

Scherk单周期极小曲面力学特性研究

王帅^{1,2} 邓涛² 何佳璐³ 周开发³

(1. 重庆工程职业技术学院 智能制造与交通学院, 重庆 402260)

(2. 重庆交通大学 航空学院, 重庆 400074)

(3. 重庆交通大学 土木工程学院, 重庆 400074)

摘要: 极小曲面具有空间连续光滑的特点,能够有效避免应力集中问题,成为力学超材料研究的重要关注方向。研究了一种 Scherk 单周期极小曲面(Single-Periodic Minimal Surface, SPMS),采用体素重构技术多软件联合生成了空间连续光滑几何模型。利用有限元仿真探究了单周期 Scherk 曲面结构的力学行为和能量吸收特性。分析了极小曲面数学参数对几何构型的影响规律,建立了五种不同参数的极小曲面,探求了在正压和侧压的条件下,五种结构的变形模式与应力分布。借助金属打印技术制作了 Scherk 曲面结构,并进行了准静态压缩试验。结果表明,Scherk 单周期曲面具有明显的负泊松比效应,SPMS 结构呈现的 X 形和 V 形变形模式,能够很好地承受外载荷作用。压缩试验表明,SPMS 结构反力和位移曲线呈现驼峰现象,说明该结构表现出负泊松比和负刚度特性,该特性为其在几何大变形和能量吸收方面的应用研究提供了广阔的空间。

关键词: 单周期极小曲面; Scherk 曲面; 能量吸收; 负泊松比; 负刚度

中图分类号: TG146.2 **DOI:** 10.16579/j.issn.1001.9669.2025.08.006

0 引言

随着超材料领域的发展,超材料越来越多地被广泛应用到各种吸能结构设计中。极小曲面结构是数学方法生成的拓扑曲面,可以在三维方向重复排列组合得到空间周期结构。极小曲面结构因为具有轻质、表面积大、高强度的特性^[1],广泛应用于航天、船舶、汽车等多个领域^[2]。由于其结构具有导数为零的连续非自交曲面,极小曲面具有在三维空间中局部表面积最小^[3],并且通常将有限边界曲面生成为交织缠绕的连续孔洞曲面。这些连续的孔洞不仅没有占据太多空间体积,反而增加了结构折叠的空隙。极小曲面系统结构在吸能效率方面已优于常规周期结构^[4],并在设计界越来越受到关注,包括在高刚度结构^[5]、冲击能量吸收器^[6]、生物膜^[7]和医用骨植入物^[8]中的应用。

围绕三周期极小曲面(Triply Periodic Minimal Surface, TPMS),针对 Primitive、FRD(Schoen's Four-edges)、IWP(I-Wrapped Package)和 Gyroid 4 种结构力学性能的研究最为广泛。研究发现,FRD 结构具有优异的抗冲击性能^[9]。其中的圆柱形 Gyroid 结构比吸能和平均破碎荷载与相对密度具有幂函数的关系^[10]。极小曲面夹层结构受不同孔型、尺寸、孔隙率、空隙分

布的影响明显,通过研究分析了上述 4 种因素对结构形态的影响规律^[11],通过推算最终确定出所需要的最优结构参数。梯度多孔支架^[12]可以以特定的方式实现分级孔径变化,设计新的极小曲面结构。IWP 型极小曲面在拉伸下表现出优异的吸能能力^[13]。应用方面,极小曲面夹层结构能够有效提升吸能盒碰撞时的比吸能,同时延缓初始峰值力的增长^[14]。将梯度化的极小曲面结构与负泊松比结构相结合可以更有效地提高能量吸收特性和车辆耐撞性^[15]。模拟自然人造骨骼结构,基于 TPMS 设计一种点阵结构,为超轻材料设计提供了新的途径^[16]。无人机机臂的轻量化设计中采用最佳结构密度分布实现了结构优化^[17]。仿生股骨移植植物内部填充极小曲面的多孔螺旋状结构^[18],能够很好地近似替代小鼠的承重部位。多孔仿生骨骼移植物的压缩模量远低于天然骨,可有效减小应力屏蔽效应^[19]。其在模拟人类皮质骨结构^[20]方面也具有明显优势。

极小曲面结构研究为工程结构设计带来了新的思路与方向。近年来,有学者不断利用极小曲面结构优异的力学性能,将其运用于众多工程结构物设计中,取得了一定的成果。由于极小曲面结构是存在于

收稿日期: 2023-12-10 修回日期: 2024-01-16

基金项目: 国家自然科学基金项目(52275051); 重庆交通大学自然科学类揭榜挂帅项目(XJ2023000701); 重庆市研究生导师团队建设(JDDSTD2022007); 重庆市研究生联合培养基地建设项目(JDLHPYJD2022001)

作者简介: 王帅,男,1987年生,河南南阳人,硕士,副教授; 主要研究方向为机械设计和力学超材料等领域; E-mail:ws15993500427@163.com。

引用格式: 王帅,邓涛,何佳璐,等. Scherk单周期极小曲面力学特性研究[J]. 机械强度,2025,47(8):48-58.

WANG Shuai, DENG Tao, HE Jialu, et al. Study on the mechanical properties of Scherk single-periodic minimal surface[J]. Journal of Mechanical Strength, 2025, 47(8): 48-58.

自然界中的高度拓扑化的结构,其几何连续性能有效地改善结构应力集中等问题,前期大量的研究主要围绕三周期极小曲面展开,而对于单周期结构的研究稀少。从数学拓扑结构中可以发现,相比于三周期极小曲面,单周期极小曲面空间构型更加简洁,在结构轻量化方面更具优势,同时兼具极小曲面光滑连续的几何特性。因此,本文探究了一种新型单周期极小曲面的力学行为和吸能特性,为结构大变形和能量吸收装置的应用研究提供新的方案。

1 模型与材料

1.1 Scherk 曲面生成

在众多的极小曲面种类中,单周期极小曲面(Single-Periodic Minimal Surface, SPMS)具有空间交互连通、拓扑亏格交错排列等几何性质。单周期极小曲面具有与三周期极小曲面相同的空间几何特性,而且相比于三周期极小曲面,还具有几何拓扑简单、表面积和体积更小的优点。目前对于单周期极小曲面的研究较少,关于其在工程结构中的应用研究更稀少。基于以上背景,本文选取一种 Scherk 单周期极小曲面,其隐函数数学表达式见式(1)。利用数学分析软件 Mathematica 对 Scherk 曲面进行三维数学曲面建模,如图 1 所示,其中 $x_0=\pi$ mm, $y_0=\pi$ mm, $z_0=2\pi$ mm。

$$\sinh x \times \sinh y - \sin z = 0 \quad (1)$$

式中, (x, y, z) 为曲面上任意一点的空间坐标。其中 $-\pi \leq x \leq \pi$, $-\pi \leq y \leq \pi$, $-2\pi \leq z \leq 2\pi$, 单位均为 mm。

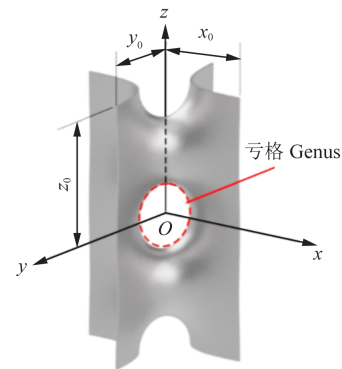


图 1 Scherk 极小曲面胞元

Fig. 1 Scherk minimal surface cell

根据式(1),借助数学分析软件 Mathematica 生成 Scherk 单周期极小曲面,以立体光刻(STereo Lithography, STL)格式输出模型。由于 STL 格式是三角面片结构,曲面光滑程度取决于画法的最小单元尺寸,加之软件接口兼容性问题, Mathematica 软件生成的模型无法满足有限元计算。因此,使用 Materialise Magics 软件进行模型修复和网格细化。接着,对模型进行加厚实体化处理,实现极小曲面 STL 三角单元网格模型的可计算性。其建模流程如图 2 所示。然后,将建立的几何模型导入 HyperWorks 软件进行体素重构和网格划分。最后,将模型导入 Ansys 软件中进行计算。

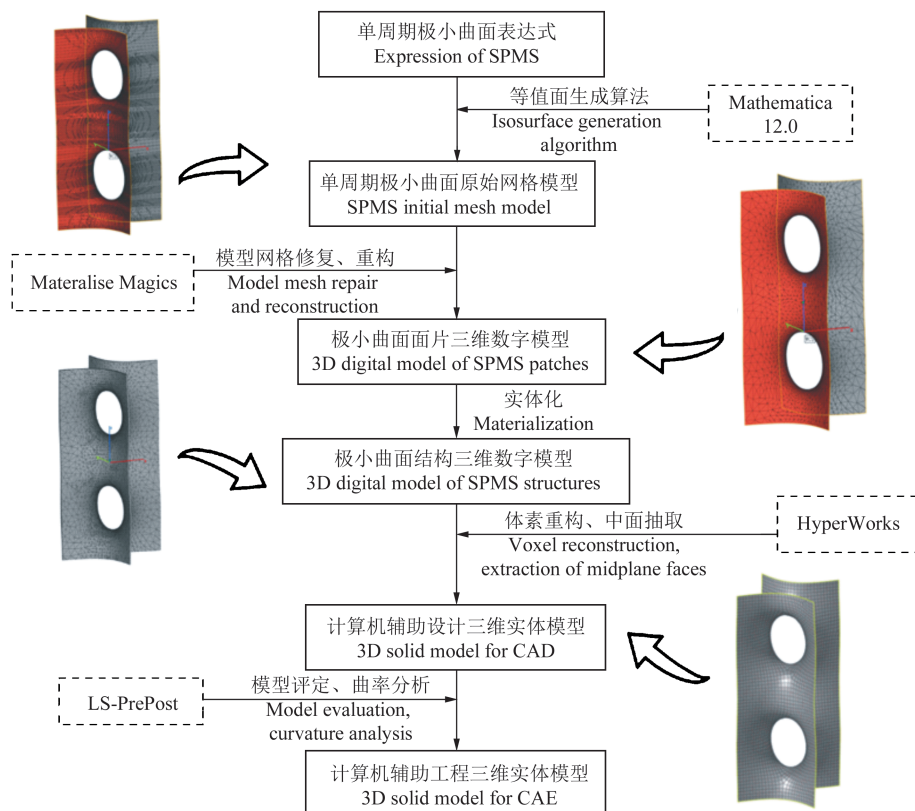


图 2 极小曲面实体模型重构

Fig. 2 Reconstruction of the solid model for the minimal surface

根据极小曲面的数学定义,其空间曲面的平均曲率 H 为0。平均曲率 H 的表达式为

$$H=1/2(k_1+k_2) \quad (2)$$

式中, k_1 、 k_2 分别为极小曲面结构的第一主曲率与第二主曲率。

利用LS-PrePost软件对所建立的极小曲面三维数字模型进行曲率分析。图3所示为LS-PrePost软件对

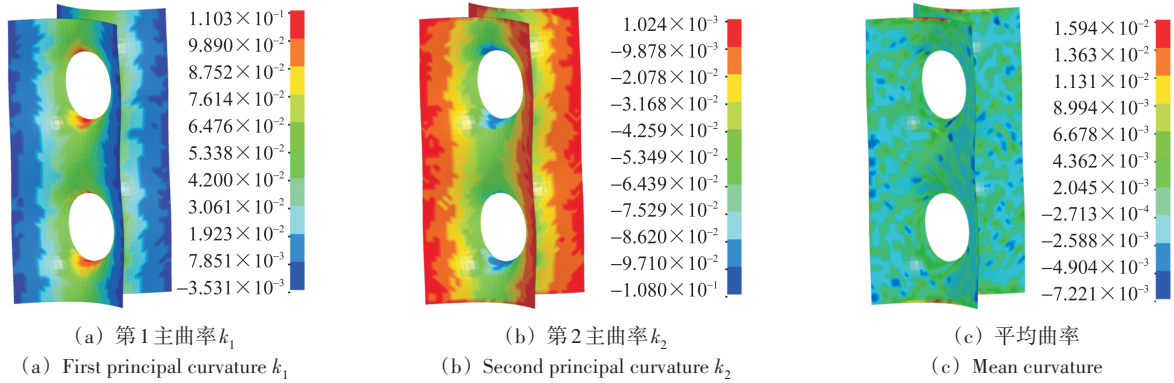


图3 极小曲面曲率

Fig. 3 Curvature of the minimal surface

1.2 有限元模型

本文设置正向受压和侧向受压两种工况,探究单周期Scherk曲面结构的力学特性。在正向准静态压缩仿真时,在结构的上、下表面各放置一块外形尺寸为 $70\text{ mm}\times 70\text{ mm}\times 3\text{ mm}$ 的刚性板,它既能模拟准静态压缩试验时的边界条件,又便于载荷的施加。参考准静态压缩试验标准,采用位移控制法施加载荷,对上顶板施加竖直向下 10 mm 的位移,下底板采用完全固定约束。正向压缩时的加载如图4(a)所示。侧向准静态压缩试验时,同样在每个结构的左、右端面各放置一块外形尺寸为 $70\text{ mm}\times 130\text{ mm}\times 3\text{ mm}$ 的刚性板,对左侧刚性板施加水平向右 10 mm 的位移,对右侧刚性板采用完全固定约束,如图4(b)所示。

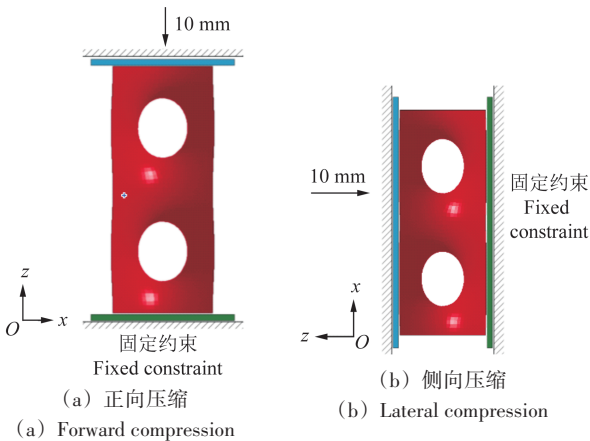


图4 2种加载方式示意图

Fig. 4 Schematic diagram of two loading modes

所建立的极小曲面结构三维数字模型主曲率进行计算的结果。结构各处的主曲率最大值为 0.0159 ,最小值为 -0.007 ,其最大误差为 1.59% ,满足曲面设计标准。由此可见,本文采用极小曲面体素重构方案所生成的极小曲面模型不但能够解决STL格式模型不可计算的问题,而且模型精度较高,满足相关设计的行业规范。

在准静态压缩试验中,使用HyperMesh软件对上述模型进行有限元网格划分。其中,网格类型采用壳单元,使用平面四边形和三角形2种网格类型;两端刚性板采用六面体网格进行划分,最小网格单元尺寸为 1 mm 。以结构正向受压为例,网格划分的总单元数为 7730 ,节点总数为 9191 。经HyperMesh软件检查,网格划分精度均满足要求。

Scherk曲面属于薄壳结构,且材料为结构钢,在压溃阶段可能出现穿透现象;同时为了防止有限元计算过程中,因接触类型选取或设置不当导致计算结果失真或错误。所以,本文设置了极小曲面结构在两种加载方式下的接触关系,以提高准静态压缩仿真结果的精度。根据结构的几何形状以及准静态压缩试验仿真结构破坏的可能性,在LS-DYNA软件中定义的各几何体之间的接触关系(以正向压缩为例)如表1所示。

表1 接触关系

Tab. 1 Contact relation

名称 Name	接触类型 Contact type	关键字 Keyword
上顶板与Scherk曲面之间接触 Contact between the top plate and Scherk surface	面-面接触 Surface-to-surface contact	CONTACT_AUTO MATIC_SURFACE E_TO_SURFACE
下底板与Scherk曲面之间接触 Contact between the bottom plate and Scherk surface	面-面接触 Surface-to-surface contact	CONTACT_AUTO MATIC_SURFACE E_TO_SURFACE
极小曲面夹层自接触 Self contact of the minimal surface sandwich	自接触 Self contact	CONTACT_AUTO MATIC_SINGLE_SURFACE

1.3 模型制备

选择性激光熔化 (Selective Laser Melting, SLM) 技术是指使用高功率激光将每一层金属粉末完全熔化,金属内部颗粒融合在一起,形成致密坚固的打印物体。目前,这项工艺只能用于某些金属,例如,不锈钢、工具钢、钛、钴铬合金和铝。SLM 制造过程中出现的高温梯度会导致产品内部出现应力和错位,从而损害物理性能,模型加工完成后的热处理工艺对消除内部出现的应力和错位至关重要。SPMS 模型加工使用 SLM 技术,材料为 316L 不锈钢,材料屈服强度 $R_{p0.2} = 250$ MPa,其他力学参数如表 2 所示。加工的成品试样高 125 mm,相邻两边宽 88 mm,壁厚 2 mm,如图 5 所示。采用热等静压(Hot Isostatic Pressing, HIP)热处理方法对试样进行后处理,以消除结构加工过程中的残余应力和材料内部缺陷。本构关系选用双线性随动强化模型。

表 2 结构钢材料参数

Tab. 2 Parameters of the structural steel

密度 Density $\rho/(\text{kg}/\text{m}^3)$	弹性模量 Modulus of elasticity/ MPa	屈服强度 Yield strength R_f/MPa	切线模量 Tangent modulus E_t/MPa	泊松比 Poisson ratio ν	失效应变 Failure strain ϵ_f
7 850	210 000	250	2 100	0.3	0.6

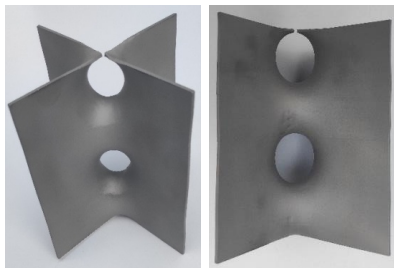


图 5 SLM 技术加工的 316L 不锈钢试样

Fig. 5 316L stainless steel sample processed by SLM technology

2 分析与讨论

2.1 参数与方程

研究发现,极小曲面数学表达式参数的变化使得极小曲面结构出现高度几何非线性的变化^[21]。本文将 Scherk 单周期极小曲面表达式改写为式(3)所示的形式,隐函数方程右边增加参数 C ,以探究参数 C 的变化对 Scherk 曲面几何构型的影响。

$$C = \sinh x \times \sinh y - \sin z \quad (3)$$

其中,参数 C 的有效范围为 $[-1, 1]$ 。

如图 6 所示,发现随着单周期极小曲面数学表达式中参数 C 的增大,极小曲面结构的几何构型的确存在着非线性变化的行为。具体表现为随着参数 C 的增大,单周期极小曲面的亏格孔径逐渐增大。当 $C=1$ 时,亏格消失,曲面相连为一体。经测算,5 个结构的质量相近。为探究 Scherk 曲面数学表达式中 C 参数对极小

曲面结构静力学性能的影响,本文从参数 C 的有效区间中选取了其等于 -0.8 、 -0.4 、 0 、 0.4 和 0.8 时所对应的极小曲面作为计算对象,分别命名为 SPMS-C1、SPMS-C2、SPMS-C3、SPMS-C4、SPMS-C5。

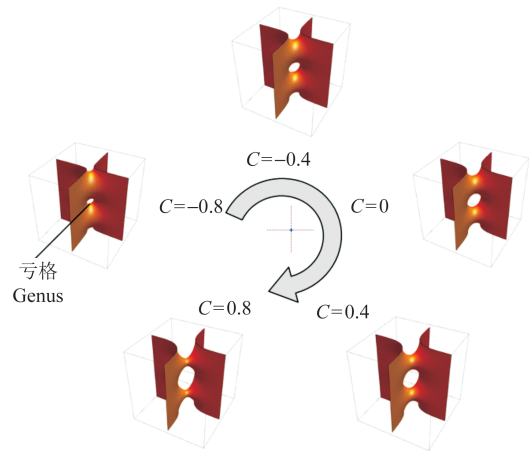


图 6 参数 C 对极小曲面几何结构的影响

Fig. 6 Effect of parameter C on the minimal surface geometry structure

2.2 位移与应力

2.2.1 侧向压缩

图 7 为 C 取不同参数值时极小曲面侧向静力学压缩试验的等效塑性应变云图。SPMS-C1、SPMS-C2、SPMS-C3、SPMS-C4 和 SPMS-C5 五个结构在受侧向压缩的过程中,主要呈现出 V 形折叠变形、X 形折叠变形以及均匀变形 3 种不同的变形模式。SPMS-C1 结构主要以 X 形的自折叠机制进行变形,这是因为参数 $C=-0.8$ 时生成的极小曲面结构在中部的亏格横截面积较大,结构在受压时先在该亏格处发生变形;亏格是孔洞结构,导致整个结构在亏格周围出现明显的向内凹陷变形;并且 2 个亏格中间的支撑曲面由于受到两侧亏格的向内挤压,两侧亏格在中间支撑部位形成折叠,最终使整个结构向内部挤压收缩。但是,在亏格两端,材料向外流动导致结构两端向外突出,形成了中间挤压、两端膨胀的 X 形折叠变形模式。对于 SPMS-C2 结构和 SPMS-C5 结构,参数 C 的变化导致亏格孔洞直径增大,表面积增加;在压缩过程中,2 个亏格中间的支撑部位和亏格两端不足以承载结构所承受的外载荷,如图 7(c) 所示。因此,SPMS-C2 结构和 SPMS-C5 结构在受压时,呈现出纵向亏格与上部空腔结构整体沿受压方向向下挤压。同时,由于外载荷作用,亏格孔也发生变形,使两端材料向外突出,形成结构整体沿 z 轴方向对称 V 形折叠变形。由图 7(b) 可以观察到,SPMS-C3 结构和 SPMS-C4 结构主要呈现出整体均匀变形,其变形部位主要发生在亏格周围。相比

于另外3种结构,SPMS-C3结构和SPMS-C4结构亏格孔洞直径较小,结构材料整体分布均匀;在外载荷作用

下,结构各个部分发生塑性变形均匀一致,使得整个结构整体上没有出现明显的折叠外凸等大变形。

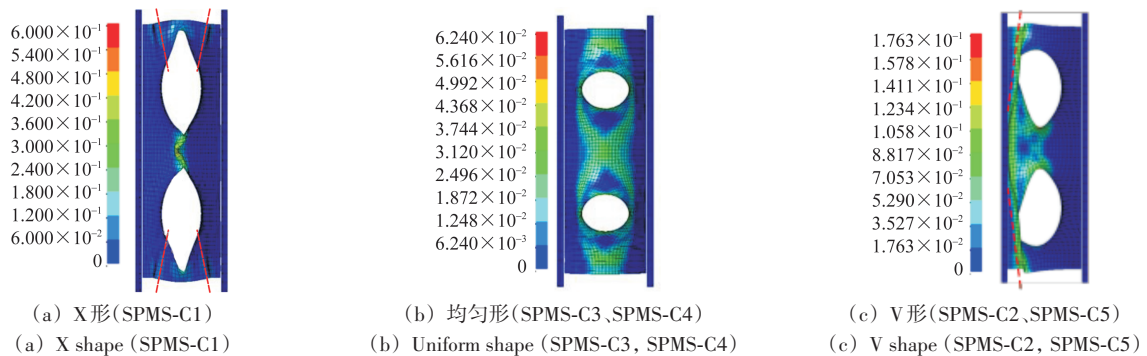


图7 塑性应变云图

Fig. 7 Nephogram of plastic strains

图8是SPMS结构在侧向受压时的Von Mises应力云图。由图8可以看出,SPMS-C2、SPMS-C3、SPMS-C4以及SPMS-C5 4个结构在侧向压缩的过程中均有应力集中的现象产生,且其应力集中的分布区域与等效塑性应变的产生区域一致。对于SPMS-C3结构和SPMS-C4结构的应力集中区域和等效塑性应变较大的区域成对称分布。特别是其亏格结构处等效应力分布还呈现出X形分布现象。在压缩过程中,SPMS-C3结构和SPMS-C4结构的最大等效应力分别为340.3、312.4 MPa,达到材料屈服强度,材料进入塑性变形阶段。这说明在侧向压缩的过程中,SPMS-C3结构和SPMS-C4结构整体应力分布均匀,使得受压过程中产生的应力有效向外传递,这将有利于结构整体承

载力的提升。对于SPMS-C2结构和SPMS-C5结构,其等效应力分布区域呈现出均匀性。这是因为在侧向压缩的过程中,SPMS-C2结构和SPMS-C5结构下部呈现出V形折叠的变形模式,导致两种结构在变形的过程中不能均匀受力。SPMS-C2结构的高应力区主要集中在V形折叠的折痕处。对于SPMS-C1结构,在侧向压缩的过程中,最大应力主要集中在亏格的中间横截面处,von Mises应力只有SPMS-C3结构和SPMS-C4结构的34%。这是因为参数 $C=-0.8$ 时,所生成的极小曲面结构亏格横截面较小,该截面强度较低,抵抗变形能力较弱。该结构最先在该截面处发生破坏,进而导致整个结构的失效。因此,该结构的承载能力最低。

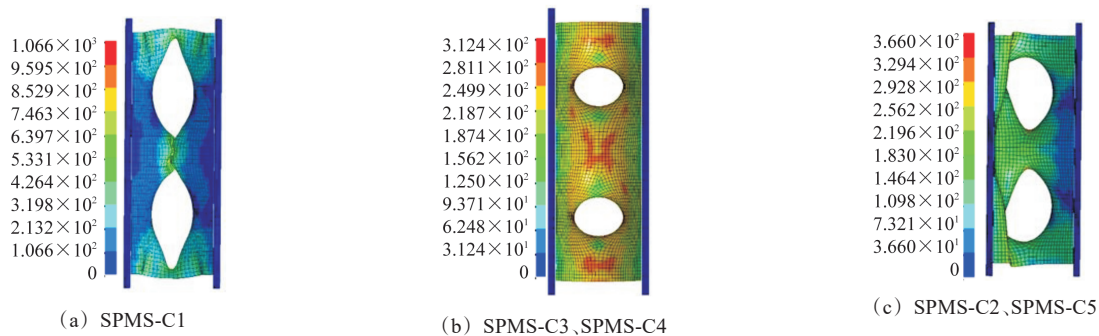


图8 von Mises应力(单位:MPa)

Fig. 8 von Mises stress(unit: MPa)

2.2.2 正向压缩

图9为不同 C 参数下极小曲面正向静力学压缩试验的等效塑性应变云图。由图9可以看出,SPMS-C1、SPMS-C2、SPMS-C3、SPMS-C4和SPMS-C5五个结构均呈现出纵向逐层折叠的变形模式。以SPMS-C2结构为例,可以观察到,结构在受到正向压缩时,极小曲面的亏格结构处产生了较大的塑性应变,说明结构在受到正向压缩时,亏格附近孔洞的存在使得结构缺失支撑,外载荷作用下Scherk曲面在亏格处向外膨胀,表现出负泊松比现象。两个亏格相邻部位材料的

限制结构向内收缩。亏格处负泊松比效应导致胞元整体产生了纵向逐层折叠的变形模式。同时,随着参数 C 的增大,从SPMS-C4到SPMS-C5,亏格结构的孔径逐渐减小,负泊松比效应减弱,且两种结构的应变与前三种结构相比减少了45%。由于负泊松比效应的存在,Scherk曲面在受到正向压缩时,结构受力均匀,沿亏格处的变形规律一致。压缩过程中,极小曲面结构在亏格边缘容易发生变形,而在亏格内部结构处,由于形成了一个闭合的圆孔形几何结构,在受到

外部荷载作用时,交互连通的亏格结构成为主要的受力结构,在亏格处受拉、亏格间受压,导致结构逐层折叠变形。由图 9 可以观察到,随着参数 C 的增大,最

大应力逐渐由亏格间相连中心区域向结构四周扩散,使得极小曲面结构更多的区域能够发生塑性变形,进而实现结构的大变形。

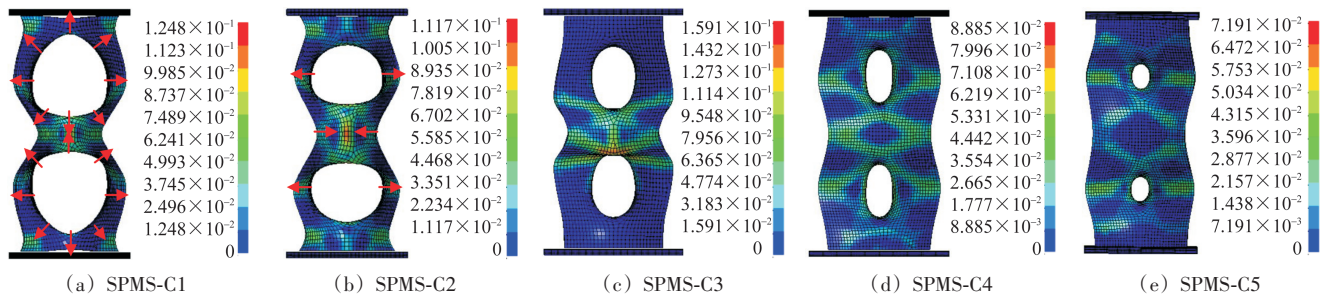


图 9 等效塑性应变

Fig. 9 Equivalent plastic strain

2.3 准静态检验

根据仿真结果对模型的整体能量关系进行分析,检验其是否为准静态过程。由能量平衡关系:

$$E_T = E_I + E_V + E_{FD} + E_{KE} - E_W \quad (4)$$

式中, E_T 为压缩试验系统总动能,在仿真过程中为定值; E_I 为系统内能,包括塑性应变能与弹性应变能; E_V 为黏性力学机制所耗散的能量; E_{FD} 为摩擦所耗散的能量; E_{KE} 为系统动能; E_W 为外力所做的功。在准静态压缩试验的过程中,由于各个模型的加载速度非常小,所以动能非常小。结构在压缩的过程中发生大变形,在极小曲面结构中形成了多个局部塑性铰,因此外力功几乎等于模型内能。根据标准,准静态压缩试验中的动能一般不超过内能的 5%。正向准静态压缩模型的动能均在内能的 5% 以下, Scherk 单周期曲面静力学压缩仿真能量满足要求。

2.4 反力与能量吸收

2.4.1 侧向压缩

图 10 所示为是 5 种不同的极小曲面结构在受到侧向压力时的力学性能。从整体上看,图 10(a) 所示

的力-位移曲线变形规律与方管、圆管等吸能构件压溃试验的力-位移曲线类似。结构整体变形趋势是:在受到侧向压力后,在 0~5 mm 时反力快速增加,到达第 1 个初始峰值,最大峰值力约为 4 200 N;随着压缩位移增加,15 mm 以后峰值力逐渐下降,并趋近于稳定,最后反力约为 3 500 N。SPMS-C3 结构在 0~15 mm 时,反力几乎不变保持 4 000 N,15 mm 之后反力下降,最后约为 3 750 N。SPMS-C1、SPMS-C2、SPMS-C4 以及 SPMS-C5 结构在压缩位移 0~5 mm 处产生最大峰值载荷。结合它们的变形模式(图 7)和应力分布(图 8)可知,在加载初期,上述 4 个结构孔径比(亏格孔面积与极小曲面表面积的比值,孔径比 $i=S_0/S$, S_0 为孔洞的横截面积, S 为结构表面积)相对较大,结构的整体承载能力较弱,在外荷载作用下,结构快速变形并进入塑性菱形阶段,因此所产生的峰值载荷较大。而 SPMS-C3 结构在受压初期,由于中部的亏格结构孔径比最小,结构受压时整体受力均匀,承载能力较强,所以在压缩初期载荷没有形成峰值。

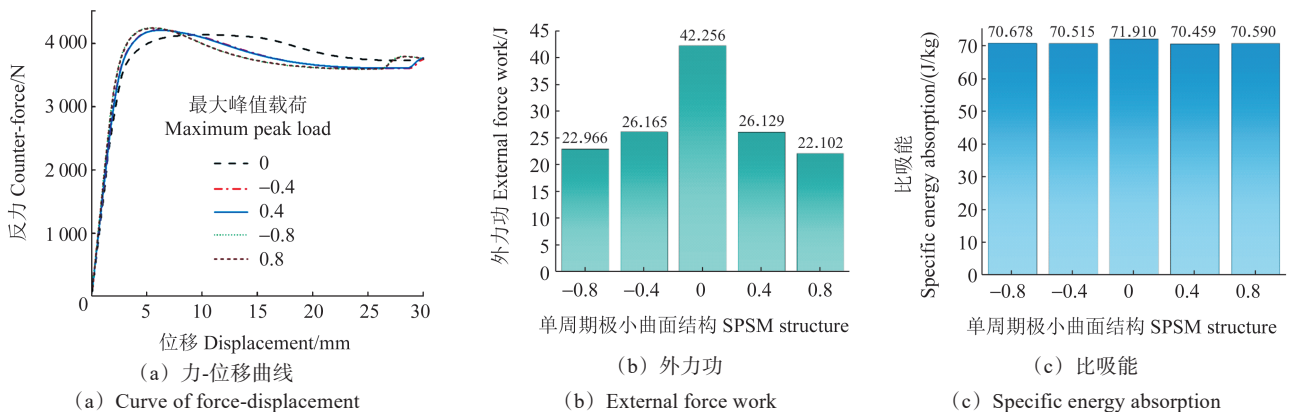


图 10 侧向压缩静力学性能

Fig. 10 Statics performance under the lateral compression

以极小曲面结构受侧向载荷作用下的比吸能作为评价指标,来判定单周期极小曲面结构能量吸收特

性。首先,根据图 10(a) 计算各结构力-位移曲线的面积,该面积即为夹层结构受到压缩时所吸收的能量:

$$E = \int_0^S F dS \quad (5)$$

式中, E 为总吸收能; S 为结构位移; F 为外载荷。

其次, 单位质量比吸能 E_{SEA} 可表达为

$$E_{SEA} = E/M \quad (6)$$

式中, M 为结构总质量。

根据式(5)计算得到结构侧向压缩过程吸收的外力功[图 10(b)]。其中, SPMS-C3 结构外力功最大, 为 42.256 J; 其次为 SPMS-C2 和 SPMS-C4; 最小的是 SPMS-C5, 在 22.1 J 左右。SPMS-C3 结构的外力功约为 SPMS-C1 结构和 SPMS-C5 结构的 2 倍。根据式(6)计算得到结构侧向压缩过程吸收的比吸能[图 10(c)]。由图 6 可知, 5 个结构的质量相差不大, 这说明参数 C 对极小曲面结构的质量改变影响不大。因此, 侧向压缩时, 结构的比吸能主要和外力功成正比。如图 10(c) 所示, SPMS-C3 结构的比吸能稍高于其他 4 个结构, 数值达到 71.910 J/kg; 其次是 SPMS-C1、SPMS-C5、SPMS-C2、SPMS-C4 结构。结合前文的分析可以看出, SPMS-C2 结构在受压的过程中, 发生塑性变形的区域仅在 V 形折痕处产生, 塑性流动区域较小, 因此其吸能效果不佳。对于 SPMS-C3 结构, 比吸能稍大于其他 4 个结构的原因在于压缩过程中明显的负泊松比效应, 在亏格连接部位发生内错挤压效应, 进而产生较大的塑性变形, 使得其比吸能较大。在工程上, 这是一种不良的力学变形模式。相反, SPMS-C3 结构和 SPMS-C4 结构在受压的过程中, 等效塑性应变均匀分布于极小曲面的亏格结构上, 使得结构在受到侧向压缩时在亏格处发生较大的塑性流动, 从而有效吸收外力作用下的变形, 充分发挥了极小曲面结构孔径比大的优点。

2.4.2 正向压缩

在正向压缩过程中, Scherk 曲面反力随位移变化的曲线规律与结构在侧向受压时的力-位移曲线规律基本一致, 如图 11(a) 所示。该曲线包含 3 个阶段:

①上升阶段, 反力随着位移的增加而迅速增大; ②峰值阶段, 材料反力到达最大值; ③下降阶段, 反力达到峰值后开始下降。该曲线的变化说明反力不是定值, 反力的大小和方向都在发生变化。对比图 11(a) 中的五个结构正向压缩时反力-位移曲线, 五个结构均出现峰值反力, 且出现 2 次。第 1 次峰值反力出现在外载荷位移约为 2 mm 时, 最大峰值反力约为 8 000 N。第 2 次峰值反力出现在外载荷位移约为 10 mm 时, 最大峰值反力约为 4 000 N。由图 11(a) 可见, 反力随着位移的变化先增大后减小, 又增加又减小, 表现出“驼峰”现象。

Scherk 曲面在承受外载荷静压时刚度是变化的。刚度计算公式 $k=F/\delta$, 式中 F 是作用于结构的恒力, δ 为由于受力而产生的变形。根据刚度计算式可以发现, 在施加位移 0~2 mm 时刚度为正值, 2~5 mm 时刚度为负值, 5~10 mm 时刚度为正值, 10 mm 以后刚度为负值。刚度为负值说明, Scherk 曲面具有负刚度特性。由图 6 可知, 结构还具有负泊松比特性, 因此该结构具有负泊松比和负刚度两个特性。

同样, 通过计算各曲线的线下面积, 可以得出各结构在受到正向压缩时吸收的外力功与结构的比吸能, 分别如图 11(b)、图 11(c) 所示。由图 11(b) 可以发现, 5 个结构在受到正向压缩时, 吸收的外力功的变化趋势是: SPMS-C3 最大, 为 22.830 J; 其次是 SPMS-C4 和 SPMS-C2, 约为 20.4 J; 最小的为 SPMS-C1, 约为 17.5 J。SPMS-C3 结构外力功比 SPMS-C5 和 SPMS-C1 约提高了 22%。由图 11(c) 可知, SPMS-C4 结构在受到正向压缩时, 比吸能达到 883.995 J/kg, 其他 4 种结构比吸能从大到小依次是 SPMS-C2、SPMS-C3、SPMS-C1 和 SPMS-C5; 其中比吸能最大的 SPMS-C4 结构相比于最小的 SPMS-C5 结构, 比吸能提升了 11%。这也说明, 在受到正向压缩载荷时 SPMS-C4 结构吸能能力较其他结构好。

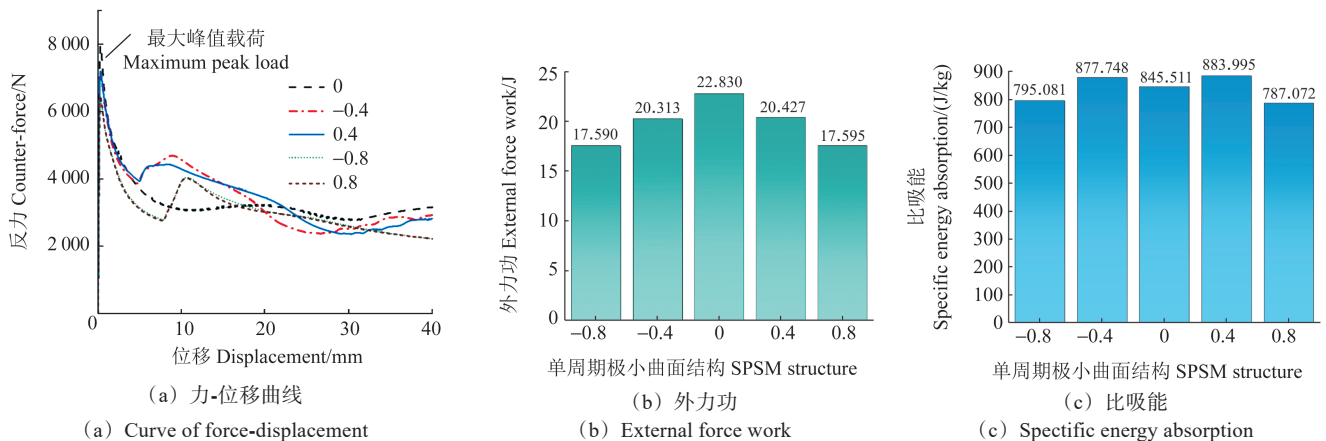


图 11 正向压缩静力学性能

Fig. 11 Statics performance under the forward compression

通过对 SPMS-C1、SPMS-C2、SPMS-C3、SPMS-C4 和 SPMS-C5 这 5 个结构进行静力学正向压缩与侧向压缩 2 种加载方式,探究了上述 5 类结构在受到外力作用时的变形模式以及相关的力学响应。可见,SPMS-C4 结构即参数 $C=0.4$ 时,其正向压缩性能与侧向压缩性能均优于其他 4 种结构。特别是在受到正向压缩时,SPMS-C2 比吸能比排在最后的 SPMS-C5 的高 12.31%。而在侧向压缩的过程中,排除 SPMS-C1 结构不良的失稳变形模式外,SPMS-C3、SPMS-C4 和 SPMS-C5 夹层结构的比吸能相当,即这 3 个结构抗侧向压缩的力学性能相当。

3 SPMS 压缩试验

3.1 试验过程

从有限元模拟结果可以看到,单周期极小曲面结构上具有高度的对称性,同时亏格的连通功能使得该结构能够降低自身质量,吸能效果显著提升。极小曲面连续光滑的数学特性,使得结构在受力时均匀连续变形。为了验证该结构的力学性能,对该结构进行静态压缩试验。压缩试验在万能拉伸试验机上进行。试验过程采用位移连续控制,加载速率为 5 mm/min,总压缩位移为 40 mm。压缩过程应变利用静态应变仪采集,压缩试验装置如图 12 所示。

图 13 所示是 SPMS 打印模型静态压缩过程。在压缩时该结构的变形首先出现在亏格位置,试验现象与有限元模拟结果一致,首次压溃的位置出现在模型底

部。124 s 时结构底端第 2 亏格处出现明显收缩现象。此时第 1 亏格处向内收缩,第 2 亏格处向外膨胀。压缩变形部位形成 X 形内凹效果。随后,变形逐渐开始向上传递,396 s 时第 2 亏格处全部折叠收缩,折叠一起。图 13 中 396 s 时第 3 亏格开始向内收缩变形,变形效果与第 1 和第 2 亏格处变形效果一致,最后形成 X 形内凹效果。518 s 时结构受压结束,第 3 亏格基本重叠一起,第 4 亏格向外膨胀。整个结构呈现明显的向内收缩现象,表现出明显的负泊松比效应。多次试验证明,SPMS 表现出良好的大变形效果,同时结构出现的 X 形折叠现象重复出现,结构表现出明显的负泊松比效应。随着亏格数的增加折叠变形越容易,而且重复折叠也更加规则。

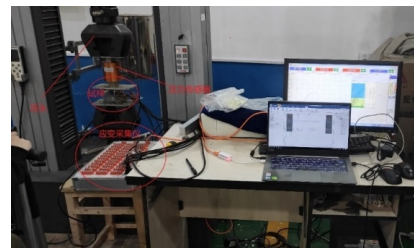


图 12 静力压缩试验装置

Fig. 12 Static compression test device

卸载后,试样变形如图 14(c)所示,从中可见局部出现断裂现象,而结构整体逐级均匀折叠在一起。图 14(a)所示正面呈现明显的逐层折叠效果。由图 14(b)所示顶面可以看到,SPMS 压缩后仍具有高度对称性,4 个方向都均匀折叠。



图 13 压缩变形过程

Fig. 13 Process of the compression deformation

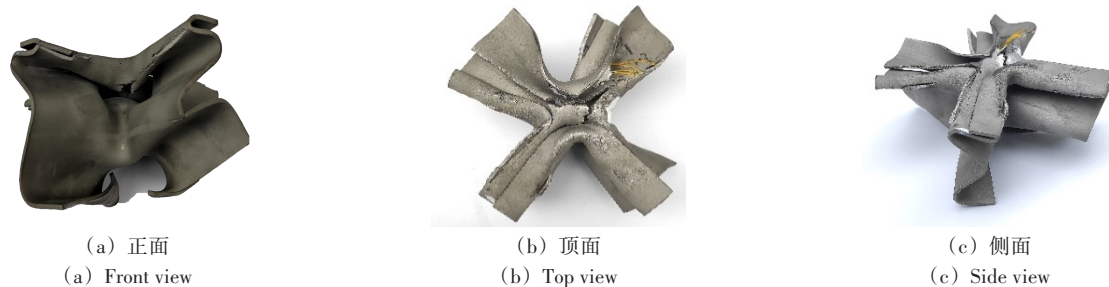


图 14 试样压缩变形结果

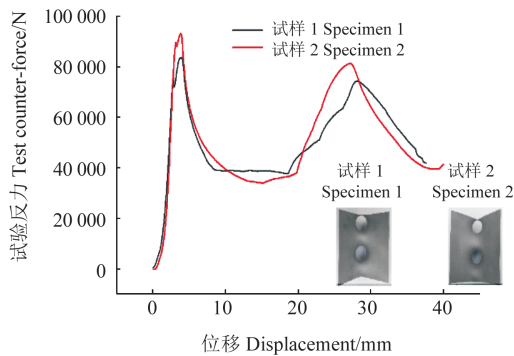
Fig. 14 Compression deformation results of specimens

3.2 试验结果

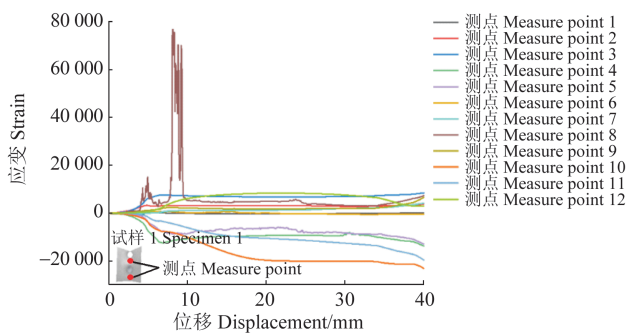
准静态试验测定了SPMS的整体变形和压溃过程。采集了曲面亏格处的应变,同时采集了结构整体与上层板之间的接触反力和位移。图15(a)给出了试验反力与位移关系。由图15(a)可见,SPMS夹层整体受压时,接触反力呈现“驼峰”现象,即随着位移的增大,接触反力先增大后减小,再增大又减小,反力和位移关系呈现4个阶段。以试样2为例,在第1阶段,当压缩位移不超过5 mm时,接触力随位移增加快速增大,最大反力达到95 000 N;在第2阶段,位移在5~20 mm压缩时,反力快速下降,下降到38 000 N左右,反力下降了59.6%;在第3阶段,位移在20~27 mm时,反力继续增大,此时最大反力只达到81 000 N,与第1次最大峰值反力相比,下降了14.7%;在第4阶段,位移在28~40 mm时,反力随位移增加逐渐下降。最后达到42 000 N,基本上达到第2阶段水平。由图15(a)可以明显看出,结构反力随位移的变化并没有断裂破坏,而是均匀折叠在一起,如图14所示。根据刚度定义

$$k = F/\delta \quad (7)$$

式中, k 为结构刚度; F 为作用于结构的恒力; δ 为由于力而产生的变形。



(a) 反力与位移
(a) Counter-force and displacement



(b) 应变与位移
(b) Strain and displacement

图15 试验反力与应变

Fig. 15 Test counter force and strain

根据式(7),可以发现受压的第二和第四阶段,SPMS结构表现出负刚度效应。力和位移的“驼峰”现象还说明该结构在不增加力的情况下,能够多次折叠变形。同时,变形过程中随着位移的增加,力在减小。

当结构所受力达到材料屈曲极限后,结构反力不再增加,反而位移逐渐增大,负刚度效应很好地实现了结构的稳定大变形。

图15(b)所示为压缩试验中测点位置应变。由图15(b)可见,10个测点中有5个测点的应变数据为正值,5个测点的应变数据为负值。并且,所有测点数据变化趋势也分为4个阶段:第1阶段为线性增长阶段,位移在0~5 mm时,应变随位移增加呈线性快速增长趋势;第2阶段为平台阶段,位移在5~22 mm时,位移在增加,而应变保持不变;第3阶段为第2线性增长阶段,此时位移在22~27 mm,应变出现第2次增加;第4阶段为第2平台阶段,从27 mm开始直到加载结束,应变增加到最大并保持不变。应变的变化趋势与反力和位移的变化趋势一致,也验证了反力变化出现的“驼峰”现象。反力出现2个线性增长阶段、2个下降阶段,下降阶段表现出明显的负刚度效应。应变的4个阶段也解释了反力与位移表现出的负刚度效应。在2个平台阶段应变保持不变,说明结构内部应力到达1个峰值,并一直保持不变。应力的产生使得结构产生形变,从而表现出位移增加。此时材料进入屈服阶段,加上亏格结构和极小曲面连续光滑特性,结构在峰值应力作用下出现折叠压溃现象。结构内部光滑曲面向亏格处压缩流动聚集,聚集材料产生强化作用,产生反力,抵消了一部分外力,从而使得反力出现下降现象。第2平台阶段的出现,是第1亏格弯曲压溃重叠后,变形向上传递的结果。压缩第2亏格时,需要继续施加外力,使得结构持续变形,这也是外力第2次增加的原因。

3.3 结果对比

压缩试验过程中发现,SPMS结构表现出逐层收缩行为,即负泊松比效应。应变分析发现,SPMS结构泊松比都为负数,且最大可以达到-2.7,如图16所示。由图16可以看出,结构受压初期,变形快速,泊松比最大,随着结构逐级压溃,变形逐渐减小,应变也逐渐减小,泊松比减小,最后泊松比值为-0.4。泊松比的变化说明了压缩中结构压溃过程的阶段性,泊松比数值说明了该结构具有收缩变形的优良特性。SPMS结构压缩试验过程中表现出负泊松比现象。通过反力和位移分析又发现,结构表现出负刚度效应,因此该结构表现出“双负”的优良特性。将试验测得的反力与有限元仿真得到的反力进行了对比,如图17所示。分析数据发现,两者数据变化趋势一致,且经测算最大误差均小于10%。这说明有限元模型是可靠合理的,能够很好地预测结构变形过程和失效破坏。

SPMS压缩试验表现出的负泊松比和负刚度效应与结构特性息息相关。首先,极小曲面表面连续光

滑,使得结构受力过程保持稳定,受力均匀,能够保证结构压缩时逐层折叠压溃。其次,单周期极小曲面在几何空间结构对称,并且沿 z 向重复出现。最后,结构中亏格的均匀排列,给结构受力时提供了变形空间。压缩时材料可以向亏格处流动聚集,使得整体结构表现出负泊松比现象。同时,逐层排列的亏格和对称排列方式使得结构压缩时逐层叠加压溃,逐层压溃处材料得以强化,提高了压溃处的刚度,而下一层级刚度尚未发生变化,刚度的差异分布使得结构整体表现出负刚度效应。SPMS的“双负”特性,为其在吸能结构的应用研究中提供了很大的空间,而且作为新型结构在结构耐撞性工程应用研究中也得到广泛应用。

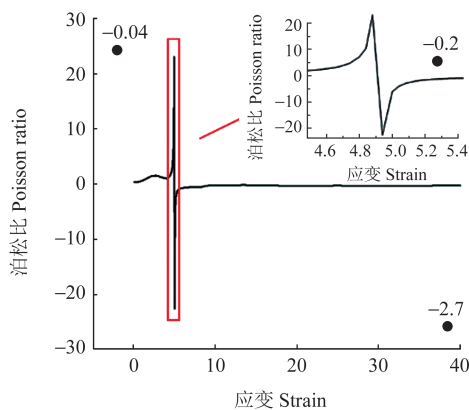


图 16 SPMS 泊松比

Fig. 16 SPMS Poisson ratio

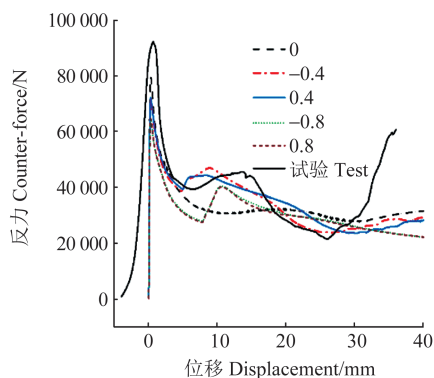


图 17 试验反力与有限元反力

Fig. 17 Test counter-force and finite element counter-force

4 结论

研究了一种新型 Scherk 单周期极小曲面结构,并从结构力学性能、结构行为和吸能性能 3 个方面展开讨论。研究发现:

1) 在侧向压缩载荷的作用下,5 种结构呈现出 V 形、X 形折叠变形以及整体均匀变形 3 种不同的变形模式。在整体均匀变形模式下,应力分布也较为均匀,有利于结构应力传递,可有效改善结构应力集中等问题。同时,结构在该变形模式下受到侧向压缩时

发生塑性流动的区域较大,其吸能能力较优。在正向压缩载荷作用下,5 种结构均呈现出纵向折叠的变形模式。在受压过程中,亏格结构周围形成局部塑性,结构向塑性区域自折叠,吸收大量能量。

2) 压缩试验发现,SPMS 夹层结构表现出典型的负泊松比效应。试验测得,接触反力与位移曲线呈现“驼峰”现象;通过反力和位移分析发现,结构表现出负刚度效应。结构表现出“双负”的特性,使得结构受压时逐层均匀折叠压溃,表现出良好的变形吸能特性。SPMS 结构具有几何曲面连续光滑的特性,不但改善了应力集中问题,而且在受压过程中表现出“双驼峰”现象,使得结构表现出“双负”特性且出现两次平台阶段,说明结构具有多稳态。多稳态特性意味着在不同稳态下具有不同的力学特性。该发现突破了预定义物体和材料的可应用局限性,为多稳态结构领域发展提供了新的研究方向。

参考文献 (References)

- [1] PANESAR A, ABDI M, HICKMAN D, et al. Strategies for functionally graded lattice structures derived using topology optimization for additive manufacturing [J]. Additive Manufacturing, 2018, 19: 81-94.
- [2] ZHANG L, FEIH S, DAYNES S, et al. Energy absorption characteristics of metallic triply periodic minimal surface sheet structures under compressive loading [J]. Additive Manufacturing, 2018, 23: 505-515.
- [3] AMERINATANZI A, SHAYESTEH M N, IBRAHIM H, et al. The effect of porosity type on the mechanical performance of porous NiTi bone implants [C]//Volume 2: Modeling, Simulation and Control; Bio-Inspired Smart Materials and Systems; Energy Harvesting. American Society of Mechanical Engineers, 2016: V002T06A018.
- [4] FEE C. 3D-printed porous bed structures [J]. Current Opinion in Chemical Engineering, 2017, 18: 10-15.
- [5] MASKERY I, ABOULKHAIR N T, AREMU A O, et al. Compressive failure modes and energy absorption in additively manufactured double gyroid lattices [J]. Additive Manufacturing, 2017, 16: 24-29.
- [6] SHI J P, ZHU L Y, LI L, et al. A TPMS-based method for modeling porous scaffolds for bionic bone tissue engineering [J]. Scientific Reports, 2018, 8(1): 7395.
- [7] SARKER A, TRAN N, RIFAI A, et al. Rational design of additively manufactured Ti_6Al_4V implants to control Staphylococcus aureus biofilm formation [J]. Materialia, 2019, 5: 100250.
- [8] YAN C Z, HAO L, HUSSEIN A, et al. Ti-6Al-4V triply periodic minimal surface structures for bone implants fabricated via selective laser melting [J]. Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials, 2015, 51: 61-73.
- [9] YIN H F, LIU Z P, DAI J L, et al. Crushing behavior and optimization of sheet-based 3D periodic cellular structures [J]. Composites Part B: Engineering, 2020, 182: 107565.
- [10] WANG Y Z, REN X B, CHEN Z H, et al. Numerical and

- experimental studies on compressive behavior of Gyroid lattice cylindrical shells[J]. *Materials & Design*, 2020, 186: 108340.
- [11] 张远飞. 基于增材制造的多孔结构设计成型[D]. 大连:大连理工大学, 2019:8.
ZHANG Yuanfei. Design and manufacturing of porous structure based on additive manufacturing[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2019:8. (In Chinese)
- [12] LIU F, MAO Z F, ZHANG P, et al. Functionally graded porous scaffolds in multiple patterns: new design method, physical and mechanical properties [J]. *Materials & Design*, 2018, 160: 849-860.
- [13] AL-KETAN O, ABU AL-RUB R K, ROWSHAN R. The effect of architecture on the mechanical properties of cellular structures based on the IWP minimal surface [J]. *Journal of Materials Research*, 2018, 33(3): 343-359.
- [14] 王赫庭. 基于周期极小曲面结构加强的汽车前纵梁防撞性研究[D]. 大连:大连理工大学, 2019:32.
WANG Heting. Crashworthiness design of front rails of automobiles reinforced by periodic minimal surfaces[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2019:32. (In Chinese)
- [15] WANG C Y, LI Y, ZHAO W Z, et al. Structure design and multi-objective optimization of a novel crash box based on biomimetic structure[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2018, 138/139: 489-501.
- [16] AL-KETAN O, REZGUI R, ROWSHAN R, et al. Micro architected stretching-dominated mechanical metamaterials with minimal surface topologies[J]. *Advanced Engineering Materials*, 2018, 20(9): 1800029.
- [17] LI D W, LIAO W H, DAI N, et al. Optimal design and modeling of gyroid-based functionally graded cellular structures for additive manufacturing [J]. *VAD Computer Aided Design*, 2018, 104: 87-99.
- [18] CHARBONNIER B, MANASSERO M, BOURGUIGNON M, et al. Custom-made macroporous bioceramic implants based on triply-periodic minimal surfaces for bone defects in load-bearing sites[J]. *Acta Biomaterialia*, 2020, 109: 254-266.
- [19] VIJAYAVENKATARAMAN S, KUAN L Y, LU W F. 3D-printed ceramic triply periodic minimal surface structures for design of functionally graded bone implants[J]. *Materials & Design*, 2020, 191: 108602.
- [20] YANG E, LEARY M, LOZANOVSKI B, et al. Effect of geometry on the mechanical properties of Ti-6Al-4V Gyroid structures fabricated via SLM: a numerical study [J]. *Materials & Design*, 2019, 184: 108165.
- [21] ZHANG X Y, YAN X C, FANG G, et al. Biomechanical influence of structural variation strategies on functionally graded scaffolds constructed with triply periodic minimal surface [J]. *Additive Manufacturing*, 2020, 32: 101015.

Study on the mechanical properties of Scherk single-periodic minimal surface

WANG Shuai^{1,2} DENG Tao² HE Jialu³ ZHOU Kaifa³

- (1. School of Intelligent Manufacturing and Transportation, Chongqing Vocational Institute of Engineering, Chongqing 402260, China)
(2. School of Aeronautics, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)
(3. School of Civil Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

Abstract: Minimal surfaces are characterized by spatially continuous smoothness, which can effectively avoid the problem of the stress concentration, and have become a significant focus in the research of mechanical metamaterials. A Scherk single-periodic minimal surface (SPMS) was studied, and the spatially continuous smooth geometrical model was generated using a voxel reconstruction technique with multi-software association method. The mechanical behavior and energy absorption characteristics of the single-period Scherk surface structure were investigated using finite element simulation. The impact of the mathematical parameters of the minimal surface on the geometric configuration was examined. Five minimal surfaces with different parameters were established, and the deformation patterns and stress distributions of the five structures were explored under positive and lateral compression conditions. The Scherk surface structures were fabricated by metal printing technology, and quasi-static compression tests were conducted. The results show that the Scherk single-period surface has an obvious negative Poisson ratio effect, and the SPMS structure exhibits X- and V-shaped deformation modes, which can well withstand the external loading effects. The compression tests show the hump phenomenon of the reaction force and displacement curves of the SPMS structure, indicating that the structure has a negative Poisson ratio and negative stiffness property. This property provides a wide space for its application research in large deformation damage and structural energy absorption.

Key words: Single-periodic minimal surface; Scherk surface; Energy absorption; Negative Poisson ratio; Negative stiffness
Corresponding author: WANG Shuai, E-mail: ws15993500427@163.com

Fund: National Natural Science Foundation of China (52275051); Chongqing Jiaotong University Natural Science Unveiling Project (XJ2023000701); Chongqing Graduate Tutor Team Building Project (JDDSTD2022007); Chongqing Graduate Joint Training Base Construction Project (JDLHPYJD2022001)

Received: 2023-12-10 Revised: 2024-01-16