

改进 Tikhonov 正则化方法的载荷识别与结构响应重构

高可乐 殷红 彭珍瑞

(兰州交通大学机电工程学院, 兰州 730070)

摘要: 为提高载荷识别与结构响应重构的精度及效率,提出了一种同时考虑传递矩阵误差和测量误差的改进 Tikhonov 正则化方法。首先,通过结构动力学模型构建状态空间方程和传递矩阵,得到结构载荷和响应的重构方程;其次,利用截断随机奇异值分解方法计算测点位置的近似传递矩阵,同时结合总体最小二乘法(Total Least Squares Method, TLSM)和传统 Tikhonov 正则化方法识别载荷,再通过待重构位置的传递矩阵重构未知响应;最后,分别对二维桁架和简支梁进行数值仿真和试验分析,验证所提方法的有效性。结果表明,相较于传统 Tikhonov 正则化方法,所提方法可在保证重构精度的同时提升重构效率。

关键词: 结构响应重构; 载荷识别; 传递矩阵; Tikhonov 正则化

中图分类号: TH113.1 **DOI:** 10.16579/j.issn.1001.9669.2025.06.012

0 引言

准确获取结构所受外载荷和各类型响应数据对于评估土木结构和机械设备的安全性及耐久性至关重要。然而,由于受到经济条件、测试条件及现场环境条件的制约,大多数情况下都难以获得结构完整的监测数据^[1-2]。因此,利用有限传感器的测量响应对载荷及未测量响应进行重构具有重要意义。

近年来,学者们提出了许多基于结构有限测量响应重构未测量响应的方法。这些方法主要包括卡尔曼滤波(Kalman Filter, KF)类方法^[3-4],经验模态分解(Empirical Mode Decomposition, EMD)方法^[5-6]及基于传递率或传递矩阵的方法^{[7]29-35[8]501-508[9]952-968[10]041010}。其中,基于传递率或传递矩阵的结构响应重构方法应用最为广泛,其基本原理是基于已知测量响应和未知响应之间的传递矩阵,重构未测量位置的动态响应数据。传递率最先针对单自由度系统提出,之后扩展到多自由度系统并成功应用于结构位移响应重构中^{[7]29-35}。起初,KAMMER^{[8]501-508}提出了一种基于传递矩阵和部分测量信息的响应重构方法,用于反演无法安装传感器位置的动态响应。之后,LAW等^{[9]952-968}将位移传递率推广到加速度传递率,并将这种传递率方法应用于子结构的响应重构中。LI等^{[10]041010}将传递率方法从频域扩展到小波域,利用离散小波变换,对结

构和子结构系统的未知响应进行了重构。

应用基于传递率或传递矩阵的响应重构方法,需要先获得结构所受外载荷,而在实际应用中,外载荷通常是不可获知的。因此,有必要同时考虑载荷识别及响应重构这两方面的问题。LIU等^[11]通过状态空间模型推导了结构的传递矩阵,并结合稀疏正则化方法降低了传递矩阵的病态性,实现对结构外载荷和未测量响应的重构。LIU等^[12]通过 Tikhonov 正则化结合截断广义奇异值分解的组合正则化方法改善传递矩阵的病态性,并基于有限应变测量信息识别电池组的负载。王娟等^{[13]460-466}结合部分测点的动态响应和传递矩阵重构其他未测量位置处的响应,并采用正则化方法改善重构方程的不适定性。缪炳荣等^[14]结合实际算例,通过混合正则化方法降低传递矩阵的病态性,提高了载荷识别的精度。然而,若通过以上方法获得较为精确的重构结果,需要建立较高精度的有限元模型并且在载荷识别过程中计算量较大。

针对以上问题,本文利用加速度传感器获取小样本的测量数据,提出一种同时考虑传递矩阵误差和测量误差的改进 Tikhonov 正则化方法。首先,基于状态空间模型得到结构载荷识别及响应重构方程。其次,采用截断随机奇异值分解(Truncated Randomized Singular Value Decomposition, TRSVD)方法提高传递矩阵的分解效率,并结合总体最小二乘法(Total Least

收稿日期: 2023-09-26 修回日期: 2024-01-02

基金项目: 国家自然科学基金项目(62161018)

作者简介: 高可乐,男,2000年生,甘肃会宁人,硕士研究生;主要研究方向为动力响应重构研究;E-mail:3124857137@qq.com。

彭珍瑞(通信作者),男,1972年生,甘肃民勤人,教授,博士研究生导师;主要研究方向为结构动力学与模态分析;E-mail:pzrui@163.com。

引用格式: 高可乐,殷红,彭珍瑞.改进 Tikhonov 正则化方法的载荷识别与结构响应重构[J].机械强度,2025,47(6):99-105.

GAO Kele, YIN Hong, PENG Zhenrui. Improved Tikhonov regularization method for load identification and structural response reconstruction[J]. Journal of Mechanical Strength, 2025, 47(6): 99-105.

Squares Method, TLSM)和Tikhonov正则化方法对载荷进行识别,进而实现对结构未测量位置响应的重构。最后,对二维桁架和简支梁分别进行数值仿真和试验分析,验证了所提方法的可行性。

1 理论背景

1.1 状态空间模型

在载荷作用下,结构的运动方程可表示为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{L}\mathbf{F}(t) \quad (1)$$

式中, \mathbf{M} 、 \mathbf{C} 、 \mathbf{K} 分别为结构的质量、阻尼、刚度矩阵; $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ 、 $\dot{\mathbf{x}}(t)$ 、 $\mathbf{x}(t)$ 分别为 t 时刻结构的加速度、速度、位移响应; \mathbf{L} 为载荷的映射矩阵; $\mathbf{F}(t)$ 为 t 时刻结构的载荷向量。

引入状态向量 $\mathbf{z}(t) = [\mathbf{x}(t) \quad \dot{\mathbf{x}}(t)]^T$,将式(1)表示为连续时间状态空间模型:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}^c \mathbf{z}(t) + \mathbf{B}^c \mathbf{L}\mathbf{F}(t) \quad (2)$$

式中, $\mathbf{A}^c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}$; $\mathbf{B}^c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix}$; c 表示连续系统。

t 时刻结构的响应向量 $\mathbf{Y}(t)$ 可表示为

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{G}_a \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{G}_v \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{G}_d \mathbf{x}(t) \quad (3)$$

式中, \mathbf{G}_a 、 \mathbf{G}_v 、 \mathbf{G}_d 分别为加速度、速度、位移的输出影响矩阵。

结合式(2)和式(3)可得

$$\begin{cases} \mathbf{Y}(t) = \mathbf{G}\mathbf{z}(t) + \mathbf{DLF}(t) \\ \mathbf{G} = [\mathbf{G}_d - \mathbf{G}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \quad \mathbf{G}_v - \mathbf{G}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}] \\ \mathbf{D} = \mathbf{G}_a \mathbf{M}^{-1} \end{cases} \quad (4)$$

将式(2)、式(4)表示成离散时间状态空间方程:

$$\begin{cases} \mathbf{z}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{z}(k) + \mathbf{BLF}(k) \\ \mathbf{Y}(k) = \mathbf{G}\mathbf{z}(k) + \mathbf{DLF}(k) \end{cases} \quad (5)$$

式中, $k = 0, 1, 2, \dots, p$, p 为采样点数; $\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}^c \Delta t}$; $\mathbf{B} = [\mathbf{A} - \mathbf{I}](\mathbf{A}^c)^{-1} \mathbf{B}^c$ 。

在零初始条件下,式(5)经过迭代运算后可简化为

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{F} \quad (6)$$

式中, \mathbf{Y} 为结构全部响应向量组合; \mathbf{H} 为结构全部载荷向量组合; \mathbf{F} 为结构载荷矩阵。其表达式分别为

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{Y}(1) \quad \mathbf{Y}(2) \quad \mathbf{Y}(3) \quad \dots \quad \mathbf{Y}(p)]^T \quad (7)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{DL} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{GBL} & \mathbf{DL} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{GABL} & \mathbf{GBL} & \mathbf{DL} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{GA}^{p-2}\mathbf{BL} & \mathbf{GA}^{p-3}\mathbf{BL} & \dots & \mathbf{GBL} & \mathbf{DL} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{F} = [\mathbf{F}(1) \quad \mathbf{F}(2) \quad \mathbf{F}(3) \quad \dots \quad \mathbf{F}(p)]^T \quad (9)$$

1.2 载荷识别和响应重构方程

式(6)描述了已知载荷求解系统响应的正问题。

而在载荷识别问题中,载荷 \mathbf{F} 未知。假设结构可测量位置处的真实响应和传递矩阵分别为 \mathbf{Y}^m 和 \mathbf{H}^m ,需要重构位置处的真实响应和传递矩阵分别为 \mathbf{Y}^r 和 \mathbf{H}^r ,则有

$$\mathbf{Y}_{(N_m \times p) \times 1}^m = \mathbf{H}_{(N_m \times p) \times (N_r \times p)}^m \mathbf{F}_{(N_r \times p) \times 1} \quad (10)$$

$$\mathbf{Y}_{(N_r \times p) \times 1}^r = \mathbf{H}_{(N_r \times p) \times (N_r \times p)}^r \mathbf{F}_{(N_r \times p) \times 1} \quad (11)$$

式中, N_m 、 N_r 分别为结构测量自由度数和重构自由度; N_r 为外载荷的数量。

直接利用最小二乘法求解式(10)可能会因为 \mathbf{H}^m 中小奇异值的作用而放大实测响应噪声的影响,进而降低载荷识别精度。为提高载荷识别精度并降低方程的不适定性,一般采用正则化方法求解。

通过式(10)求得载荷后,代入式(11)即可求得需要重构位置处的响应。

2 载荷识别的改进正则化方法

2.1 总体最小二乘法

相较于传统的最小二乘法,TLSM不仅能够考虑到方程中因变量的误差,还能考虑到系数矩阵的误差。

工程实际中,一般难以准确获得 \mathbf{Y}^m 和 \mathbf{H}^m 。Tikhonov正则化方法建立在传统最小二乘法的框架下,若实际得到的传递矩阵和测量响应含有较大误差,采用传统Tikhonov正则化方法会导致载荷识别精度大幅降低。因此,引入TLSM同时考虑这两方面误差,可有效提高载荷的识别精度^[15]。同时考虑传递矩阵误差及测量误差,式(6)可表示为

$$\begin{cases} \mathbf{Y}^{\text{real}} = \mathbf{H}^{\text{real}} \mathbf{F} \\ \mathbf{H}^{\text{real}} = \mathbf{H}^m + \Delta \mathbf{H} \\ \mathbf{Y}^{\text{real}} = \mathbf{Y}^m + \Delta \mathbf{Y} \end{cases} \quad (12)$$

式中, $\Delta \mathbf{H}$ 、 $\Delta \mathbf{Y}$ 分别为传递矩阵误差和测量误差; \mathbf{H}^{real} 、 \mathbf{Y}^{real} 分别为实际得到的传递矩阵和测量响应。

根据TLSM理论^[16],未知载荷可表示为下列无约束优化问题的解,即

$$\min \|(\Delta \mathbf{H}, \Delta \mathbf{Y})\|_F \quad (13)$$

式中, $\|\cdot\|_F$ 为Frobenius范数。

2.2 截断随机奇异值分解

TRSVD是一种近似奇异值分解方法,它在截断奇异值分解(Truncated Singular Value Decomposition, TSVD)中引入随机采样方法,在保证计算精度的同时,显著降低计算复杂度^[17]。TRSVD具体步骤如下:

1) 产生随机矩阵 $\mathbf{S}_{(N_r \times p) \times s}$,其中 s 为随机矩阵的列数。

2) 将 \mathbf{H}^{real} 降维:

$$\mathbf{Z}_{(N_m \times p) \times s} = \mathbf{H}_{(N_m \times p) \times (N_r \times p)}^{\text{real}} \mathbf{S}_{(N_r \times p) \times s} \quad (14)$$

3) 提取 \mathbf{Z} 的正交基 \mathbf{Q} 、 \mathbf{R} :

$$\mathbf{Z}_{(N_m \times p) \times s} = \mathbf{Q}_{(N_m \times p) \times s} \mathbf{R}_{s \times s} \quad (15)$$

4) 计算目标矩阵 \mathbf{B}^r :

$$B'_{s \times (N_f \times p)} = Q_{(N_m \times p) \times s}^T H^{real}_{(N_m \times p) \times (N_f \times p)} \quad (16)$$

5) 对 B' 奇异值分解:

$$B'_{s \times (N_f \times p)} = W_{s \times s} \Sigma_{s \times s} V_{(N_f \times p) \times (N_f \times p)}^T \quad (17)$$

式中, W 、 V 分别为 B' 的左、右奇异矩阵; Σ 为 B' 的奇异值矩阵。

6) 计算近似传递矩阵 H^k :

$$\begin{cases} H^k_{(N_m \times p) \times (N_f \times p)} \approx U_{(N_m \times p) \times K} \Sigma_{K \times K} V_{(N_f \times p) \times K}^T \\ U_{(N_m \times p) \times K} = Q_{(N_m \times p) \times K} W_{K \times K} \end{cases} \quad (18)$$

式中, K 为截断参数, $K < s$, 其值越小, 计算效率越高。

2.3 改进 Tikhonov 正则化方法

TSVD 和 Tikhonov 正则化方法都是常见的正则化方法。前者通过保留部分较大的奇异值及其对应的奇异向量并结合观测向量进行独立求解, 求解步骤相对简单; 后者通过在最小化目标函数中引入正则化项并结合一定的正则化参数选择方法获得稳定的解, 求解精度相对较高。

为同时考虑载荷识别的精度和效率问题, 通过结合 TRSVD 和融合 TLSM 的 Tikhonov 正则化方法可实现两者的优势互补, 即利用 TRSVD 舍弃小奇异值对识别结果的影响, 加快奇异值分解效率并提高识别精度, 同时利用融合 TLSM 的 Tikhonov 正则化方法提高解的稳定性并进一步提升识别精度。结合式(13), 改进的 Tikhonov 正则化方法可表示为

$$\begin{cases} \min \|\Delta H\|_F^2 + \|\Delta Y\|_2^2 + \lambda \|F\|_2^2 \\ \text{s.t. } (H^m + \Delta H)F = Y^{real} \end{cases} \quad (19)$$

式中, λ 为正则化参数; $\|\cdot\|_2$ 为 L2 范数。

求解以上最小化问题, ΔH 、 ΔY 可表示为

$$\begin{aligned} \Delta Y &= \frac{H^k F - Y^{real}}{\|F\|_2^2 + 1} \\ \Delta H &= -\frac{(H^k F - Y^{real})F^T}{\|F\|_2^2 + 1} \end{aligned} \quad (20)$$

将式(20)代入式(19), 可得改进方法的目标函数为

$$\min \left\{ \frac{(H^k F - Y^{real})^2}{\|F\|_2^2 + 1} + \lambda \|F\|_2^2 \right\} \quad (21)$$

结合式(18)求解式(21), 识别载荷 F_{id} 可表示为

$$F_{id} = \sum_{j=1}^K \frac{\sigma_j^2}{j \sigma_j^2 + \lambda_1 + \lambda_L} u_j^T Y^{real} v_j \quad (22)$$

式中, σ_j 为 H^k 的奇异值; u_j 、 v_j 分别为 H^k 的左、右奇异向量; λ_L 为正则化参数, 其最优值可通过 L 曲线确定; λ_1 可表示为

$$\lambda_1 = -\frac{\|Y^{real} - H^k F_{id}\|_2^2}{1 + \|F_{id}\|_2^2} \quad (23)$$

结合式(22)、式(23), 本文所提出的改进算法具

体步骤如图 1 所示。

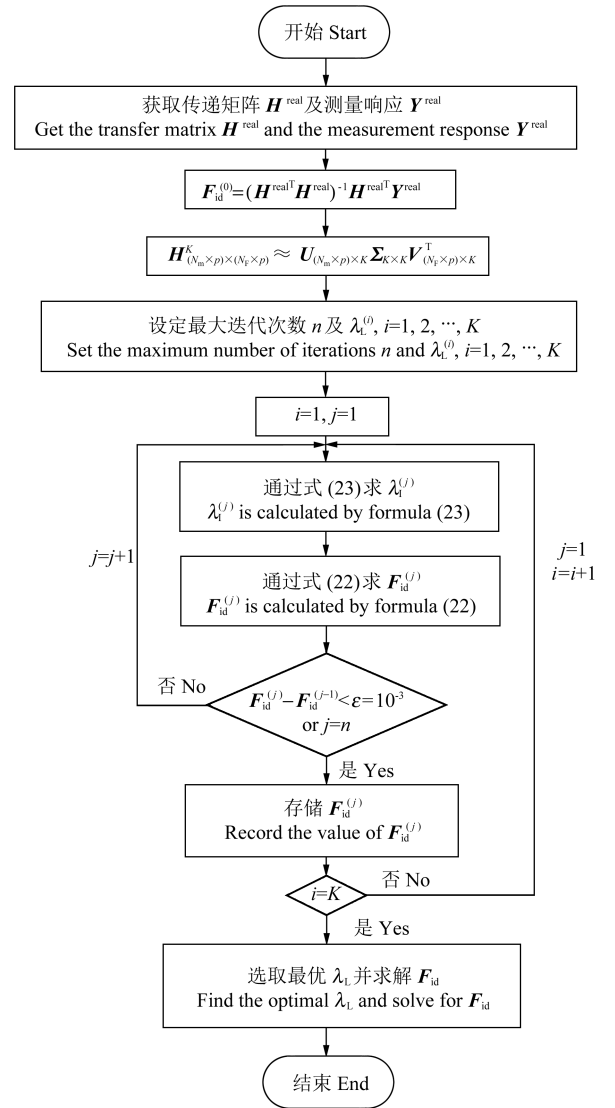


图 1 改进 Tikhonov 正则化流程

Fig. 1 Flow chart of the improved Tikhonov regularization

3 数值算例

为验证改进算法的有效性, 选取二维桁架进行数值仿真分析, 如图 2 所示。该结构共有 36 个单元, 16 个节点以及 29 个自由度, 横截面积为 1 cm^2 , 质量密度为 7800 kg/m^3 , 弹性模量为 210 GPa 。在桁架两端 (第 1 节点和第 15 节点) 分别施加固定约束和简支约束, 分析过程中只考虑 Y 向自由度。

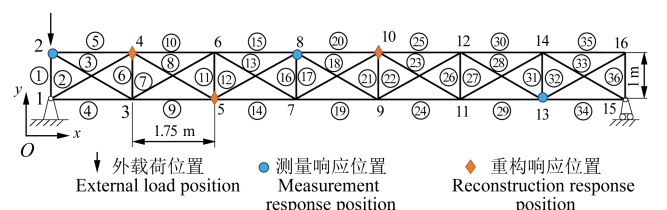


图 2 二维桁架结构

Fig. 2 Two-dimensional truss structure

在第2节点Y方向施加如式(24)所示的正弦载荷^{[13]460-466},采样频率为1 000 Hz,采样时间为1 s,提取第2、8、13节点的加速度响应作为测量响应,分别重构载荷 F 、第4节点的速度响应、第5节点的位移响应以及第10节点的加速度响应。载荷表达式为

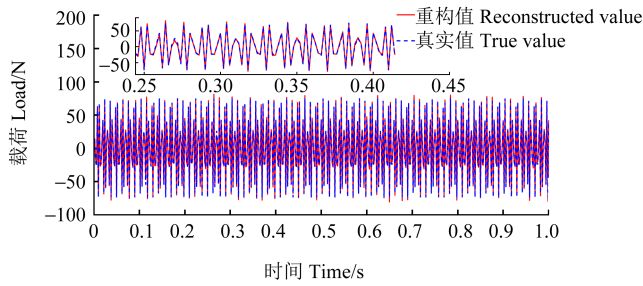
$$F = 50\sin(350\pi t) + 35\sin(500\pi t + 0.6\pi) + 10\sin(800\pi t + 0.6\pi) \quad (24)$$

为考虑传递矩阵误差及测量误差的影响,在 \mathbf{Y}^m 和 \mathbf{H}^m 中均添加同等级的随机白噪声以模拟实际情况:

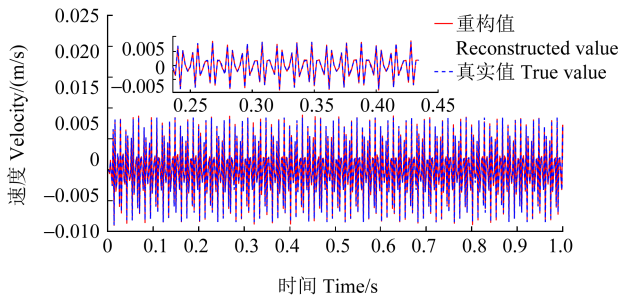
$$\begin{cases} \mathbf{Y}^{\text{real}} = \mathbf{Y}^m + a f_{\text{std}}(\mathbf{Y}^m) R_{\text{noise}} \\ \mathbf{H}^{\text{real}} = \mathbf{H}^m + a f_{\text{std}}(\mathbf{H}^m) R_{\text{noise}} \end{cases} \quad (25)$$

式中, a 为噪声等级; $f_{\text{std}}(\cdot)$ 为标准差函数; R_{noise} 为期望为0、方差为1的随机噪声。

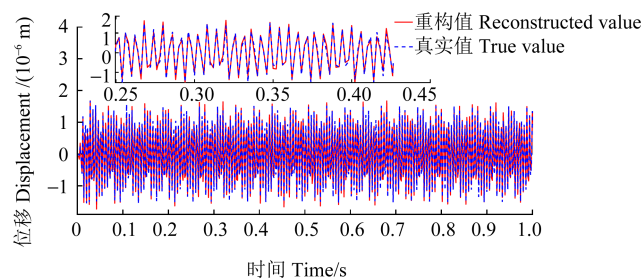
当噪声等级为5%时,载荷识别及响应重构结果如图3所示。由图3可知,真实值与重构值吻合较好,说明所提方法对载荷及未知响应进行了有效重构。



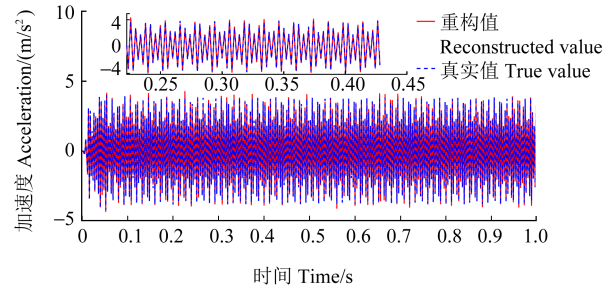
(a) 载荷识别结果
(a) Load identification result



(b) 第4节点速度响应
(b) Velocity response at node 4th



(c) 第5节点位移响应
(c) Displacement response at node 5th



(d) 第10节点加速度响应

(d) Acceleration response at node 10th

图3 载荷及响应的真实值与重构值对比

Fig. 3 Comparison of true and reconstructed values of load and response

为验证改进 Tikhonov 正则化方法相比于传统 Tikhonov 正则化算法在重构精度方面的优势,在不同噪声等级下对载荷及上述未测量响应进行重构,其误差如表1所示。载荷与响应的相对误差指标分别定义为

$$E_L = \frac{\|\mathbf{F}_{\text{id}} - \mathbf{F}\|_2}{\|\mathbf{F}\|_2} \times 100\% \quad (26)$$

$$E_R = \frac{\|\mathbf{Y}_{\text{id}} - \mathbf{Y}^r\|_2}{\|\mathbf{Y}^r\|_2} \times 100\% \quad (27)$$

式中, E_L 、 E_R 分别为载荷和响应的相对误差; \mathbf{Y}_{id} 为重构响应。

表1 不同噪声等级下载荷及各响应重构相对误差

Tab. 1 Relative errors of load and each response reconstruction under different noise levels %

	噪声水平 Noise level/%	不同噪声等级下载荷及各响应重构相对误差 %			
		载荷 Load	第5节点 位移 Displacement at node 5th	第4节点 速度 Velocity at node 4th	第10节点 加速度 Acceleration at node 10th
改进方法 Improved method	3	4.40	8.34	3.06	2.57
	5	5.72	14.75	5.03	4.02
	10	9.09	24.22	10.08	8.54
传统方法 Traditional method	3	5.37	12.84	4.21	3.81
	5	7.55	17.38	6.47	5.56
	10	12.99	30.40	11.68	10.52

由表1可知,随着噪声等级的逐渐增大,改进方法和传统方法对于载荷识别及响应重构精度均呈现出下降的趋势。但相对于传统方法,改进方法更加稳定,即使在较高等级的噪声干扰下,载荷以及未测量位置处各类型响应的重构精度均在可接受范围之内。

为验证改进方法在载荷识别时具有更高的计算效率,设定噪声等级为10%,在保证识别误差不超过15%的前提下,分别利用不同长度的加速度测量响应对两种方法的计算时长进行对比。测试环境为 Intel Core i5-8265U 处理器,8 GB 内存,基于 Matlab 2018b 软件环境采用 M 语言编写算法。两种方法的计算时

长如表 2 所示。

表 2 两种方法计算时长对比

数据长度 Data length	500	1 000	1 500	2 000
改进方法 Improved method	0.17	0.82	2.23	6.78
传统方法 Traditional method	0.63	1.81	4.87	14.92

由表 2 可知,相对于传统方法,在保证载荷识别精度的同时,对于相同长度的测量数据,改进方法的计算效率明显提升。

综上所述,相比于传统 Tikhonov 正则化方法,所提方法在同时考虑传递矩阵误差和测量误差的情况下,对于提升载荷识别和响应重构的精度及效率具有更好的效果。

4 试验验证

在实际工程应用中,很多结构都可以简化成简支梁。为验证所提方法在冲击载荷作用下载荷识别及响应重构的有效性,采用以下简支梁进行试验分析,如图 4 所示。简支梁尺寸为 2 000 mm×200 mm×10 mm,质量密度为 7 800 kg/m³,弹性模量为 210 GPa,泊松比为 0.3。将该结构划分为 20 个单元,21 个节点,在梁两端(第 1 节点和第 21 节点)分别施加如图 5 所示的固定约束和简支约束,并仅考虑 Y 方向的振动。选取结构前 5 阶模态振型为目标模态进行结构载荷识别与响应重构,试验过程中所采用加速度传感器的型号为 ICP 型的 INV9821;网络分布式采集仪的型号为 INV3062-C2;试验所用弹性力锤的型号为 MSC-3。

如图 6 所示,在第 11 节点 Y 方向施加锤击激励,采样时间为 0.5 s,采样频率为 4 000 Hz;在第 5、10、14 节点布置 3 个加速度传感器,其中第 5、14 节点为测量位置,传感器采集的加速度响应用于识别载荷,第 10 节点为重构位置。由于在试验过程中无法获取不含误差的载荷及待重构位置的真实响应,所以用测量值代替真实值做重构效果对比。

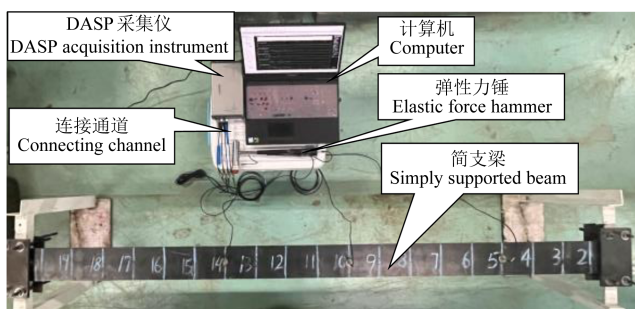


图 4 简支梁试验

Fig. 4 Test of the simply supported beam

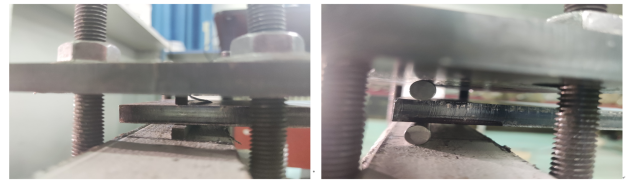


图 5 边界约束条件

Fig. 5 Boundary constraint conditions

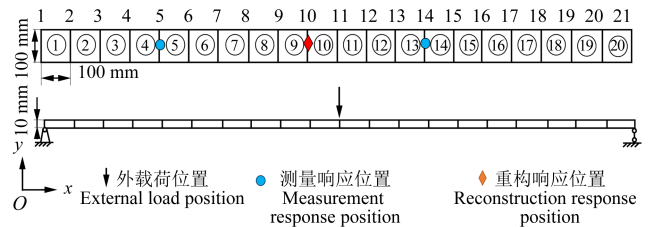
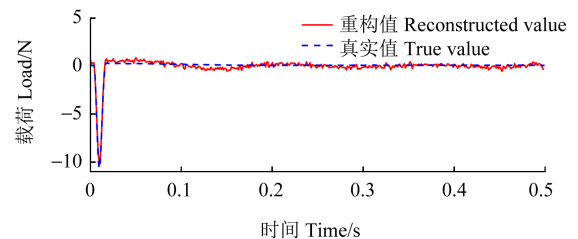


图 6 传感器的布置

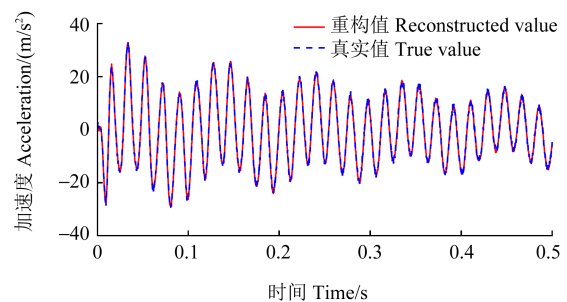
Fig. 6 Arrangement of sensors

载荷识别结果和 10 节点的加速度响应重构曲线如图 7 所示。由图 7 可知,重构曲线和真实曲线吻合较好。



(a) 载荷识别结果

(a) Load identification result



(b) 第 10 节点加速度

(b) Acceleration response at node 10th

图 7 载荷及响应的测量值与重构值对比

Fig. 7 Comparison of measured and reconstructed value of load and response

载荷及第 10 节点加速度响应的重构效果如表 3 所示。所提改进方法无论是识别精度还是识别效率,相较于传统方法均有不同幅度的提升。

两种方法载荷识别精度均不高但差异不明显,可能是以下原因:① TRSVD 在提高奇异值分解效率的同时,可能会损失小部分数据,导致重构精度略有降低;② 改进方法只能降低但不可完全消除传递矩阵误差以及测量误差的影响;③ 简支梁结构相对简单,传递矩阵及测量响应中含有的误差相对较小。

表 3 改进方法的效果对比

Tab. 3 Comparison of the effects of improved methods

方法 Method	运行时间 Running time/s	相对误差 Relative error /%	
		载荷识别 Load identification	第 10 节点加速度 Acceleration at node 10th
改进方法 Improved method	1.76	23.73	7.28
传统方法 Traditional method	6.95	27.41	9.25

5 结论

提出了一种结合 TRSVD 及 TLSM 的改进 Tikhonov 正则化方法,并通过二维桁架和简支梁证明了所提方法的有效性。得出如下主要结论:

1) 改进方法可在同时考虑传递矩阵误差及测量误差时,仅利用有限测量加速度响应识别结构未知载荷,并重构其他未测量位置的响应。

2) 数值仿真分析和试验验证结果均证明了改进方法可在保证载荷识别及响应重构精度的同时,提高载荷识别的计算效率。

3) 在不同等级的噪声影响下,改进方法均能对结构载荷和未知响应进行重构,说明此方法具有一定的鲁棒性。

参考文献 (References)

- [1] 张笑华,肖兴勇,方圣恩. 面向桥梁结构健康监测的压缩感知动力响应信号重构[J]. 振动工程学报,2022,35(3):699-706.
ZHANG Xiaohua, XIAO Xingyong, FANG Shen. Dynamic response reconstruction for bridge structural health monitoring based on compressed sensing[J]. Journal of Vibration Engineering, 2022,35(3):699-706. (In Chinese)
- [2] ZHANG C W, MOUSAVI A A, MASRI S F, et al. Vibration feature extraction using signal processing techniques for structural health monitoring: a review [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2022, 177: 109175.
- [3] 张笑华,吴志彪,吴圣斌,等. 基于移动窗卡尔曼滤波算法的结构响应重构[J]. 振动与冲击,2021,40(21):90-96.
ZHANG Xiaohua, WU Zhibiao, WU Shengbin, et al. Structural response reconstruction based on moving window Kalman filtering algorithm[J]. Journal of Vibration and Shock, 2021, 40(21): 90-96. (In Chinese)
- [4] 董康立,殷红,彭珍瑞. 面向多类型传感器优化布置的结构响应重构[J]. 控制理论与应用,2018,35(9):1339-1346.
DONG Kangli, YIN Hong, PENG Zhenrui. Structural response reconstruction oriented to optimal multi-type sensor placement[J]. Control Theory & Applications, 2018, 35 (9) : 1339-1346. (In Chinese)
- [5] HE J J, GUAN X F, LIU Y M. Structural response reconstruction based on empirical mode decomposition in time domain [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2012, 28: 348-366.
- [6] 邹云峰,付正亿,何旭辉,等. 基于经验模态分解和模型缩聚的动力响应重构方法研究[J]. 工程力学,2022,39(2):67-75.
ZOU Yunfeng, FU Zhengyi, HE Xuhui, et al. Dynamic response reconstruction method based on empirical mode decomposition and model condensation [J]. Engineering Mechanics, 2022, 39 (2) : 67-75. (In Chinese)
- [7] RIBEIRO A M R, SILVA J M M, MAIA N M M. On the generalisation of the transmissibility concept [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2000, 14(1):29-35.
- [8] KAMMER D C. Estimation of structural response using remote sensor locations [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1997, 20(3):501-508.
- [9] LAW S S, LI J, DING Y. Structural response reconstruction with transmissibility concept in frequency domain [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2011, 25(3):952-968.
- [10] LI J, LAW S S. Substructural response reconstruction in wavelet domain [J]. Journal of Applied Mechanics, 2011, 78(4):041010.
- [11] LIU J, LI B. A novel strategy for response and force reconstruction under impact excitation [J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2018, 32(8):3581-3596.
- [12] LIU R X, HOU Z C, WU P B, et al. Dynamic load identification for a power battery pack based on a combined regularization algorithm [J]. Journal of Sound and Vibration, 2022, 529: 116928.
- [13] 王娟,杨庆山. 基于状态空间的时域动态响应重构方法[J]. 建筑结构学报,2016,37(增刊1):460-466.
WANG Juan, YANG Qingshan. Dynamic response reconstruction method in time domain based on state space [J]. Journal of Building Structures, 2016, 37(Suppl. 1) : 460-466. (In Chinese)
- [14] 缪炳荣,周凤,陈翔宇,等. 利用核函数和不同正则化方法的结构载荷识别混合技术研究[J]. 振动工程学报,2018,31(4):553-560.
MIAO Bingrong, ZHOU Feng, CHEN Xiangyu, et al. Research of the structure load identification hybrid technology using kernel function and different regularization method [J]. Journal of Vibration Engineering, 2018, 31(4) : 553-560. (In Chinese)
- [15] TANG Z H, ZHANG Z F, XU Z M, et al. Load identification with regularized total least-squares method [J]. Journal of Vibration and Control, 2022, 28(21/22):3058-3069.
- [16] 张贤达. 矩阵分析与应用[M]. 2版. 北京:清华大学出版社, 2013:336-339.
ZHANG XianDa. Matrix analysis and applications [M]. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2013: 336-339. (In Chinese)
- [17] BAI X L, HUANG G X, LEI X J, et al. A novel modified TRSVD method for large-scale linear discrete ill-posed problems [J]. Applied Numerical Mathematics, 2021, 164: 72-88.

Improved Tikhonov regularization method for load identification and structural response reconstruction

GAO Kele YIN Hong PENG Zhenrui

(School of Mechanical Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: To improve the accuracy and efficiency of load identification and structural response reconstruction, an improved Tikhonov regularization method that simultaneously considers transfer matrix error and measurement error was proposed. Firstly, the state space equation and transfer matrix were constructed through the structural dynamics model to obtain the reconstruction equation of the structural load and response. Secondly, the truncated randomized singular value decomposition method was used to calculate the approximate transfer matrix at the locations of the measurement points, while the total least squares method (TLSM) and the traditional Tikhonov regularization method were combined to identify the load, and then the unknown response was reconstructed by the transfer matrix at the locations. Finally, a numerical simulation and an experimental analysis were carried out for two-dimensional truss and simply supported beam to verify the proposed method. The results show that compared with the traditional Tikhonov regularization method, the proposed method can improve the reconstruction efficiency while guaranteeing the reconstruction accuracy.

Key words: Structural response reconstruction; Load identification; Transfer matrix; Tikhonov regularization

Corresponding author: PENG Zhenrui, E-mail: pzrui@163.com

Fund: National Natural Science Foundation of China (62161018)

Received: 2023-09-26 Revised: 2024-01-02