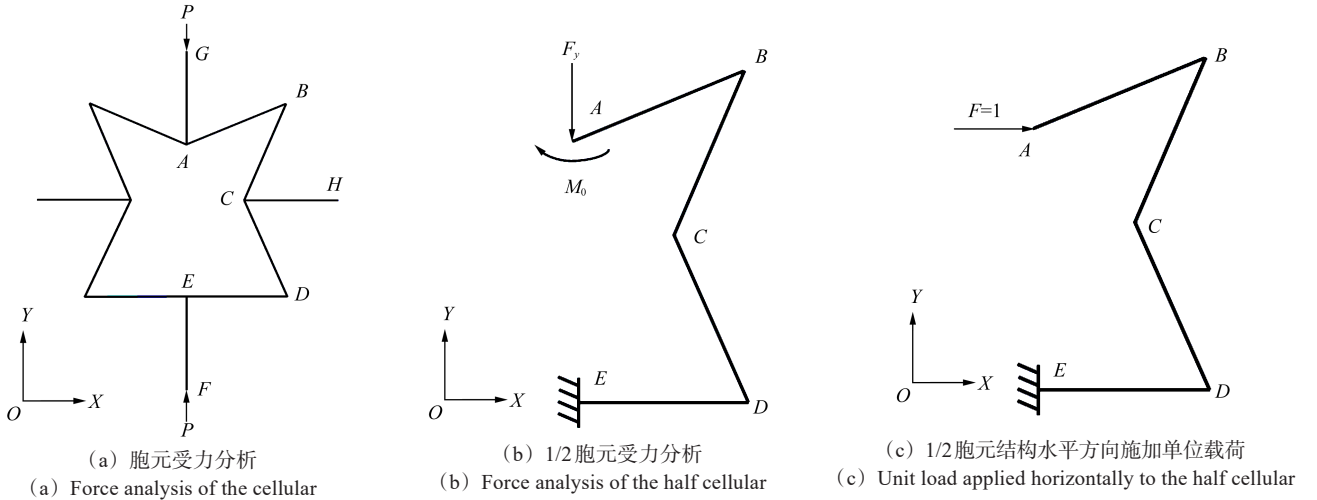


图 2 内凹角型负泊松比蜂窝结构胞元静力分析

Fig. 2 Static analysis of the cellular of the internal concave angle negative Poisson ratio honeycomb structure

$$M_{BC}(x) = F_y(L_2 \sin \theta_2 - x \cos \theta_1) - M_0, x \in [0, L_1] \quad (9)$$

$$M_{CD}(x) = F_y(L_2 \sin \theta_2 - L_1 \cos \theta_1 + x \cos \theta_1) - M_0, x \in [0, L_1] \quad (10)$$

$$M_{DE}(x) = F_y(L_2 \sin \theta_2 - x) - M_0, x \in [0, L_2 \sin \theta_2] \quad (11)$$

根据材料力学中变形协调的概念,将点 A 处水平面内转角为零作为变形协调条件,基于这一条件建立变形协调方程可求得未知弯矩  $M_0$ 。端点 A 处旋转角

$$\delta_{11} = \int_0^{L_2} \frac{\overline{M}_{AB}(x) \overline{M}_{AB}(x)}{EI} dx + \int_0^{L_1} \frac{\overline{M}_{BC}(x) \overline{M}_{BC}(x)}{EI} dx + \int_0^{L_1} \frac{\overline{M}_{CD}(x) \overline{M}_{CD}(x)}{EI} dx + \int_0^{L_2 \sin \theta_2} \frac{\overline{M}_{DE}(x) \overline{M}_{DE}(x)}{EI} dx = \frac{1}{EI} (2L_1 + L_2 + L_2 \sin \theta_2) \quad (13)$$

$$\Delta_{1F} = \int_0^{L_2} \frac{M_{AB}(x) \overline{M}_{AB}(x)}{EI} dx + \int_0^{L_1} \frac{M_{BC}(x) \overline{M}_{BC}(x)}{EI} dx + \int_0^{L_1} \frac{M_{CD}(x) \overline{M}_{CD}(x)}{EI} dx + \int_0^{L_2 \sin \theta_2} \frac{M_{DE}(x) \overline{M}_{DE}(x)}{EI} dx = \frac{F_y}{2EI} (2L_1^2 \cos \theta_1 - 4L_1 L_2 \sin \theta_2 - L_2^2 \sin^2 \theta_2 - L_2^2 \sin \theta_2) \quad (14)$$

式中,  $M(x)$  为胞元结构受到集中载荷  $F_y$  作用时各壁杆的弯矩;  $\overline{M}(x)$  为胞元结构受到单位弯矩作用时各壁杆的弯矩。

根据  $\delta_{11}$  和  $\Delta_{1F}$  可计算出  $M_0$  为

$$M_0 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{F_y}{2} T \quad (15)$$

式中,

$$\Delta_{YF} = \int_0^{L_2} \frac{M_{AB}(x)}{EI} \frac{\partial M_{AB}(x)}{\partial F_y} dx + \int_0^{L_1} \frac{M_{BC}(x)}{EI} \frac{\partial M_{BC}(x)}{\partial F_y} dx + \int_0^{L_1} \frac{M_{CD}(x)}{EI} \frac{\partial M_{CD}(x)}{\partial F_y} dx + \int_0^{L_2 \sin \theta_2} \frac{M_{DE}(x)}{EI} \frac{\partial M_{DE}(x)}{\partial F_y} dx = \frac{F_y}{12EI} [4L_2^3 \sin^3 \theta_2 + \sin^2 \theta_2 (4L_2^3 + 24L_1 L_2^2 - 6TL_2^2) + (3T^2 L_2 - 6TL_2^2 - 24TL_1 L_2) \sin \theta_2 + \cos \theta_1 (8L_1^3 \cos \theta_1 - 24L_1^2 L_2 \sin \theta_2 + 12TL_1^2) + 6T^2 L_1 + 3T^2 L_2] \quad (17)$$

根据单位载荷法可计算出 1/2 胞元结构在 X 轴方向的位移  $\Delta_{YX}$ 。如图 2(c) 所示,在点 A 的 X 方向上单独施加大小为 1 的单位载荷。根据胞元结构各壁杆

为零的变形协调方程为

$$\delta_{11} M_0 + \Delta_{1F} = 0 \quad (12)$$

式中,  $\delta_{11}$  为点 A 受到单位弯矩作用时,水平面内产生的转角大小;  $\Delta_{1F}$  为点 A 仅受到集中载荷  $F_y$  作用时,水平面内产生的转角大小。

根据结构力学中力法的相关概念,  $\delta_{11}$ 、 $\Delta_{1F}$  的计算式分别为

$$T = \frac{L_2^2 \sin^2 \theta_2 + L_2^2 \sin \theta_2 + 4L_1 L_2 \sin \theta_2 - 2L_1^2 \cos \theta_1}{2L_1 + L_2 + L_2 \sin \theta_2} \quad (16)$$

根据式(15),可以计算出 1/2 胞元结构各壁杆在集中载荷  $F_y$  和弯矩  $M_0$  共同作用下,任意横截面上的弯矩。由于内凹角型负泊松比蜂窝结构关于 Y 轴对称,根据卡氏第二定理,胞元结构在 Y 轴方向的位移  $\Delta_{YF}$  为胞元结构的 1/2 模型应变能关于 Y 轴集中载荷  $F_y$  的偏导,其表达式为

同时受到集中载荷  $F_y$  和弯矩  $M_0$  时的弯矩  $M_1(x)$ ,以及仅受到 X 方向单位载荷作用时的弯矩  $\overline{M}_1(x)$ ,可求得  $\Delta_{YX}$  为

$$\Delta_{YX} = \int_0^{L_2} \frac{M_{AB}(x) \overline{M}_{AB}(x)}{EI} dx + \int_0^{L_2 \frac{\cos \theta_2}{\sin \theta_1}} \frac{M_{BC}(x) \overline{M}_{BC_1}(x)}{EI} dx + \int_{L_2 \frac{\cos \theta_2}{\sin \theta_1}}^{L_1} \frac{M_{BC}(x) \overline{M}_{BC_2}(x)}{EI} dx + \int_0^{L_1} \frac{M_{CD}(x) \overline{M}_{CD}(x)}{EI} dx + \int_0^{L_2 \sin \theta_2} \frac{M_{DE}(x) \overline{M}_{DE}(x)}{EI} dx = \frac{F_y}{12EI} \{ (12L_1L_2^2 \sin \theta_1 - 6L_2^3 \cos \theta_2) \sin^2 \theta_2 + \sin \theta_2 (24L_1^2L_2 \sin \theta_1 - 12L_1L_2^2 \sin \theta_1 - 12TL_1L_2 \sin \theta_1 + 6TL_2^2 \cos \theta_2 + 4L_2^3 \cos \theta_2) + \cos \theta_1 [6L_1^2L_2 \cos \theta_2 + 2L_2^3 (\cos^3 \theta_2 / \sin^2 \theta_1) - 12L_1^3 \sin \theta_1] + (6TL_1L_2 - 3TL_2^2) \cos \theta_2 - 12TL_1^2 \sin \theta_1 \} \quad (18)$$

根据 1/2 胞元结构受到压缩时 X、Y 方向上的位移大小  $\Delta_{YX}$ 、 $\Delta_{YY}$ ，可求得胞元结构在 X 方向上的应变  $\varepsilon_x$ 、Y 方向上的应变  $\varepsilon_y$  和应力  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$  分别为

$$\varepsilon_x = \Delta_{YX} / (L_3 + L_2 \sin \theta_2 - L_1 \cos \theta_1 + t/2) \quad (19)$$

$$\varepsilon_y = \Delta_{YY} / (2L_3 + 2L_1 \sin \theta_1 - L_2 \cos \theta_2) \quad (20)$$

$$\nu_{yx} = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} = -(2L_3 + 2L_1 \sin \theta_1 - L_2 \cos \theta_2) \cdot \{ \sin^2 \theta_2 (12L_1L_2^2 \sin \theta_1 - 6L_2^3 \cos \theta_2) + \sin \theta_2 (24L_1^2L_2 \sin \theta_1 - 12L_1L_2^2 \sin \theta_1 - 12TL_1L_2 \sin \theta_1 + 6TL_2^2 \cos \theta_2 + 4L_2^3 \cos \theta_2) + \cos \theta_1 [6L_1^2L_2 \cos \theta_2 + 2L_2^3 (\frac{\cos^3 \theta_2}{\sin^2 \theta_1}) - 12L_1^3 \sin \theta_1] + (6TL_1L_2 - 3TL_2^2) \cos \theta_2 - 12TL_1^2 \sin \theta_1 \} / \{ (L_3 + L_2 \sin \theta_2 - L_1 \cos \theta_1 + t/2) \cdot [4L_2^3 \sin^3 \theta_2 + \sin^2 \theta_2 (4L_2^3 + 24L_1L_2^2 - 6TL_2^2) + \sin \theta_2 (3T^2L_2 - 6TL_2^2 - 24TL_1L_2) + \cos \theta_1 (12TL_1^2 + 8L_1^3 \cos \theta_1 - 24L_1^2L_2 \sin \theta_2) + 6T^2L_1 + 3T^2L_2] \} \quad (22)$$

$$E_y = \frac{\sigma_y}{\varepsilon_y} = [12EI(2L_3 + 2L_1 \sin \theta_1 - L_2 \cos \theta_2)] / \{ b(L_3 + L_2 \sin \theta_2 - L_1 \cos \theta_1 + t/2) \cdot [4L_2^3 \sin^3 \theta_2 + \sin^2 \theta_2 (4L_2^3 + 24L_1L_2^2 - 6TL_2^2) + \sin \theta_2 (3T^2L_2 - 6TL_2^2 - 24TL_1L_2) + \cos \theta_1 (8L_1^3 \cos \theta_1 - 24L_1^2L_2 \sin \theta_2 + 12TL_1^2) + 6T^2L_1 + 3T^2L_2] \} \quad (23)$$

## 2 有限元仿真分析

为验证内凹角型负泊松比蜂窝结构等效力学性能解析表达式的正确性，采用 Abaqus 有限元仿真软件对该结构进行有限元模拟，模拟过程中蜂窝结构选用的金属铝材料属性如表 1 所示。

表 1 铝的材料属性

Tab. 1 Material properties of aluminum

密度 Density $\rho / (\text{kg}/\text{m}^3)$	弹性模量 Elasticity modulus $E / \text{GPa}$	泊松比 Poisson ratio $\nu$	屈服应力 Yield stress $\sigma_s / \text{MPa}$
2 700	69	0.33	76

将内凹角型负泊松比蜂窝结构胞元沿 X、Y 方向通过周期性排列，建立 3×3 阵列的周期性蜂窝结构模型进行数值分析。蜂窝结构的整体厚度设置为  $b = 5 \text{ mm}$ ，胞元壁杆厚度设置为  $t = 2 \text{ mm}$ 。为保证在模拟过程中蜂窝结构两端受力均匀，在结构底部与顶部分别设置一块厚度均为 1 mm 的矩形刚性板，将蜂窝结构置于两刚性板之间，建立如图 3 所示的内凹角型负泊松比蜂窝结构有限元模型。在模拟过程中，蜂窝结构采用 S4R 壳单元进行网格划分，上、下刚性板材料选择钢，密度为  $7 800 \text{ kg}/\text{m}^3$ ；弹性模量为 210 GPa；泊松比为 0.3。采用 R3D4 单元对其进行网格划分，同时对所划分网格进行收敛性分析，以确保网格密度能够满足计算精度所需。考虑到有限元计算过程中结构可能产生的接触行为，蜂窝结构与矩形刚性板的接触方式设置为表面与表面接触，将摩擦因数设置为 0.2；将蜂窝

$$\sigma_y = \frac{F_y}{b(L_3 + L_2 \sin \theta_2 - L_1 \cos \theta_1 + t/2)} \quad (21)$$

由式(19)~式(21)可得，内凹角型负泊松比蜂窝结构在竖直方向上受到压缩时，结构等效泊松比  $\nu_{yx}$  和等效弹性模量  $E_y$  分别为

结构内部各胞元之间接触方式设置为通用接触，且接触表面无摩擦。

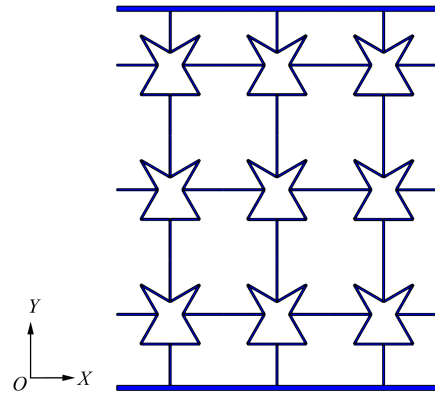


图 3 内凹角型负泊松比蜂窝结构有限元模型

Fig. 3 Finite element model of the honeycomb structure with the negative Poisson ratio of the inter concave angle

在弹性变形范围内，对内凹角型负泊松比蜂窝结构竖直方向进行压缩，其边界条件设置为：蜂窝结构底部与下刚性板完全约束，对上端刚性板施加竖直向下 1 MPa 的均布载荷进行压缩，同时约束蜂窝结构 Z 方向的位移，确保结构只在 XOY 平面内产生变形。在这些边界条件下，结构是静定的，整个结构的刚体平移和旋转受到充分的限制，为了避免超约束和超静定的情况，不需要限制其他旋转自由度。

图 4 所示为有限元模拟后处理结果。如图 4 所示，浅色图形为蜂窝结构模型的未变形图，深色图形为结构受到竖直方向压缩后的变形图。其中， $L$  为蜂窝结构 X 方向的原长； $L'$  为结构受到竖直方向压缩，X

方向变形后的长度。由图4能够明显看出,内凹角型负泊松比蜂窝结构在竖直方向上受到压缩时,其结构X方向上长度减小,产生明显的负泊松比效应。

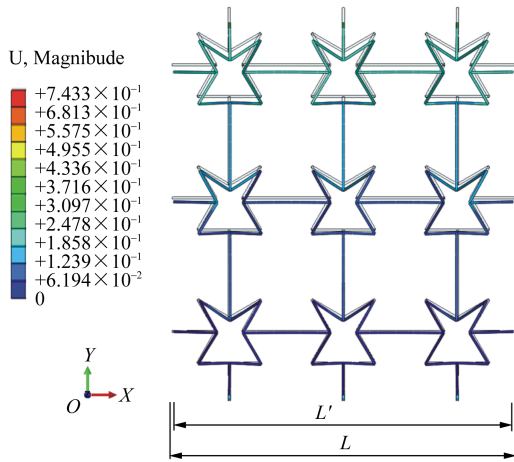


图4 内凹角型负泊松比蜂窝结构位移云图

Fig. 4 Displacement nephogram of the inter concave angle honeycomb structure with negative Poisson ratio

### 3 结果与讨论

#### 3.1 胞元夹角 $\theta_1$ 对结构的影响

将胞元夹角  $\theta_1$  作为变量,保持胞元结构其余几何参数不变,研究  $\theta_1$  的大小变化与内凹角型负泊松比蜂窝结构等效力学性能之间的关系。令胞元结构的斜杆长  $L_1 = L_2 = 10\text{ mm}$ , 夹角  $\theta_2 = 60^\circ$ , 连杆  $L_3 = 12\text{ mm}$ , 结构整体厚度  $b = 5\text{ mm}$ 。胞元夹角  $\theta_1$  在  $50^\circ \sim 80^\circ$  均匀取值, 间隔为  $5^\circ$ , 分别计算不同几何参数下结构的等效泊松比和等效弹性模量。

图5可知,随着胞元夹角  $\theta_1$  的增加,结构等效泊松比随之增大,在此参数条件下,  $\theta_1$  约为  $73^\circ$  时结构呈现零泊松比状态。由图6可知,等效弹性模量随着胞元夹角  $\theta_1$  的增加而减小。由图5、图6可以看出,解析解与数值模拟结果吻合较好,在合理的误差范围内。其中,等效泊松比在胞元夹角  $\theta_1$  与  $\theta_2$  相等 ( $\theta_1 = \theta_2 = 60^\circ$ ) 时,相对误差较小;等效弹性模量在胞元夹角  $\theta_1$  趋近于  $60^\circ$  时,相对误差逐渐减小。

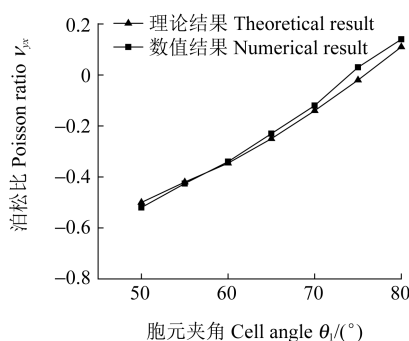


图5 胞元夹角  $\theta_1$  对泊松比的影响

Fig. 5 Influence of cell angle  $\theta_1$  on Poisson ratio

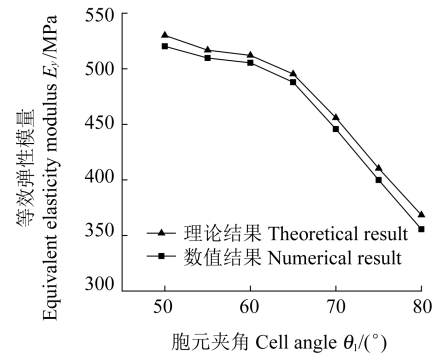


图6 胞元夹角  $\theta_1$  对等效弹性模量的影响

Fig. 6 Influence of cell angle  $\theta_1$  on equivalent elasticity modulus

#### 3.2 胞元夹角 $\theta_2$ 对结构的影响

将胞元夹角  $\theta_2$  作为变量,保持胞元结构其余几何参数不变,研究  $\theta_2$  与内凹角型负泊松比蜂窝结构等效力学性能的关系。令胞元结构的斜杆长  $L_1 = L_2 = 10\text{ mm}$ , 胞元夹角  $\theta_1 = 60^\circ$ , 连杆长  $L_3 = 12\text{ mm}$ , 结构整体厚度  $b = 5\text{ mm}$ 。胞元夹角  $\theta_2$  在  $50^\circ \sim 80^\circ$  均匀取值, 间隔为  $5^\circ$ , 分别计算不同几何参数下结构的等效泊松比和等效弹性模量。

由图7可知,随着胞元夹角  $\theta_2$  的增大,结构等效泊松比增大,在此参数条件下,  $\theta_2$  约为  $79^\circ$  时结构呈现零泊松比状态。由图8可知,等效弹性模量随着胞元夹角  $\theta_2$  的增加而减小。由图7、图8可以看出,解析解与数值模拟结果吻合较好,在合理的误差范围内。等效泊松比与等效弹性模量均在胞元夹角  $\theta_1$  与  $\theta_2$  相等 ( $\theta_1 = \theta_2 = 60^\circ$ ) 时,相对误差较小。

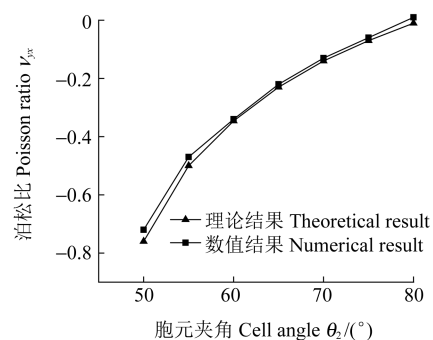


图7 胞元夹角  $\theta_2$  对泊松比的影响

Fig. 7 Influence of cell angle  $\theta_2$  on Poisson ratio

#### 3.3 斜杆长 $L_1$ 对结构的影响

将胞元斜杆长  $L_1$  作为变量,保持胞元结构其余几何参数不变,研究  $L_1$  的大小变化与内凹角型负泊松比蜂窝结构等效力学性能之间的关系。令胞元夹角  $\theta_1 = \theta_2 = 60^\circ$ , 斜杆长  $L_2 = 10\text{ mm}$ , 连杆长  $L_3 = 12\text{ mm}$ , 结构整体厚度  $b = 5\text{ mm}$ 。斜杆长  $L_1$  在  $8 \sim 14\text{ mm}$  均匀取值, 间隔为  $1\text{ mm}$ , 分别计算不同几何参数下结构的等效泊松比和等效弹性模量。

由图9可知,随着斜杆长  $L_1$  的增加,结构等效泊松比减小。由图10可知,随着  $L_1$  的增加,等效弹性模量

逐渐增大。由图9、图10可以看出,解析解与数值模拟结果吻合较好,在合理的误差范围内。等效泊松比与等效弹性模量均在斜杆长  $L_1$  与  $L_2$  相等 ( $L_1 = L_2 = 10\text{ mm}$ ) 时,相对误差较小。

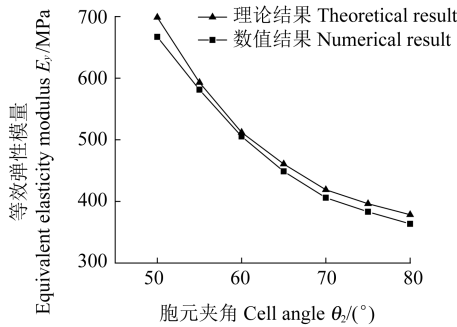


图8 胞元夹角  $\theta_2$  对等效弹性模量的影响

Fig. 8 Influence of cell angle  $\theta_2$  on equivalent elasticity modulus

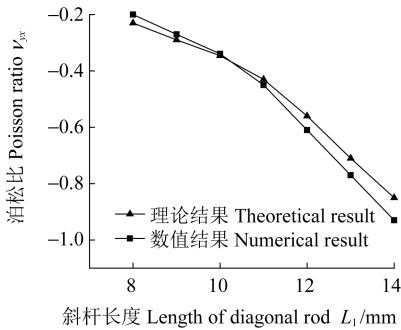


图9 斜杆长  $L_1$  对泊松比的影响

Fig. 9 Influence of length of diagonal rod  $L_1$  on Poisson ratio

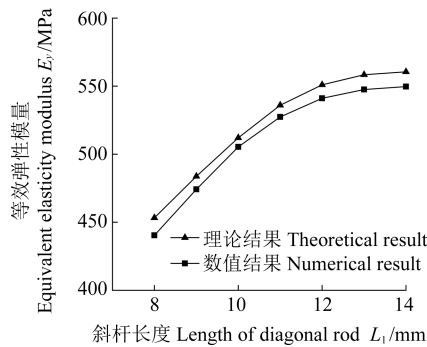


图10 斜杆长  $L_1$  对等效弹性模量的影响

Fig. 10 Influence of length of diagonal rod  $L_1$  on equivalent elasticity modulus

### 3.4 斜杆长 $L_2$ 对结构的影响

将胞元斜杆长  $L_2$  作为变量,保持胞元结构其余几何参数不变,研究  $L_2$  与内凹角型负泊松比蜂窝结构等效力学性能的关系。令胞元夹角  $\theta_1 = \theta_2 = 60^\circ$ ,斜杆长  $L_1 = 10\text{ mm}$ ,连杆长  $L_3 = 12\text{ mm}$ ,结构整体厚度  $b = 5\text{ mm}$ 。斜杆长  $L_2$  在  $8 \sim 14\text{ mm}$  均匀取值,间隔为  $1\text{ mm}$ ,分别计算不同几何参数下结构的等效泊松比和等效弹性模量。

由图11可知,随着斜杆长  $L_2$  的增加,结构等效泊松比增大。由图12可知,随着  $L_2$  的增加,等效弹性模量逐渐减小。由图11、图12可以看出,解析解与数值

模拟结果吻合较好,在合理的误差范围内。等效泊松比与等效弹性模量同样均在斜杆长  $L_2$  与  $L_1$  相等 ( $L_1 = L_2 = 10\text{ mm}$ ) 时,相对误差较小。

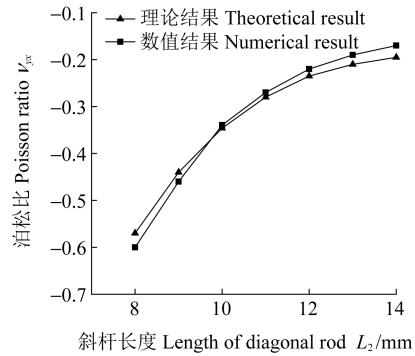


图11 斜杆长  $L_2$  对泊松比的影响

Fig. 11 Influence of length of diagonal rod  $L_2$  on Poisson ratio

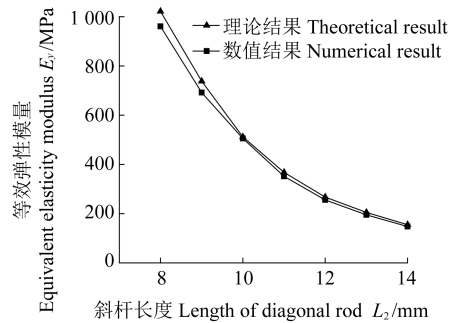


图12 斜杆长  $L_2$  对等效弹性模量的影响

Fig. 12 Influence of length of diagonal rod  $L_2$  on equivalent elasticity modulus

### 3.5 胞元壁厚度 $t$ 对结构的影响

将胞元壁厚度  $t$  作为变量,保持胞元结构其余几何参数不变,研究  $t$  与内凹角型负泊松比蜂窝结构等效力学性能的关系。令胞元夹角  $\theta_1 = \theta_2 = 60^\circ$ ,斜杆长  $L_1 = L_2 = 10\text{ mm}$ ,连杆长  $L_3 = 12\text{ mm}$ ,结构整体厚度  $b = 5\text{ mm}$ 。胞元壁厚度  $t$  在  $1 \sim 3\text{ mm}$  均匀取值,间隔为  $0.5\text{ mm}$ ,分别计算不同几何参数下结构的等效泊松比和等效弹性模量。

由图13可知,随着胞元壁厚度  $t$  的增加,结构等效泊松比略微增大。由图14可知,随着  $t$  的增加,等效弹性模量显著增大。由图13、图14可以看出,解析解与数值模拟结果吻合较好,在合理的误差范围内。

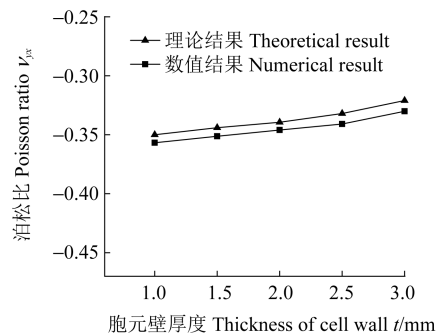


图13 胞元壁厚  $t$  对泊松比的影响

Fig. 13 Influence of thickness of cell wall  $t$  on Poisson ratio

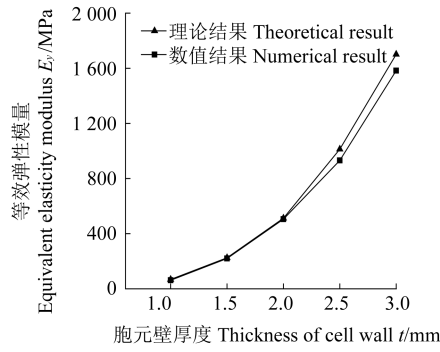
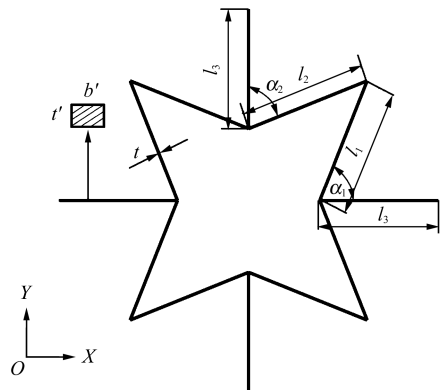


图 14 胞元壁厚  $t$  对等效弹性模量的影响

Fig. 14 Influence of thickness of cell wall  $t$  on equivalent elasticity modulus

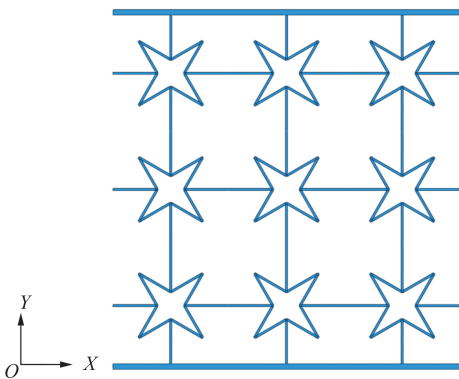
### 3.6 与常规星形蜂窝等效力学性能对比

内凹角型负泊松比蜂窝结构是基于传统星形负泊松比蜂窝结构与内凹结构相结合提出的一种新型结构,为了解该结构与常规星形蜂窝结构之间的等效力学性能差异,通过有限元模拟对 2 种结构在相同条件下的等效泊松比和等效弹性模量进行对比分析。常规星形蜂窝结构胞元及其相关尺寸参数如图 15(a)所示,该结构关于  $X$ 、 $Y$  轴对称。



(a) 常规星形蜂窝结构胞元

(a) Conventional star-shaped honeycomb structure cells



(b) 常规星形蜂窝结构有限元模型

(b) Finite element model of conventional star-shaped honeycomb structure

图 15 常规星形负泊松比蜂窝结构

Fig. 15 Conventional star-shaped honeycomb structure with negative Poisson ratio

由于在内凹角型蜂窝结构及常规星形蜂窝结构中,胞元夹角的改变会对结构的内凹程度产生影响,使结构形状发生显著变化,因此选择胞元夹角作为变量对 2 种结构的等效力学性能进行研究。为保证 2 种结构几何参数的一致性,令 2 种结构的胞元夹角  $\theta = \theta_1 = \theta_2 = \alpha_1 = \alpha_2$  且在范围  $55^\circ \sim 80^\circ$  均匀取值,斜杆长  $L_1 = L_2 = l_1 = l_2 = 10$  mm,连杆  $L_3 = l_3 = 12$  mm,胞元壁厚  $t' = 2$  mm,结构整体厚度均设置为  $b' = 5$  mm。

为常规星形蜂窝结构建立  $3 \times 3$  阵列的周期性模型,如图 15(b)所示。为避免有限元模拟过程中产生误差,常规星形蜂窝模型整体结构选用的材料参数、网格划分、边界条件设置以及载荷的施加等条件,均与上述内凹角型负泊松比蜂窝结构一致。

由图 16 可知,2 种结构的等效泊松比均随着胞元夹角的增加而不断增大,且逐渐由负值变为正值。而相较于常规星形蜂窝结构,内凹角型蜂窝结构的泊松比变化范围更大,意味着结构具有更好的可调控性能。由图 17 可知,随着胞元夹角的增加,2 种结构的等效弹性模量均不断减小,内凹角型蜂窝结构的等效弹性模量明显高于常规星形蜂窝结构,说明该结构具有比常规星形蜂窝结构更大的刚度,抗变形能力更强。

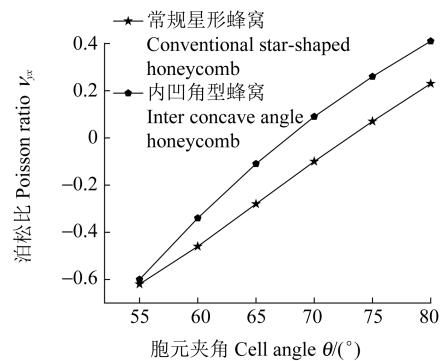


图 16 2 种蜂窝结构在不同胞元夹角下的泊松比

Fig. 16 Poisson ratio of two types of honeycomb structures at different cell angles

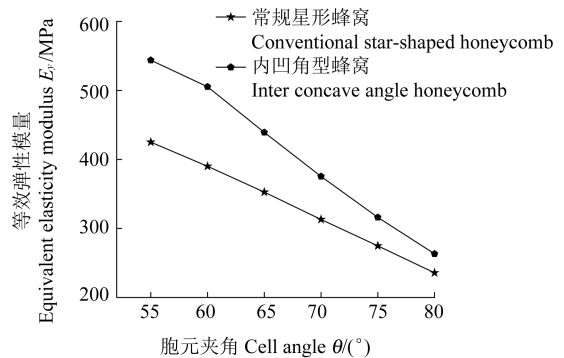


图 17 2 种蜂窝结构在不同胞元夹角下的等效弹性模量

Fig. 17 Equivalent elasticity modulus of two types of honeycomb structures at different cell angles

通过对比分析发现,内凹角型负泊松比蜂窝结构的理论计算结果与数值模拟结果之间存在一定的误

差。这是由于在使用能量法对结构位移进行理论推导时,忽略了胞元结构各壁杆之间的剪切和拉压变形的影响,导致结构 $Y$ 方向上的应变 $\varepsilon_y$ 在相同应力作用下,其理论值小于有限元模拟值,从而使结构的理论计算结果大于数值模拟结果。同时,在对有限元模拟后处理的计算结果取值时存在舍入误差,也会影响理论结果与数值模拟结果之间的误差。

## 4 结论

通过将星形蜂窝结构与内凹结构相结合,提出了一种新型内凹角型负泊松比蜂窝结构。对该新型结构在弹性变形下的泊松比和等效弹性模量理论表达式进行了推导,同时采用有限元模拟分析了内凹角型负泊松比蜂窝结构竖直方向的压缩力学性能,并对结构的等效泊松比和等效弹性模量在胞元结构不同几何参数下受到的影响和产生的变化进行了研究。在此基础上还对对比分析了该新型结构与常规星形负泊松比蜂窝结构等效力学性能之间的差异。得到主要结论如下:

1)内凹角型负泊松比蜂窝结构等效泊松比 $\nu_{yx}$ 随着胞元夹角 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 的增加而增大,说明结构竖直方向上受到压缩时,胞元夹角 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 的增加会使胞元结构整体开始向外膨胀,因此结构 $X$ 方向变形效果减弱。随着胞元夹角 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 不断增加,胞元结构膨胀效果持续增大导致结构 $X$ 方向上的变形由缩短变为伸长,泊松比逐渐由负到正。随着胞元夹角 $\theta_1$ 的增加,胞元结构受力面积增大导致 $Y$ 方向上的变形增大,因此结构等效弹性模量 $E_y$ 随着胞元夹角 $\theta_1$ 增加而减小。而随着胞元夹角 $\theta_2$ 的增加,胞元斜杆 $AB$ 与载荷方向趋于垂直,导致壁杆受到的弯矩不断增大,因此结构在 $Y$ 方向上的应变增大,等效弹性模量 $E_y$ 减小。

2)当内凹角型负泊松比蜂窝结构竖直方向上受到压缩时,随着斜杆 $L_1$ 的长度增加,胞元结构整体高度增大, $Y$ 方向上的应变减小,因此结构等效泊松比 $\nu_{yx}$ 减小,等效弹性模量 $E_y$ 增大。当斜杆 $L_2$ 的长度增加时,胞元结构受力面积增大,导致 $Y$ 方向上的变形增大,因此等效泊松比 $\nu_{yx}$ 增大,等效弹性模量 $E_y$ 减小。

3)随着内凹角型负泊松比蜂窝结构胞元壁厚度 $t$ 的增加,结构等效泊松比 $\nu_{yx}$ 轻微增大,而等效弹性模量 $E_y$ 显著增大,说明增加胞元壁厚度 $t$ 可以有效提升结构刚度,增强其稳定性。

4)在相同的几何参数条件下,相较于常规星形负泊松比蜂窝结构,本文提出的内凹角型负泊松比蜂窝结构具有更大的泊松比可调控范围,并且结构等效弹性模量更大,刚度得到了提升,为后续新型负泊松比超材料的设计提供一定的参考。

## 参考文献(References)

- [1] WU T Y, LI M X, ZHU X L, et al. Research on non-pneumatic tire with gradient anti-tetrachiral structures [J]. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2021, 28(22): 2351-2359.
- [2] 赵万忠, 赵宏宇, 王春燕. 基于负泊松比结构的汽车B柱结构耐撞性优化设计[J]. *江苏大学学报(自然科学版)*, 2020, 41(2): 166-171.  
ZHAO Wanzhong, ZHAO Hongyu, WANG Chunyan. Crash-worthiness optimization design of automobile B-pillar structure based on negative Poisson's ratio structure[J]. *Journal of Jiangsu University (Natural Science Edition)*, 2020, 41(2): 166-171. (In Chinese)
- [3] TANCOGNE-DEJEAN T, DIAMANTOPOULOU M, GORJI M B, et al. 3D plate-lattices: an emerging class of low-density metamaterial exhibiting optimal isotropic stiffness[J]. *Advanced Materials*, 2018, 30(45): 1803334.
- [4] XU N, LIU H T. A novel 3-D structure with tunable Poisson's ratio and adjustable thermal expansion [J]. *Composites Communications*, 2020, 22: 100431.
- [5] 任鑫, 张相玉, 谢亿民. 负泊松比材料和结构的研究进展[J]. *力学学报*, 2019, 51(3): 656-687.  
REN Xin, ZHANG Xiangyu, XIE Yimin. Research progress in auxetic materials and structures [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2019, 51(3): 656-687. (In Chinese)
- [6] REN X, DAS R, TRAN P, et al. Auxetic metamaterials and structures: a review [J]. *Smart Materials and Structures*, 2018, 27(2): 023001.
- [7] GIBSON L J, ASHBY M F, SCHAJER G S, et al. The mechanics of two-dimensional cellular materials [J]. *Proceedings of the Royal Society of London, Series. A; Mathematical and Physical Sciences*, 1982, 382(1782): 25-42.
- [8] YANG D U, LEE S, HUANG F Y. Geometric effects on micropolar elastic honeycomb structure with negative Poisson's ratio using the finite element method [J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2003, 39(3): 187-205.
- [9] 侯秀慧, 尹冠生. 负泊松比蜂窝抗冲击性能分析[J]. *机械强度*, 2016, 38(5): 905-910.  
HOU Xiuhui, YIN Guansheng. Dynamic crushing performance analysis for auxetic honeycomb structure [J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2016, 38(5): 905-910. (In Chinese)
- [10] LARSEN U D, SIGMUND O, BOUWSTRA S. Design and fabrication of compliant micro mechanisms and structures with negative Poisson's ratio [J]. *Journal of Microelectromechanical Systems: A Joint IEEE and ASME Publication on Microstructures, Microactuators, Microsensors and Microsystems*, 1997, 6(2): 99-106.
- [11] GRIMA J N, GATT R, FARRUGIA P S. On the properties of auxetic meta-tetrachiral structures [J]. *Physica Status Solidi, B. Basic Research*, 2008, 245(8): 511-520.
- [12] GRIMA J N, WINCZEWSKI S, MIZZI L, et al. Tailoring graphene to achieve negative Poisson's ratio properties [J]. *Advanced Materials*, 2015, 27(8): 1455-1459.
- [13] THEOCARIS P S, STAVROULAKIS G E, PANAGIOTOPOULOS P D. Negative Poisson's ratios in composites with star-shaped inclusions: a numerical homogenization approach [J]. *Archive of Ap-*

- plied Mechanics, 1997, 67(4):274-286.
- [14] DOS R F, GANGHOFFER J F. Equivalent mechanical properties of auxetic lattices from discrete homogenization[J]. Computational Materials Science, 2012, 51(1):314-321.
- [15] AI L, GAO X L. An analytical model for star-shaped re-entrant lattice structures with the orthotropic symmetry and negative Poisson's ratios[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2018, 145:158-170.
- [16] 刘海涛,王彦斌,张争艳. 可调泊松比圆弧星型结构的参数化设计[J]. 中国机械工程, 2021, 32(18):2211-2216.  
LIU Haitao, WANG Yanbin, ZHANG Zhengyan. Parametrization design of arc-start-shaped structures with tunable Poisson's ratio [J]. China Mechanical Engineering, 2021, 32(18):2211-2216. (In Chinese)
- [17] GONG X B, HUANG J, SCARPA F, et al. Zero Poisson's ratio cellular structure for two-dimensional morphing applications [J]. Composite Structures, 2015, 134:384-392.
- [18] 卢子兴,王欢,杨振宇,等. 星型-箭头蜂窝结构的内凹动态压溃行为[J]. 复合材料学报, 2019, 36(8):1893-1900.  
LU Zixing, WANG Huan, YANG Zhenyu, et al. In-plane dynamic crushing of star-arrowhead honeycomb structure[J]. Acta Materialia Compositae Sinica, 2019, 36(8):1893-1900. (In Chinese)
- [19] WANG S, LIU H T. Enhancement design and quasi-static crushing response of novel star-rhombus honeycombs [J]. Physica Status Solidi B-basic Solid State Physics, 2023, 260(10):230231.
- [20] 韩广, 鄢彦辉, 班宝旺. 新型斜十字负泊松比结构弹性力学性能研究[J]. 机械强度, 2023, 45(1):183-189.  
HAN Guang, QIE Yanhui, BAN Baowang. Study on elastic mechanical property of novel oblique cross-like structure with negative Poisson's ratio [J]. Journal of Mechanical Strength, 2023, 45(1):183-189. (In Chinese)
- [21] ZHANG Z W, TIAN R L, ZHANG X L, et al. A novel butterfly-shaped auxetic structure with negative Poisson's ratio and enhanced stiffness [J]. Journal of Materials Science, 2021, 56(25):14139-14156.
- [22] LI Q N, CAO X F, WU X X, et al. Investigation of the energy absorption characteristics and negative Poisson's ratio effect of an improved star-shaped honeycomb [J]. Journal of Marine Science and Engineering, 2023, 11(9):1799.
- [23] ATTARD D, GRIMA J N. Modelling of hexagonal honeycombs exhibiting zero Poisson's ratio [J]. Physica Status Solidi, B. Basic Research, 2011, 248(1):52-59.

## Study on mechanical property of internal concave angle honeycomb structure with negative Poisson ratio

ZHENG Zhanguang<sup>1</sup> CHEN Junxiang<sup>1</sup> SUN Teng<sup>1,2</sup> XIE Changji<sup>1</sup> HUANG Zeng<sup>1,3</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, Guangxi Colleges and Universities Key Laboratory of Modern Design and Advanced Manufacturing, Guangxi University, Nanning 530004, China)

(2. College of Naval Architecture and Ocean Engineering, Beibu Gulf University, Qinzhou 535011, China)

(3. School of Advanced Manufacturing Technologies, Guangxi Technological College of Machinery and Electricity, Nanning 530007, China)

**Abstract:** Negative Poisson ratio structures are widely applied in various engineering fields due to their excellent mechanical properties. By combining the star-shaped honeycomb structure with the re-entrant structure, a novel re-entrant angle-type negative Poisson ratio honeycomb structure is proposed. Firstly, the unit cell structure was simplified and analyzed based on symmetry, and the analytical expressions for the Poisson ratio and equivalent elasticity modulus of the structure were derived using the energy method. Secondly, the vertical compressive mechanical properties of the structure were investigated using Abaqus finite element software, and the numerical simulation results were compared with the theoretical calculations to validate the accuracy of the analytical expressions. Finally, the influence of different geometric parameters of the unit cell structure on the equivalent Poisson ratio and equivalent elasticity modulus was discussed, and the equivalent mechanical properties of the structure were compared with those of conventional star-shaped honeycomb structures. The results demonstrate that the proposed structure exhibits favorable negative Poisson ratio characteristics, and its equivalent mechanical properties can be adjusted by modifying the geometric parameters. The findings provide valuable insights for the design of novel negative Poisson ratio metamaterials.

**Key words:** Internal concave angle honeycomb structure; Energy method; Cellular structure; Mechanical property; Negative Poisson ratio

Corresponding author: ZHENG Zhanguang, E-mail: zhenglight@126.com

Fund: National Natural Science Foundation of China (52265018, 51675110); Guangxi Natural Science Foundation (2021GXNSFAA220119); Liuzhou City Science and Technology Planning Project (2022ABA0101)

Received: 2023-12-23 Revised: 2024-02-05