

## 含孔层合板非协调广义混合元模型的层间应力分析

卿光辉<sup>1</sup> 王永钢<sup>1</sup> 王 燮<sup>2</sup>

(1. 中国民航大学航空工程学院, 天津 300300)

(2. 上海飞机设计研究院, 上海 201210)

**摘要:** 为了研究含孔复合材料层合板的孔边应力集中现象,分析孔边区域层间应力的分布特点。以广义混合变分原理为基础,建立不同铺层方式的含孔层合板广义混合有限元模型。将应力场变量分为层间应力和平面内应力,引入应力边界条件,保证层间应力在层间连续、平面内应力在层间不连续的物理事实,分别从厚度方向和环向对层合板孔边的层间应力进行分析。数值表明,与有限元软件Abaqus的8节点三维实体非协调位移元结果做对照发现,利用非协调广义混合元得到的应力奇异性结果更加准确,层合板上、下表面的应力始终与实际情况保持一致。研究认为,相较于位移元,非协调广义混合元可以更有效地捕捉层间应力在层合板孔边的高应力梯度特性,为层合板的优化设计提供新思路。

**关键词:** 复合材料层合板; 层间应力; 非协调广义混合元; 应力边界条件; 应力奇异性

**中图分类号:** O343.8 **DOI:** 10.16579/j.issn.1001.9669.2025.07.016

## 0 引言

复合材料在机械制造、航空航天等许多领域中应用广泛,为了满足工程结构中的各种需要,复合材料结构上通常会加工一个或多个孔洞,如螺栓孔、装配孔等。在制孔过程中,孔边容易发生应力集中而引起疲劳问题。这是由于复合材料层合板各个单层之间的拉剪耦合系数和泊松比不匹配,其沿厚度方向的力学性能不连续。为了保证层合板整体变形的协调性,孔边会产生严重的层间应力,导致复合材料提前失效。因此,通过建立有限元模型来分析含孔复合材料的最终失效强度具有重要价值,吸引了国内外学者的广泛关注<sup>[1-5]</sup>。

CAMANHO等<sup>[6]</sup>建立了一种基于有限断裂力学的含孔层合板拉伸强度预测模型,与传统的强度预测方法相比,该模型的预测精度有所提高。杨洁<sup>[7]</sup>使用Ansys软件对对称铺设的含孔层合板的层间应力进行了分析,得到了其在孔边的分布规律。曾红燕<sup>[8]</sup>研究了在低温环境下复合材料孔边的层间应力,并分析了体积分数和温度对层间应力分布特点的影响。SANTOS等<sup>[9]</sup>研究了碳纤维复合材料开孔层合板在承受面外冲击载荷时的损伤过程。JOSEPH等<sup>[10]</sup>建立了I2CBM有限元模型,对碳纤维复合材料开孔层合板在

拉伸/压缩过程中的渐进损伤过程进行了研究,分析了层合板的应力分布,并与试验结果取得了良好的一致性,揭示了复合材料开孔层合板在拉伸过程中的渐进损伤机制。GLIESCHE等<sup>[11]</sup>对碳纤维复合材料含孔层合板的主应力分布进行了分析,进而设计了变角度牵引铺缝(Variable Angle Tow Placement, VAT)补强结构的纤维轨迹。ZHU等<sup>[12]</sup>开发了用椭圆形及圆形VAT补强结构对开孔碳纤维层合板进行粘接补强的方法,并根据孔周主应力方向对补强片纤维轨迹进行了设计。VIDAL等<sup>[13]</sup>提出了一种变量分离方法,将 $x$ - $y$ 平面内的变量和厚度 $z$ 方向变量分开求解,在二维平面内采用8节点位移元进行离散,厚度方向采用4阶分层理论求解,对不同位置、大小的孔的层合板的层间应力分布进行了研究,由于变量分离使得问题的维度降低,有效降低了计算成本。

然而,以上提到的数值方法均不能同时求解得到连续的位移和应力结果,并且难以引入应力边界条件。这是由于基于最小势能原理的位移有限元法仅包含位移场变量,求解应力时,需要首先对最佳应力点处的位移求微分,经应力外推和应力磨平处理后得到的节点应力精度差。

近年来,广义混合元得到了进一步的发展。QING

收稿日期: 2023-10-31 修回日期: 2024-01-30

基金项目: 国家自然科学基金项目(11502286)

作者简介: 卿光辉,男,1968年生,湖南新化人,博士,教授,硕士研究生导师; 主要研究方向为复合材料结构设计与维修; E-mail:2020012137@cauc.edu.cn。

王永钢(通信作者),男,1996年生,山东淄博人,硕士; 主要研究方向为广义混合有限元理论与方法; E-mail:yonggangw@foxmail.com。

引用格式: 卿光辉,王永钢,王燮. 含孔层合板非协调广义混合元模型的层间应力分析[J]. 机械强度, 2025, 47(7): 124-134.

QING Guanghui, WANG Yonggang, WANG Xie. Interlaminar stress analysis of incompatible generalized mixed element model for composite laminates with a hole[J]. Journal of Mechanical Strength, 2025, 47(7): 124-134.

等<sup>[14-16]</sup>提出了非协调广义混合元,有效提高了应力结果的收敛速度。王聿航等<sup>[17]</sup>将非协调广义混合元应用于压电层合板的静力学分析中,并使用部分混合元来避免层间应力的“超连续”问题。王燮等<sup>[18]</sup>利用部分混合元建立了复合材料层合板的有限元模型,对自由边界附近的高应力梯度特性进行了有效分析。杨立洲等<sup>[19]</sup>将非协调广义部分混合元模型应用于变刚度层合板,分析了纤维铺设角度与变刚度层合板平面内位移场之间的关系。LEZGY-NAZARGAH等<sup>[20]</sup>提出了一种低自由度的4节点四边形部分混合元,用于Winker-Pasternak弹性地基上功能梯度材料板的静力学和自由振动分析,所得数值解的收敛速度快,且对网格畸变不敏感。

目前国内外利用广义混合元对复合材料层合板层间应力研究得较少。为了准确分析含孔复合材料层合板孔边处的层间应力,本文建立了含孔层合板广义混合元模型,利用广义混合元能够同时引入应力和位移边界条件的特点,分别从厚度方向和环向对孔边的层间应力进行了分析和讨论。

## 1 非协调广义部分混合变分原理

设有限元模型体积为 $V$ ,表面积为 $S$ ,广义混合变分原理<sup>[21]</sup>为

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{GHR}}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{u}) = & -\frac{1}{2}(1-\alpha) \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} dV + \\ & (1-\alpha) \int_V \boldsymbol{\sigma}^T (\nabla \boldsymbol{u}) dV + \\ & \frac{1}{2} \alpha \int_V (\nabla \boldsymbol{u})^T \boldsymbol{C} (\nabla \boldsymbol{u}) dV - \int_{S_e} \bar{\boldsymbol{T}}^T \boldsymbol{u} dS \end{aligned} \quad (1)$$

式中, $\boldsymbol{\sigma}$ 为应力, $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{13} \ \sigma_{23} \ \sigma_{33} \ \sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{12}]^T$ ;  $\boldsymbol{C}$ 为弹性材料的刚度系数矩阵; $\boldsymbol{u}$ 为位移, $\boldsymbol{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$ ;  $\alpha$ 为分裂因子; $\nabla$ 为微分算子; $\bar{\boldsymbol{T}}$ 为 $[S\sigma]$ 上施加的已知载荷, $\bar{\boldsymbol{T}} = [\bar{T}_1 \ \bar{T}_2 \ \bar{T}_3]^T$ 。

$\Pi_{\text{GHR}}$ 属于多变量变分原理,控制方程中同时包含了位移场变量 $\boldsymbol{u}$ 和应力场变量 $\boldsymbol{\sigma}$ 。一方面, $\Pi_{\text{GHR}}$ 可以方便地引入位移边界条件和应力边界条件;另一方面,应力可以从控制方程中直接求解,且自然连续。这样避免了位移元求解应力时需先对位移求偏微分,再进行应力磨平的问题,减少了计算量以及对位移求偏微分所引入的误差。

利用8节点六面体非协调单元<sup>[22]</sup>建立含孔复合材料层合板广义混合元模型。非协调项的引入使位移场函数增加了二次项,有利于消除剪切自锁现象。对位移场和应力场分别进行离散,位移 $\boldsymbol{u}$ 和应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 可分别表示为

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{N}_d \boldsymbol{q}_e + \boldsymbol{N}_r \boldsymbol{r}_e \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{N}_s \boldsymbol{p}_e \quad (3)$$

式中, $\boldsymbol{N}_d$ 和 $\boldsymbol{N}_r$ 分别为位移形函数的协调项和非协调项; $\boldsymbol{N}_s$ 为应力形函数; $\boldsymbol{q}_e$ 和 $\boldsymbol{p}_e$ 分别为节点位移和节点应力; $\boldsymbol{r}_e$ 为单元内部节点的非协调位移。

将式(2)、式(3)代入式(1),可得

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{GHR}}(\boldsymbol{p}_e, \boldsymbol{q}_e, \boldsymbol{r}_e) = & \sum_1^n \left[ -\frac{1}{2} (1-\alpha) \boldsymbol{p}_e^T \boldsymbol{K}_{pp} \boldsymbol{p}_e + \right. \\ & (1-\alpha) \boldsymbol{p}_e^T \boldsymbol{K}_{pq} \boldsymbol{q}_e + (1-\alpha) \boldsymbol{p}_e^T \boldsymbol{K}_{pr} \boldsymbol{r}_e + \frac{\alpha}{2} \boldsymbol{q}_e^T \boldsymbol{K}_{qq} \boldsymbol{q}_e + \\ & \left. \frac{\alpha}{2} \boldsymbol{r}_e^T \boldsymbol{K}_{qr} \boldsymbol{q}_e + \frac{\alpha}{2} \boldsymbol{q}_e^T \boldsymbol{K}_{qr} \boldsymbol{r}_e + \frac{\alpha}{2} \boldsymbol{r}_e^T \boldsymbol{K}_{rr} \boldsymbol{r}_e - \boldsymbol{q}_e^T \boldsymbol{f}_e \right] \end{aligned} \quad (4)$$

式中, $n$ 为单元个数; $\boldsymbol{K}_{pp} = \int_{V_e} \boldsymbol{N}_s^T \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{N}_s dV$ ;  $\boldsymbol{K}_{pq} =$

$$\begin{aligned} & \int_{V_e} \boldsymbol{N}_s^T (\nabla \boldsymbol{N}_d) dV; \boldsymbol{K}_{pr} = \int_{V_e} \boldsymbol{N}_s^T (\nabla \boldsymbol{N}_r) dV; \boldsymbol{K}_{qr} = \\ & \int_{V_e} (\nabla \boldsymbol{N}_d)^T \boldsymbol{C} (\nabla \boldsymbol{N}_r) dV; \boldsymbol{K}_{qq} = \int_{V_e} (\nabla \boldsymbol{N}_d)^T \boldsymbol{C} (\nabla \boldsymbol{N}_d) dV; \boldsymbol{K}_{rr} = \\ & \int_{V_e} (\nabla \boldsymbol{N}_r)^T \boldsymbol{C} (\nabla \boldsymbol{N}_r) dV; \boldsymbol{f}_e = \int_{S_e} (\bar{\boldsymbol{T}}^T \boldsymbol{N}_d)^T dS. \end{aligned}$$

对式(4)中的节点应力 $\boldsymbol{p}_e$ ,节点位移 $\boldsymbol{q}_e$ ,非协调位移 $\boldsymbol{r}_e$ 分别进行变分,可得

$$-(1-\alpha) \boldsymbol{K}_{pp} \boldsymbol{p}_e + (1-\alpha) \boldsymbol{K}_{pq} \boldsymbol{q}_e + (1-\alpha) \boldsymbol{K}_{pr} \boldsymbol{r}_e = 0 \quad (5a)$$

$$(1-\alpha) \boldsymbol{K}_{pq}^T \boldsymbol{p}_e + \alpha \boldsymbol{K}_{qq} \boldsymbol{q}_e + \alpha \boldsymbol{K}_{qr} \boldsymbol{r}_e - \boldsymbol{f}_e = 0 \quad (5b)$$

$$\alpha \boldsymbol{K}_{rr} \boldsymbol{r}_e + (1-\alpha) \boldsymbol{K}_{pr}^T \boldsymbol{p}_e + \alpha \boldsymbol{K}_{qr}^T \boldsymbol{q}_e = 0 \quad (5c)$$

由式(5c)可得

$$\boldsymbol{r}_e = -\frac{1-\alpha}{\alpha} \boldsymbol{K}_{rr}^{-1} \boldsymbol{K}_{pr}^T \boldsymbol{p}_e - \boldsymbol{K}_{rr}^{-1} \boldsymbol{K}_{qr}^T \boldsymbol{q}_e \quad (6)$$

将式(6)代入式(5a)和式(5b)可得

$$-(1-\alpha) \left[ \boldsymbol{K}_{pp} + \frac{1-\alpha}{\alpha} \boldsymbol{K}_{pr} \boldsymbol{K}_{rr}^{-1} \boldsymbol{K}_{pr}^T \right] \boldsymbol{p}_e +$$

$$(1-\alpha) \left[ \boldsymbol{K}_{pq} - \boldsymbol{K}_{pr} \boldsymbol{K}_{rr}^{-1} \boldsymbol{K}_{qr}^T \right] \boldsymbol{q}_e = 0 \quad (7)$$

$$(1-\alpha) \left[ \boldsymbol{K}_{pq}^T - \boldsymbol{K}_{qr} \boldsymbol{K}_{rr}^{-1} \boldsymbol{K}_{pr}^T \right] \boldsymbol{p}_e + \alpha \left[ \boldsymbol{K}_{qq} - \boldsymbol{K}_{qr} \boldsymbol{K}_{rr}^{-1} \boldsymbol{K}_{qr}^T \right] \boldsymbol{q}_e = \boldsymbol{f}_e \quad (8)$$

联立式(7)和式(8)可得

$$\begin{bmatrix} -(1-\alpha) \boldsymbol{\kappa}_{pp} & (1-\alpha) \boldsymbol{\kappa}_{pq} \\ (1-\alpha) \boldsymbol{\kappa}_{pq}^T & \alpha \boldsymbol{\kappa}_{qq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{p}_e \\ \boldsymbol{q}_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{f}_e \end{Bmatrix} \quad (9)$$

式中,

$$\boldsymbol{\kappa}_{pp} = \boldsymbol{K}_{pp} + \frac{1-\alpha}{\alpha} \boldsymbol{K}_{pr} \boldsymbol{K}_{rr}^{-1} \boldsymbol{K}_{pr}^T \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\kappa}_{pq} = \boldsymbol{K}_{pq} - \boldsymbol{K}_{pr} \boldsymbol{K}_{rr}^{-1} \boldsymbol{K}_{qr}^T \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\kappa}_{qq} = \boldsymbol{K}_{qq} - \boldsymbol{K}_{qr} \boldsymbol{K}_{rr}^{-1} \boldsymbol{K}_{qr}^T \quad (12)$$

式(9)为全混合元列式,由于不同铺层材料参数的区别,因此,平面内应力在不同铺层之间并不连续。为了克服这一缺点,对式(9)进行处理。

将式(9)中的节点应力 $\boldsymbol{p}_e$ 分为层间应力 $\boldsymbol{p}_0$ 和平面内应力 $\boldsymbol{p}_i$ ,分别为 $\boldsymbol{p}_0 = [\sigma_{13} \ \sigma_{23} \ \sigma_{33}]^T$ , $\boldsymbol{p}_i = [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{12}]^T$ ,则式(9)中第1个方程可表达为

$$\begin{pmatrix} -A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & -A_{22} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} p_o \\ p_i \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa_{pqo} q_e \\ \kappa_{pqi} q_e \end{pmatrix} = 0 \quad (13)$$

已知式(13)中 $A_{22}$ 可逆,则平面内应力 $p_i$ 可表示为

$$p_i = -A_{22}^{-1} A_{21} p_o + A_{22}^{-1} \kappa_{pqi} q_e \quad (14)$$

将式(14)代入式(9),则有限元控制方程中只包含位移场变量和层间应力场变量,即

$$\begin{bmatrix} (\alpha - 1)A_{pp} & (1 - \alpha)A_{pq} \\ (1 - \alpha)A_{pq}^T & \alpha A_{qq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_o \\ q_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_e \end{Bmatrix} \quad (15)$$

式中, $A_{pp} = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}$ ;  $A_{pq} = \kappa_{pqo} - A_{12} A_{22}^{-1} \kappa_{pqi}$ ;  $A_{qq} = \kappa_{qq} + \frac{1 - \alpha}{\alpha} \kappa_{pqi}^T A_{22}^{-1} \kappa_{pqi}$ 。

FELIPPA<sup>[23-24]</sup>就广义混合元中分裂因子 $\alpha$ 的取值问题,提出了基于误差分析理论的中值法,即假设精确解位于位移有限元法和应力有限元法所求数值结果的正中间,推导出 $\alpha$ 取值0.75时,具有广泛的适用性。因此,在以下算例中, $\alpha$ 均取值0.75。

## 2 算例分析

### 2.1 含孔层合板的广义混合元模型

考虑石墨/环氧树脂复合材料层合板,采用与文献[25]<sup>763-777</sup>一致的含孔层合板模型,如图1所示。板的边长为 $a$ ,宽为 $b$ ,板厚为 $h$ ,圆孔直径为 $\phi$ 。其中, $a=20h=254\text{ mm}$ ;  $b=16h=203.2\text{ mm}$ ,  $h=\phi=12.7\text{ mm}$ 。4层对称层合板,各层厚度相同。受单位单轴拉伸载荷为 $\sigma_0 = 1\text{ MPa}$ 。 $0^\circ$ 层的材料属性分别为弹性模量 $E_{11}=145\text{ GPa}$ ;  $E_{22}=10.7\text{ GPa}$ ;  $E_{33}=10.7\text{ GPa}$ ; 剪切模量 $G_{12}=4.5\text{ GPa}$ ;  $G_{13}=4.5\text{ GPa}$ ;  $G_{23}=3.6\text{ GPa}$ ; 泊松比 $\nu_{12}=0.31$ ;  $\nu_{13}=0.31$ ;  $\nu_{23}=0.49$ 。

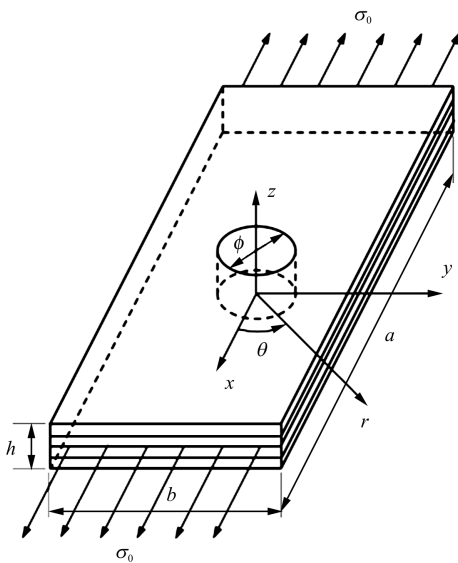


图1 含孔层合板模型及坐标系

Fig. 1 Model and coordinate system of the laminate with a hole

图2所示为含圆孔层合板 $x$ - $y$ 平面的网格模型,网格总数为576。另外,对于只有 $0^\circ$ 和 $90^\circ$ 铺层的层合板而言,可以采用1/4模型分析该问题,降低计算成本。

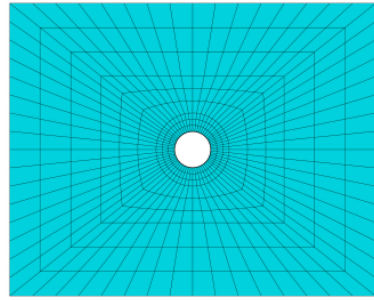


图2 含圆孔层合板 $x$ - $y$ 平面的网格模型

Fig. 2 Mesh model of  $x$ - $y$  plane of the laminate with a hole

图3所示为受单轴拉伸载荷的含孔复合材料层合板模型。由于厚度方向的材料属性不连续,层间应力会在厚度方向出现剧烈变化,所以,分别对不同铺层状态、厚度方向网格数量不同的层间应力分布结果进行了分析。

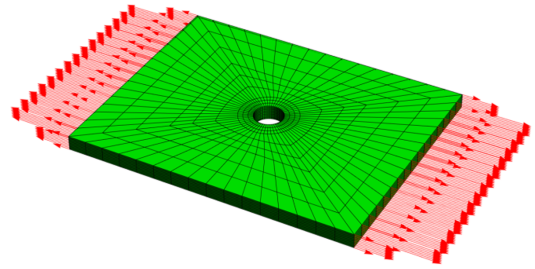


图3 含孔层合板单轴拉伸载荷模型

Fig. 3 Uniaxial tensile load model of the laminate with a hole

### 2.2 圆孔厚度方向的层间应力分布

为了准确获得含孔层合板厚度方向的层间应力分布,对图1中 $\theta=0^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $90^\circ$ 这5个位置的层间应力结果进行讨论。利用非协调广义部分混合元分别对 $[0^\circ/90^\circ]_s$ 和 $[45^\circ/-45^\circ]_s$ 含圆孔层合板孔边的应力分布状态进行研究,分析沿厚度方向不同网格数量(图4中的 $n$ )下的层间应力结果,并与Abaqus软件的8节点三维实体非协调位移元(NCSE8)厚度方向划分32个网格( $n=32$ )的结果进行对比。

图4~图8分别展示了 $[0^\circ/90^\circ]_s$ 层合板圆孔周向不同位置的层间应力沿厚度方向(即 $z$ 方向,从0~12.7 mm变化,用 $h_z$ 表示)的分布。由图4~图8可知,由于材料属性的不连续,层间应力的方向和大小不断变化,与NCSE8计算结果的变化趋势有较好的一致性,其中层间正应力 $\sigma_z$ 的大小、方向关于材料对称面对称;层间剪应力 $\sigma_{xz}$ 、 $\sigma_{yz}$ 的大小、方向关于材料对称面反对称。所有层间应力均先随着转角 $\theta$ 增加而逐渐增

加,在  $\theta=45^\circ\sim 60^\circ$  时达到峰值,然后逐渐减小,至  $\theta=90^\circ$  时最小。随着厚度方向网格数  $n$  的增加,广义混合元对应力峰值的预测结果有效改善。 $n=8$  时应力结果仍存在小幅度的振荡情况,且应力峰值的预测并不准确,但在  $n=16$  时的结果已和 Abaqus 软件结果有较好

的一致性,应力曲线的变化情况得到了良好的改善。另外,由非协调广义部分混合元分析含孔层合板的层间应力时,所得层合板上、下表面的层间应力值始终与实际情况一致。然而,传统位移元不具备这样的优点。

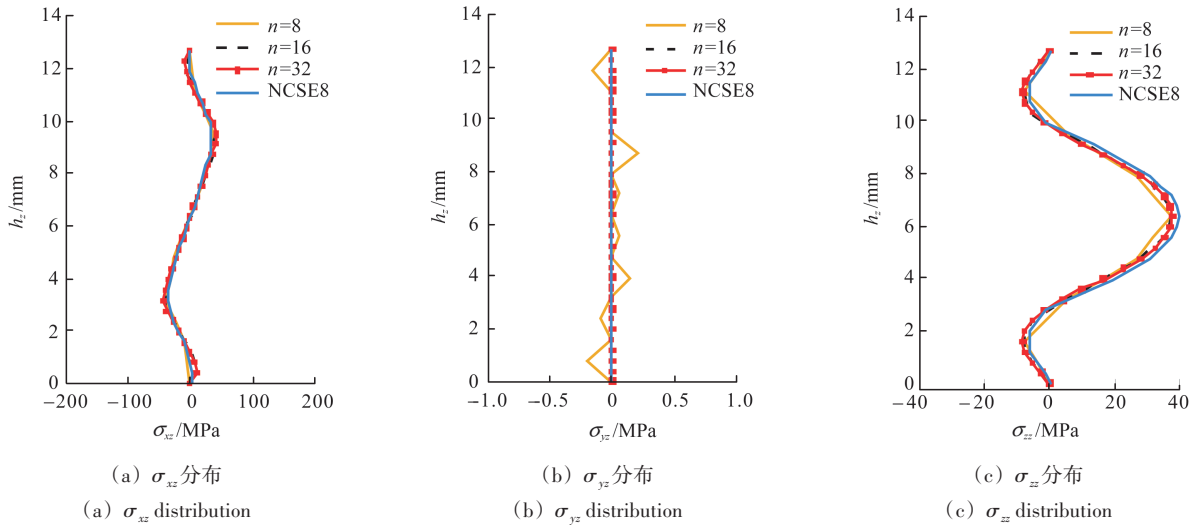


图 4  $[0^\circ/90^\circ]_s$  层合板层间应力在  $\theta=0^\circ$  处沿厚度方向的分布

Fig. 4 Distribution of the interlaminar stress at  $\theta=0^\circ$  along the thickness of  $[0^\circ/90^\circ]_s$  laminate

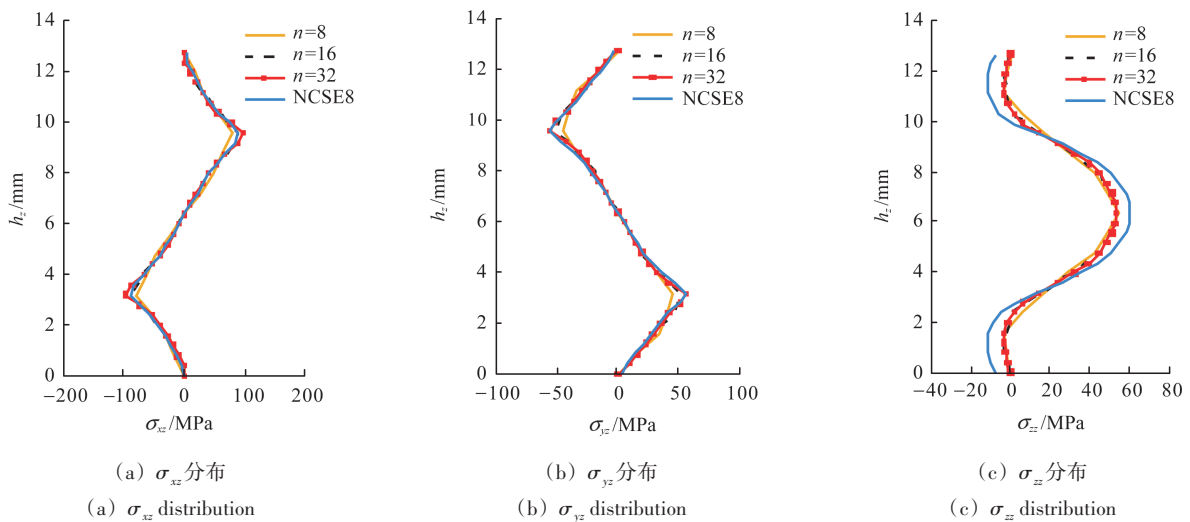


图 5  $[0^\circ/90^\circ]_s$  层合板层间应力在  $\theta=30^\circ$  处沿厚度方向的分布

Fig. 5 Distribution of the interlaminar stress at  $\theta=30^\circ$  along the thickness of  $[0^\circ/90^\circ]_s$  laminate

图 9~图 13 所示分别为  $[45^\circ/-45^\circ]_s$  层合板在  $\theta=0^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $90^\circ$  这 5 个位置的层间应力沿厚度方向分布情况。层间剪应力  $\sigma_{xz}$  和  $\sigma_{yz}$  的大小、方向关于材料对称面反对称;层间正应力  $\sigma_{zz}$  大小、方向关于材料对称面对称。层间剪应力  $\sigma_{xz}$  和  $\sigma_{yz}$  的值在厚度方向发生了剧烈变化,随着转角  $\theta$  变化,  $\sigma_{xz}$  的值逐渐增大,大约在  $\theta=90^\circ$  位置达到峰值。在角度变化过程中,非协调广义部分混合元的层间剪应力  $\sigma_{xz}$  和  $\sigma_{yz}$  的结果始终与非协调位移元有较好的一致性,在  $n=16$  时就保证了

与  $n=32$  的非协调位移元结果有相当的精度。另外,在计算层间正应力  $\sigma_{zz}$  时,  $\sigma_{zz}$  的值不断减小直至反向,非协调广义部分混合元始终保证了边界应力值与实际值的一致性,有效预测了厚度方向层间正应力随转角  $\theta$  的变化过程。然而,非协调位移元难以保证边界应力值的正确性。

### 2.3 圆孔环向的层间应力分布

选取如图 14 所示的层合板界面 1、界面 2、界面 3 这 3 个层间界面位置,对  $[0^\circ/90^\circ]_s$  层合板在圆孔环向的应

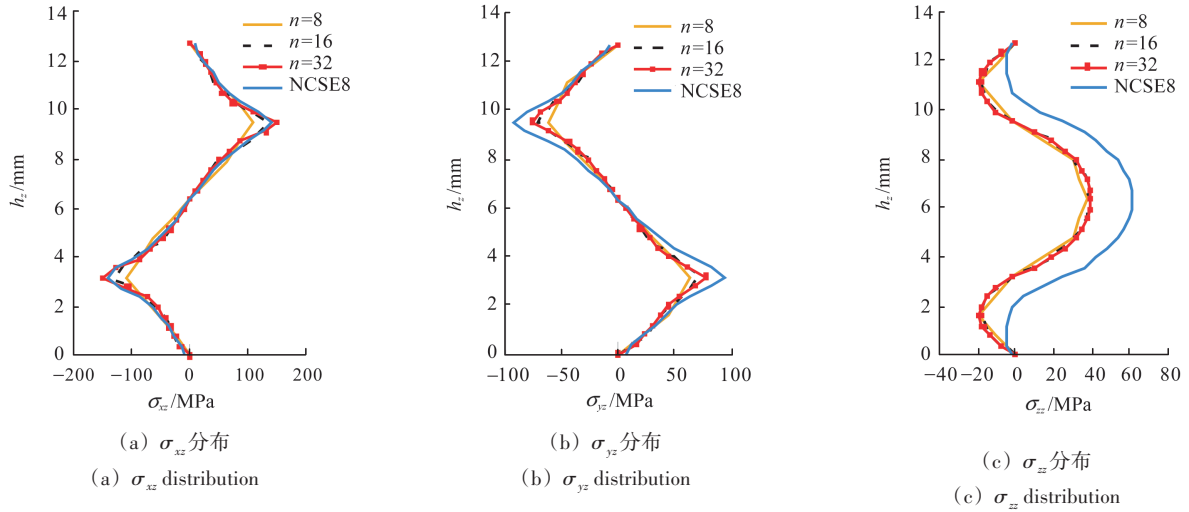


图 6  $[0^\circ/90^\circ]_s$  层合板层间应力在  $\theta=45^\circ$  处沿厚度方向的分布

Fig. 6 Distribution of the interlaminar stress at  $\theta=45^\circ$  along the thickness of  $[0^\circ/90^\circ]_s$  laminate

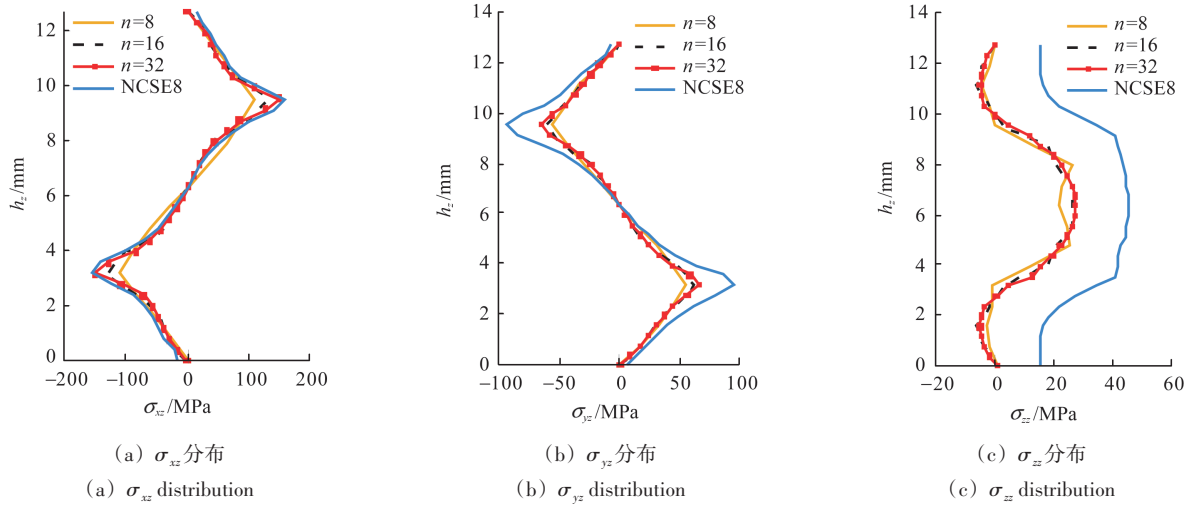


图 7  $[0^\circ/90^\circ]_s$  层合板层间应力在  $\theta=60^\circ$  处沿厚度方向的分布

Fig. 7 Distribution of the interlaminar stress at  $\theta=60^\circ$  along the thickness of  $[0^\circ/90^\circ]_s$  laminate

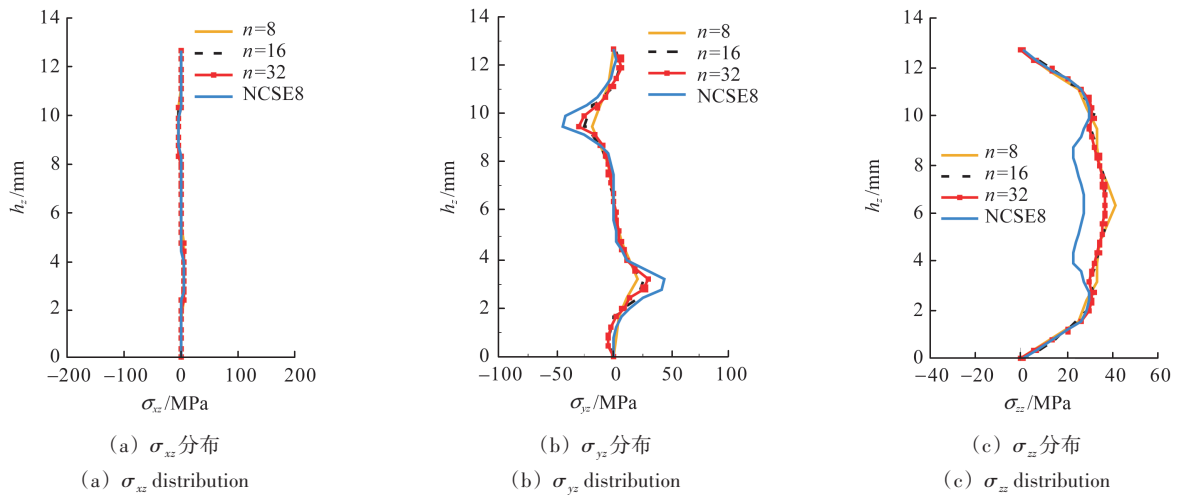


图 8  $[0^\circ/90^\circ]_s$  层合板层间应力在  $\theta=90^\circ$  处沿厚度方向的分布

Fig. 8 Distribution of the interlaminar stress at  $\theta=90^\circ$  along the thickness of  $[0^\circ/90^\circ]_s$  laminate

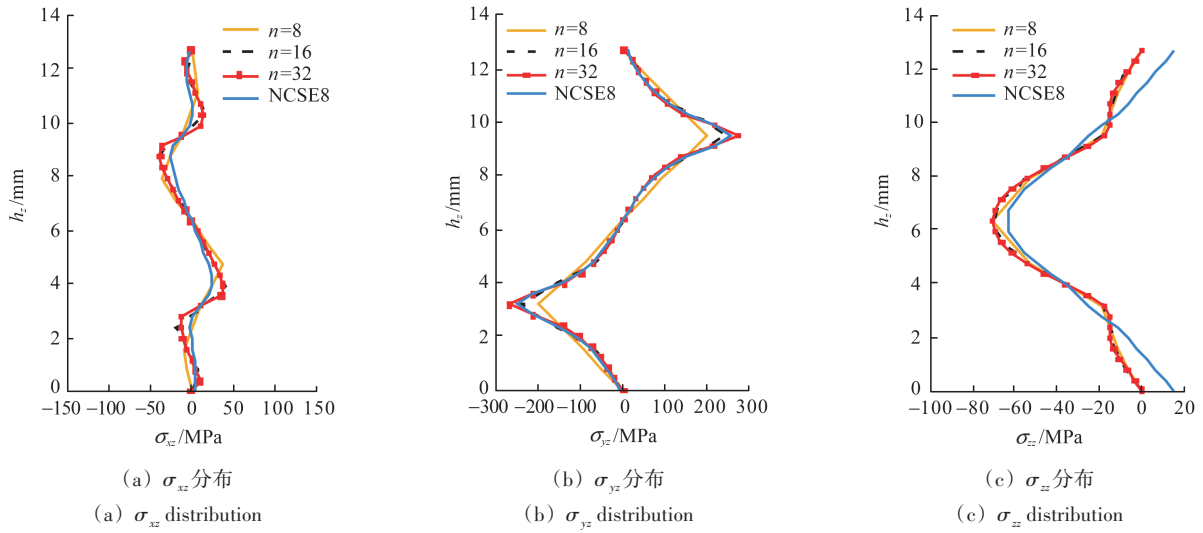


图 9  $[45^\circ/-45^\circ]_s$  层合板层间应力在  $\theta=0^\circ$  处沿厚度方向的分布

Fig. 9 Distribution of the interlaminar stress at  $\theta=0^\circ$  along the thickness  $[45^\circ/-45^\circ]_s$  laminate

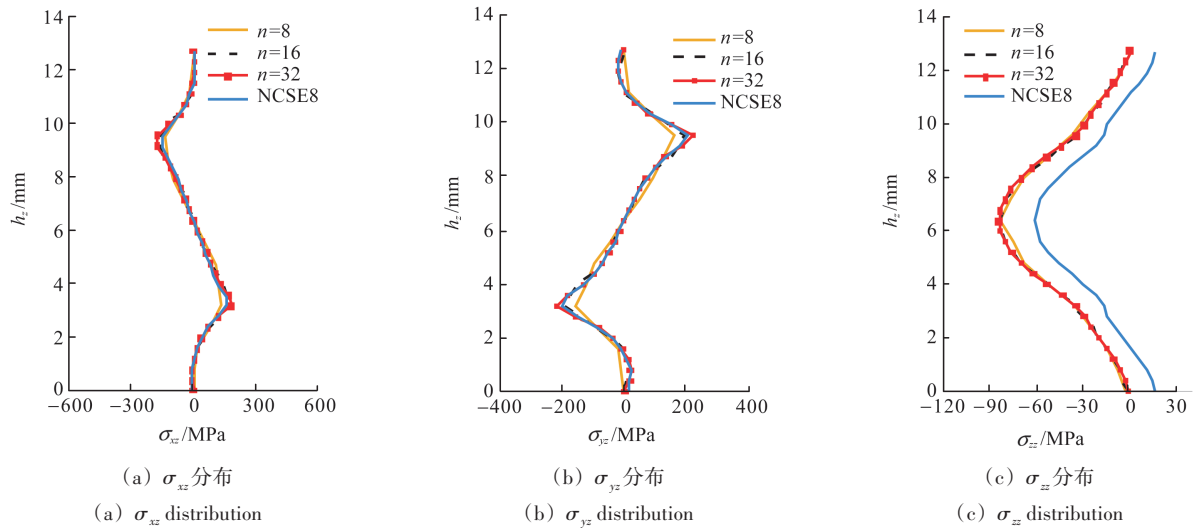


图 10  $[45^\circ/-45^\circ]_s$  层合板层间应力在  $\theta=30^\circ$  处沿厚度方向的分布

Fig. 10 Distribution of the interlaminar stress at  $\theta=30^\circ$  along the thickness  $[45^\circ/-45^\circ]_s$  laminate

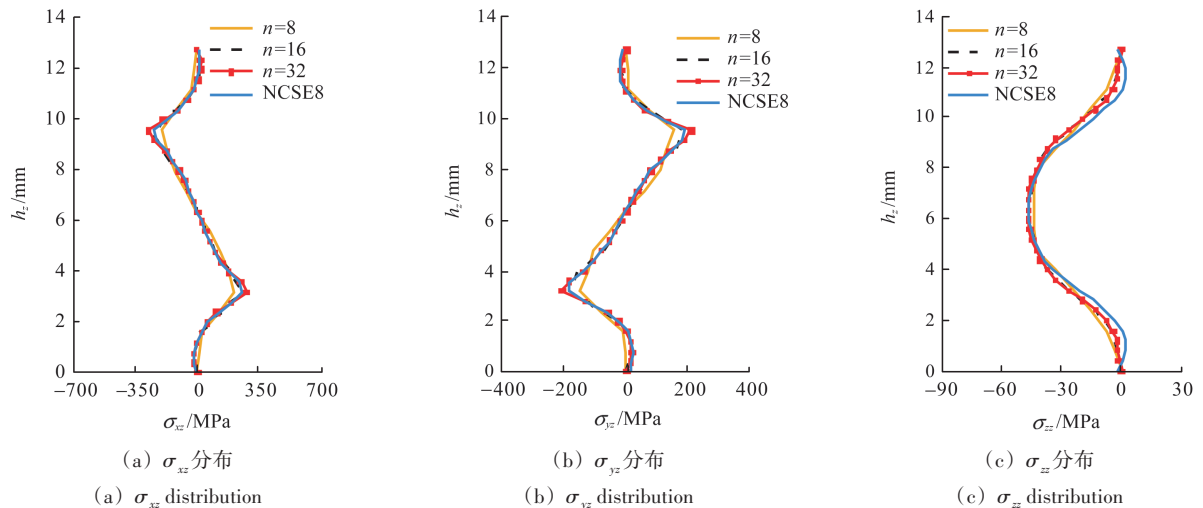


图 11  $[45^\circ/-45^\circ]_s$  层合板层间应力在  $\theta=45^\circ$  处沿厚度方向的分布

Fig. 11 Distribution of the interlaminar stress at  $\theta=45^\circ$  along the thickness  $[45^\circ/-45^\circ]_s$  laminate

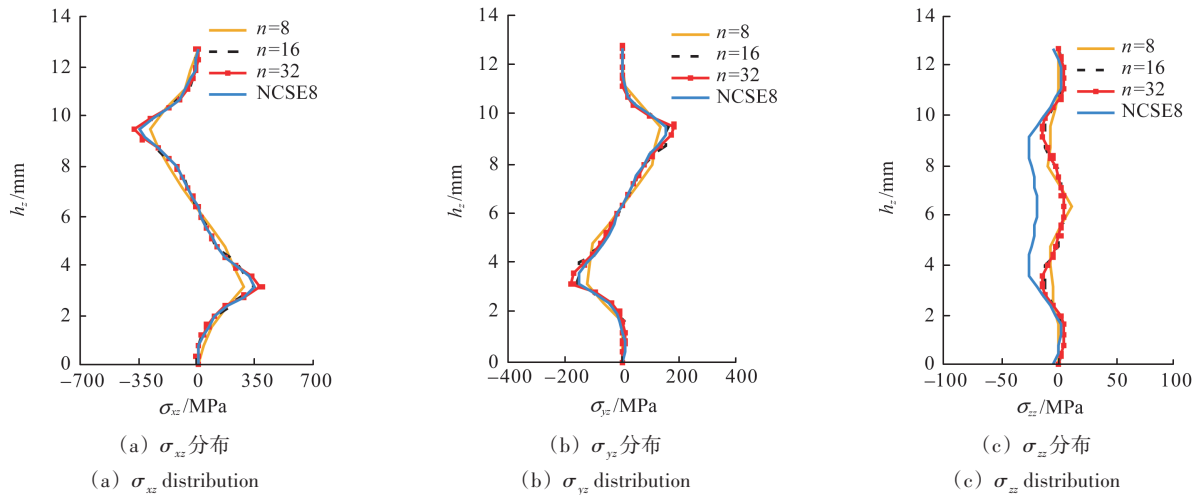


图 12  $[45^\circ/-45^\circ]_8$ 层合板层间应力在 $\theta=60^\circ$ 处沿厚度方向的分布

Fig. 12 Distribution of the interlaminar stress at  $\theta=60^\circ$  along the thickness  $[45^\circ/-45^\circ]_8$  laminate

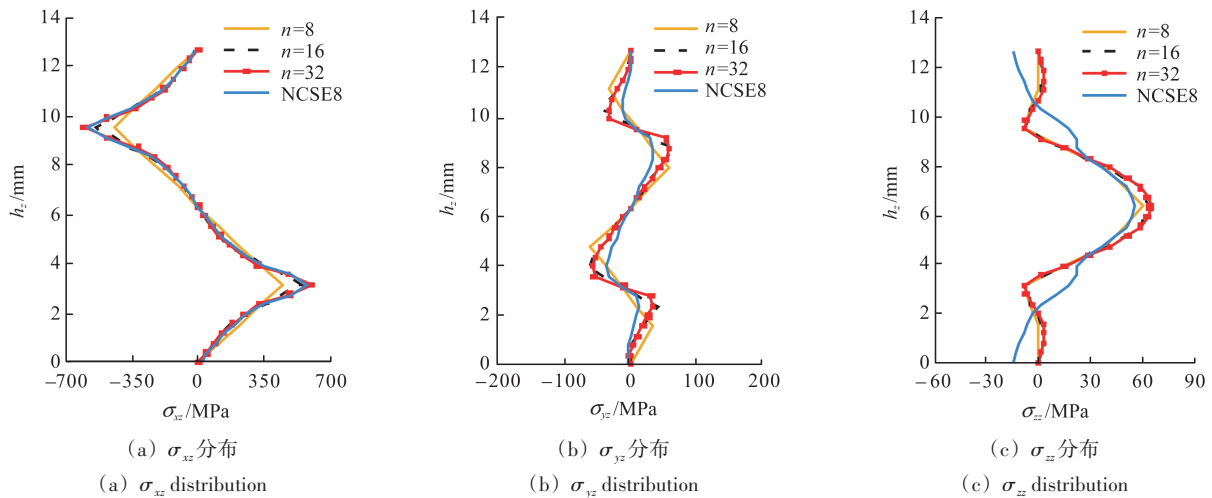


图 13  $[45^\circ/-45^\circ]_8$ 层合板层间应力在 $\theta=90^\circ$ 处沿厚度方向的分布

Fig. 13 Distribution of the interlaminar stress at  $\theta=90^\circ$  along the thickness  $[45^\circ/-45^\circ]_8$  laminate

力分布情况进行分析。列出不同厚度方向网格数量  $n$  的非协调广义部分混合元的计算结果,以及厚度方向划分 32 个网格( $n=32$ )时,非协调位移元的计算结果。

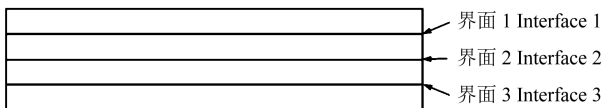


图 14 层合板的材料界面

Fig. 14 Material interface of the laminate

图 15~图 17 所示为层间应力  $\sigma_{xz}$ 、 $\sigma_{yz}$ 、 $\sigma_{xx}$  在  $[0^\circ/90^\circ]$  层合板界面 1、界面 2、界面 3 的应力分布结果。由于层合板形状和材料属性的对称性,在界面 1 和界面 3 层间应力值在相同角度的位置等大反向。另外,  $\sigma_{xz}$  和  $\sigma_{xx}$  沿圆孔环向  $\theta=180^\circ$  位置对称分布,  $\sigma_{yz}$  沿  $\theta=180^\circ$  位置反对称分布。在层合板对称面(界面 2)处,

$\sigma_{xz}$ 、 $\sigma_{yz}$  的值始终为 0。非协调广义部分混合元的应力分布结果和非协调位移元一致性较好,层间正应力  $\sigma_{xx}$  在界面 1 和界面 3 的  $\theta=90^\circ$  和  $270^\circ$  的位置达到峰值。层间剪应力  $\sigma_{xz}$ 、 $\sigma_{yz}$  在界面 1 和界面 3 的  $\theta=60^\circ$ 、 $120^\circ$ 、 $240^\circ$  和  $300^\circ$  达到峰值。当  $n=8$  时,随着厚度方向网格数量  $n$  的提升,层间应力峰值的计算结果逐渐趋近于真实情况。在  $n=16$  时,应力变化情况已经与 NCSE8 相当一致。

### 3 结论

本文建立了含孔复合材料层合板的非协调广义混合有限元模型,利用广义混合元控制方程包含位移场变量和应力场变量、无需应力恢复及额外的数值稳定技术、求解应力精度高的特点,分别从厚度方向和

环向研究了 $[0^\circ/90^\circ]_s$ 和 $[45^\circ/-45^\circ]_s$ 含孔层合板的孔边应力分布状态,通过与有限元软件 Abaqus 的 8 节点三

维实体非协调位移元结果做对比,验证了本文方法的有效性。得到主要结论如下:

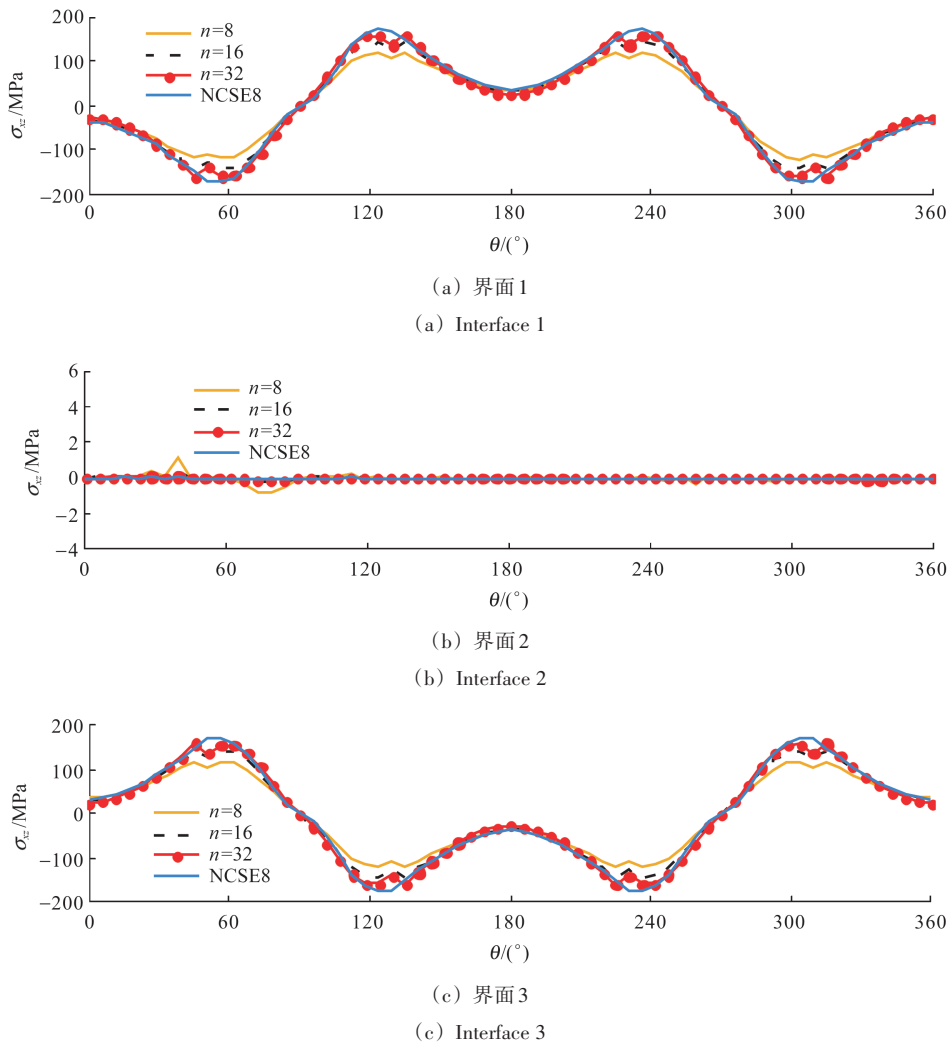
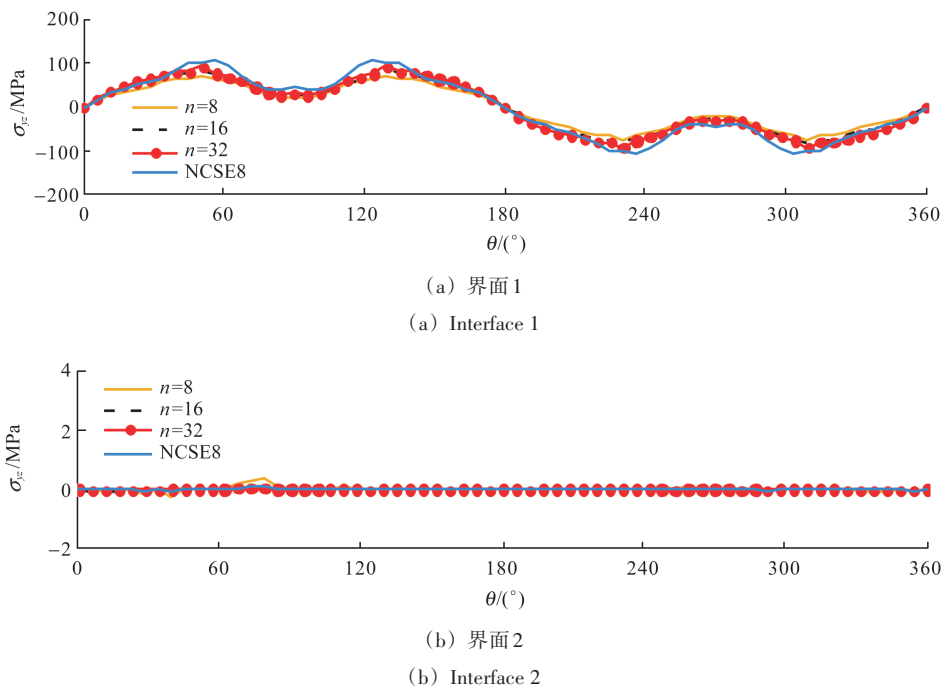
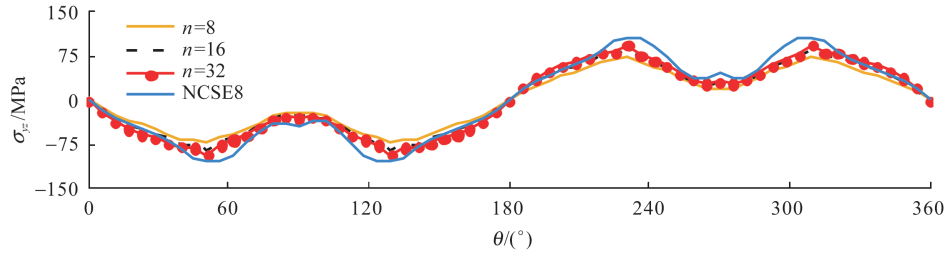


图 15  $\sigma_{xz}$ 在 $[0^\circ/90^\circ]_s$ 层合板各界面的环向分布

Fig. 15 Circumferential distribution of  $\sigma_{xz}$  at each interface of  $[0^\circ/90^\circ]_s$  laminate



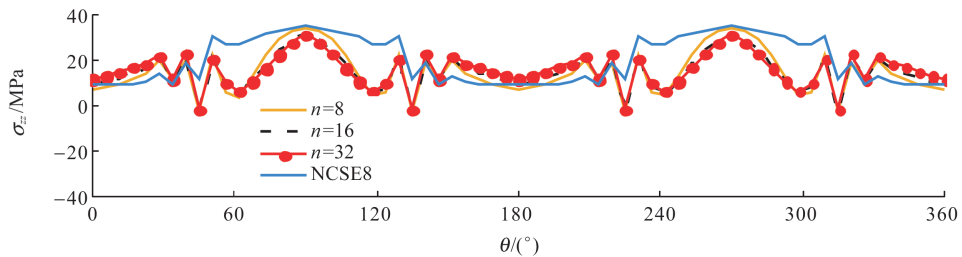


(c) 界面3

(c) Interface 3

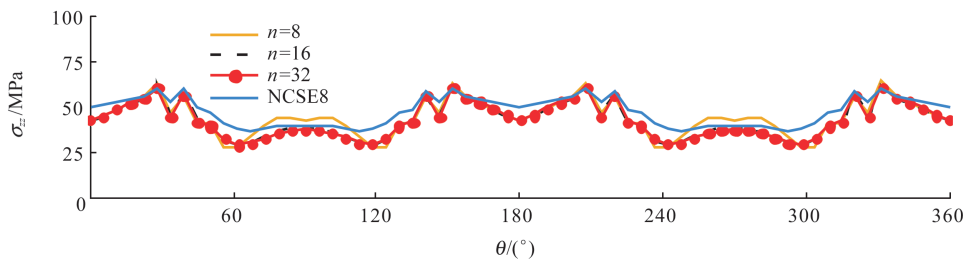
图 16  $[0^\circ/90^\circ]_s$  层合板  $\sigma_{zz}$  各界面的环向分布

Fig. 16 Circumferential distribution of  $\sigma_{zz}$  at each interface of  $[0^\circ/90^\circ]_s$  laminate



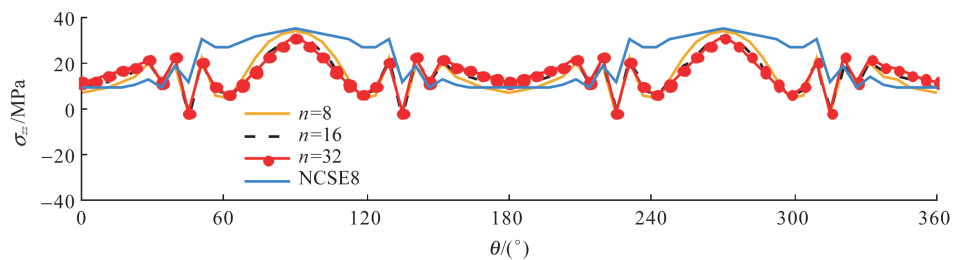
(a) 界面1

(a) Interface 1



(b) 界面2

(b) Interface 2



(c) 界面3

(c) Interface 3

图 17  $[0^\circ/90^\circ]_s$  层合板  $\sigma_{zz}$  各界面的环向分布

Fig. 17 Circumferential distribution of  $\sigma_{zz}$  at each interface of  $[0^\circ/90^\circ]_s$  laminate

1) 本文方法符合层间应力在层间连续、平面内应力在层间不连续的客观事实,能够有效地捕捉孔边的高应力梯度特性,并且精度优于位移元。

2) 非协调广义混合有限元能够引入应力边界条件,在稀网格和密网格下,层合板上、下表面的层间应力都始终与实际情况保持一致,更有利于分析层间应

力的分布规律。

3) 结合圆孔厚度方向和环向的应力分布,与非协调位移有限元相比,非协调广义混合元分析得到的层间应力分布更加集中于层合板材料属性的变化位置,能更加显著、准确地反映应力奇异性情况,为层合板的优化设计提供了新的思路。

## 参考文献(References)

- [1] VAN DER SYPT P, CHÉRIF M, BOIS C. Analysis of the fatigue behaviour of laminated composite holes subjected to pin-bearing loads[J]. *International Journal of Fatigue*, 2017, 103: 86-98.
- [2] KOSTOPOULOS V, KOTROTSOS A, SOUSANIS A, et al. Fatigue behaviour of open-hole carbon fibre/epoxy composites containing bis-maleimide based polymer blend interleaves as self-healing agent[J]. *Composites Science and Technology*, 2019, 171: 86-93.
- [3] GUO Q W, ZHANG Y F, LI D S, et al. Tensile properties and failure mechanism of 3D woven composites containing holes of different geometries [J]. *Thin-Walled Structures*, 2021, 166: 108115.
- [4] 秦建兵, 赵玺, 梁荣娜. 一种失效准则在面外载荷下含孔层合板的应用[J]. *复合材料科学与工程*, 2021(6): 52-57.  
QIN Jianbing, ZHAO Xi, LIANG Rongna. Application of failure criteria in the composite laminate open hole for out-of-plane loads [J]. *Composites Science and Engineering*, 2021 (6) : 52-57. (In Chinese)
- [5] 李姝, 李宴, 韩飞. 开孔复合材料层合板强度不确定性分析[J]. *力学季刊*, 2023, 44(2): 293-305.  
LI Shu, LI Yan, HAN Fei. Strength uncertainty analysis for notched composite laminates[J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2023, 44 (2): 293-305. (In Chinese)
- [6] CAMANHO P P, ERÇİN G H, CATALANOTTI G, et al. A finite fracture mechanics model for the prediction of the open-hole strength of composite laminates [J]. *Composites, Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2012, 43(8) : 1219-1225.
- [7] 杨洁. 含孔复合材料层合板结构应力分析[D]. 郑州: 郑州大学, 2009: 48-52.  
YANG Jie. Stress analysis of composite laminates with holes [D]. Zhengzhou: Zhengzhou University, 2009: 48-52. (In Chinese)
- [8] 曾红燕. 低温环境下复合材料层合板的应力分析[D]. 大连: 大连理工大学, 2014: 36-40.  
ZENG Hongyan. Stress analysis of composite laminates at cryogenic conditions [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2014: 36-40. (In Chinese)
- [9] SANTOS R A M, REIS P N B, SILVA F G A, et al. Influence of inclined holes on the impact strength of CFRP composites [J]. *Composite Structures*, 2017, 172(1): 130-136.
- [10] JOSEPH A P K, DAVIDSON P, WAAS A M. Open hole and filled hole progressive damage and failure analysis of composite laminates with a countersunk hole [J]. *Composite Structures*, 2018, 203: 523-538.
- [11] GLIESCHE K, HÜBNER T, ORAWETZ H. Application of the tailored fibre placement (TFP) process for a local reinforcement on an “open-hole” tension plate from carbon/epoxy laminates [J]. *Composites Science and Technology*, 2003, 63(1) : 81-88.
- [12] ZHU Y D, QIN Y L, QI S J, et al. Variable angle tow reinforcement design for locally reinforcing an open-hole composite plate [J]. *Composite Structures*, 2018, 202: 162-169.
- [13] VIDAL P, GALLIMARD L, POLIT O. Modeling of composite plates with an arbitrary hole location using the variable separation method [J]. *Computers & Structures*, 2017, 192: 157-170.
- [14] QING G H, MAO J H, LIU Y H. Highly accurate noncompatible generalized mixed finite element method for 3D elasticity problems [J]. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2017, 12 (4): 505-519.
- [15] QING G H, MAO J H, LIU Y H. Generalized mixed finite element method for 3D elasticity problems [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2018, 34(2) : 371-380.
- [16] QING G, TIAN J. Highly accurate symplectic element based on two variational principles [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2018, 34 (1) : 151-161.
- [17] 王聿航, 卿光辉. 基于广义混合有限元的压电复合材料层合板的数值分析[J]. *复合材料学报*, 2022, 39(6) : 2987-2996.  
WANG Yuhang, QING Guanghui. Analysis of piezoelectric composite laminates based on generalized mixed finite element [J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2022, 39(6) : 2987-2996. (In Chinese)
- [18] 王燮, 卿光辉. 基于非协调广义部分混合元的层合板边界效应分析[J]. *复合材料学报*, 2022, 39(8) : 4172-4178.  
WANG Xie, QING Guanghui. Analysis of laminates free-edge effect based on noncompatible generalized partial mixed elements [J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2022, 39(8) : 4172-4178. (In Chinese)
- [19] 杨立洲, 卿光辉. 基于混合元的变刚度层合板静力学分析[J]. *工程力学*, 2024, 41(3) : 19-25.  
YANG Lizhou, QING Guanghui. Static Analysis of variable stiffness laminates based on mixed finite element [J]. *Engineering Mechanics*, 2024, 41(3) : 19-25. (In Chinese)
- [20] LEZGY-NAZARGAH M, MESHKANI Z. An efficient partial mixed finite element model for static and free vibration analyses of FGM plates rested on two-parameter elastic foundations [J]. *Structural Engineering and Mechanics*, 2018, 66(5) : 665-676.
- [21] RONG T Y, LU A Q. Generalized mixed variational principles and solutions of ill-conditioned problems in computational mechanics; Part I. Volumetric locking [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, 191(3/4/5) : 407-422.
- [22] 田宗焱, 卞学鑽. 多变量变分原理与多变量有限元方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2011: 108-119.  
TIAN Zongshu, BIAN Xuechuang. Multivariable variational principle and multivariable finite element method [M]. Beijing: Science Press, 2011: 108-119. (In Chinese)
- [23] FELIPPA C A. Parametrized multifield variational principles in elasticity: I. Mixed functionals [J]. *Communications in Applied Numerical Methods*, 1989, 5(2) : 79-88.
- [24] FELIPPA C A. Parametrized multifield variational principles in elasticity: II. Hybrid functionals and the free formulation [J]. *Communications in Applied Numerical Methods*, 1989, 5 (2) : 89-98.
- [25] RAGHURAM P V, MURTY A V K. A high precision coupled bending-extension triangular finite element for laminated plates [J]. *Computers & Structures*, 1999, 72(6) : 763-777.

## Interlaminar stress analysis of incompatible generalized mixed element model for composite laminates with a hole

QING Guanghui<sup>1</sup> WANG Yonggang<sup>1</sup> WANG Xie<sup>2</sup>

(1. College of Aeronautical Engineering, Civil Aviation University of China, Tianjin 300300, China)

(2. Shanghai Aircraft Design & Research Institute, Shanghai 201210, China)

**Abstract:** In order to investigate the stress concentration phenomenon and analyze the distribution characteristics of the interlaminar stress in the hole edge region of composite laminates. Based on the generalized mixed variational principle, the generalized mixed finite element model for laminated plates with various stacking modes were established. The stress field variables were divided into the interlaminar stress and the in-plane stress, with the introduction of stress boundary conditions to ensure the physical continuity of interlaminar stresses between layers and the discontinuity of in-plane stresses between layers. The interlaminar stresses at the edge of the laminated plate hole were respectively analyzed through the thickness direction and the circumferential direction. Numerical examples demonstrated that the incompatible generalized mixed element could obtain more accurate stress singularity results than the 8-node three-dimensional solid incompatible displacement element results solved by the finite element software Abaqus. Stresses on both upper and lower surfaces of the laminated plate consistently reflected actual situations. The research indicates that compared with the displacement element, the incompatible generalized mixed element can more effectively capture the high stress gradient of the interlaminar stresses at the edge of the laminated plate hole, which provides a new idea for the optimal design of the laminate.

**Key words:** Laminated composites; Interlaminar stress; Incompatible generalized mixed element; Stress boundary condition; Stress singularity

Corresponding author: WANG Yonggang, E-mail: yonggangw@foxmail.com

Fund: National Natural Science Foundation of China (11502286)

Received: 2023-10-31      Revised: 2024-01-30