

考虑离心效应直齿圆柱齿轮动态啮合刚度计算的新方法

张小翠¹ 莫国胤² 刘富豪² 张建强³ 蒋汉军² 张介禄⁴

(1. 新乡职业技术学院 智能制造学院, 新乡 453001)

(2. 青岛理工大学 机械与汽车工程学院, 青岛 266520)

(3. 特种车辆及其传动系统智能制造国家重点实验室, 包头 014032)

(4. 江苏泰隆减速机股份有限公司, 泰州 255400)

摘要: 在齿轮啮合过程中, 驱动速度在评估啮合刚度方面起着重要作用, 而许多学者往往忽视了这一点及其伴随而来的离心效应。基于 Euler 梁理论, 提出了一种原始计算算法, 通过在速度场中引入离心效应来计算直齿轮的受驱动速度影响的动态啮合刚度。以驱动速度为控制参数, 研究了受驱动速度影响的动态啮合刚度, 并证明了离心效应与动态啮合刚度之间的非线性关系。结果表明, 在离心场的作用下, 齿轮的固有频率和动态啮合刚度的波动都随着驱动速度的增加而增加。材料的高弹性模量容易抑制驱动速度对动态啮合刚度的影响, 而密度则相反。研究结果为进一步分析齿轮在离心作用下的振动、噪声提供参考。

关键词: 动态啮合刚度; 离心效应; 驱动速度; 齿轮材料; 频率分析

中图分类号: TH132.41 **DOI:** 10.16579/j.issn.1001.9669.2025.06.004

0 引言

齿轮是机械传动中的基本部件, 广泛应用于新能源汽车和航空航天机械。啮合刚度是内部激励的主要来源, 在齿轮动力学中起着至关重要的作用。因此, 准确评估啮合刚度有助于在上述领域中提高齿轮的传动精度和齿轮结构的优化设计。

现有的参考文献提供了许多计算直齿圆柱齿轮啮合刚度的方法, 如实验法、势能法、有限元法和混合法等^[1-4]。势能法因其计算速度快而成为啮合刚度计算中最常用的方法之一。CHEN 等^[5]通过将势能法扩展到 5 个势能来改善势能法, 而不是传统的 3 个势能有限元法来计算复杂齿轮的刚度, 以应对势能法中与轮廓修改相关的计算困难。徐可君等^[6]细化齿廓, 引入过渡曲线参数方程修正积分上限, 使得齿根模型更为精确。在此基础上, 为了在保持一定计算精度的同时降低有限元计算时间, 常乐浩等^[7]提出了一种有限元法和势能法的混合方法。为了获得更精确的网格刚度, BEINSTINGEL 等^[8-9]开始逐渐关注驱动速度下啮合刚度的计算。ZHENG 等^[10]¹⁰⁴⁶⁸⁶开发了一种分析有限元法, 该法将圆角基座刚度构建为驱动速度的函

数。上述学者研究了驱动速度对啮合刚度的影响, 但他们的研究局限于静力学领域。事实上, 齿轮啮合是一个动态过程, 驱动速度是动力学中的关键参数^[11]。LIU 等^[12]以驱动速度为控制参数, 研究了时域/频域中动态响应的变化。在动力学领域, 驱动速度对啮合刚度的影响还伴随着离心效应^[13]。离心效应是一种普遍现象, 其材料强度随着驱动速度的增加而增强。高驱动速度会产生很大的离心力, 从而显著影响齿轮系统的变形响应^[14]。因此, 深入研究离心效应对齿轮系统啮合刚度的影响具有现实的工程意义与理论价值。LI^[15]通过控制驱动速度使得离心载荷对薄腹板齿轮的齿根弯曲应力产生不同的影响。XIAO 等^[16]研究了受离心效应影响的齿轮, 其中第一模态频率随离心力而变化。CURÀ 等^[17]研究了离心效应对齿轮裂纹初始点和裂纹扩展路径的影响。ZHENG 等^[10]¹⁰⁴⁶⁸⁶考虑离心效应建立了一个分析有限元框架。上述研究通常在准静态离心载荷下进行评估。因此, 揭示离心效应对动态啮合刚度在动力学计算中的影响仍然是一个挑战。为了解决这些问题, 本文建立了考虑离心效应且更真实的直齿轮模型, 提出了一种考虑驱动速度

收稿日期: 2024-10-22 修回日期: 2024-12-11

基金项目: 国家科技支撑计划(2015BAF06B02); 国家自然科学基金项目(52375104, 51605412, 51305378); 山东省自然科学基金项目(ZR2021ME010); 特种车辆及其传动系统智能制造国家重点实验室开放课题(2022FFQ0625)

作者简介: 张小翠, 女, 1984年生, 河南辉县人, 硕士, 副教授; 主要研究方向为齿轮非线性动力学等; E-mail: 13460246063@139.com。

莫国胤(通信作者), 男, 2000年生, 山东聊城人, 硕士研究生; 主要研究方向为齿轮动力学等; E-mail: guoyinmo@mvrllab.com。

引用格式: 张小翠, 莫国胤, 刘富豪, 等. 考虑离心效应直齿圆柱齿轮动态啮合刚度计算的新方法[J]. 机械强度, 2025, 47(6): 27-36.

ZHANG Xiaocui, MO Guoyin, LIU Fuhao, et al. A new method for the dynamic mesh stiffness calculation of spur gear under centrifugal effect[J]. Journal of Mechanical Strength, 2025, 47(6): 27-36.

和离心效应的原始计算算法来计算动态啮合刚度,直齿轮系统的运动控制方程是依据 Hamilton's principle 推导的,推导了离心力公式,在动态条件下得到齿轮变形和啮合刚度,从而为直齿圆柱齿轮在高驱动速度下传动性能的改善以及减振降噪等提供参考。

1 旋转柔性齿轮的运动方程

在转子动力系统中,离心效应是常见的现象。在齿轮旋转过程中,通过改变驱动速度 $\dot{\theta}$ 将动能转化为势能,从而影响齿轮副的变形。如图 1 所示,由于齿在离心作用下的柔性,齿轮被表示为 2 种不同的状态:静载荷下的正常状态(虚线)和离心力 F_v 下的膨胀状态(实线)。驱动速度 $\dot{\theta}$ 的增加,齿轮中的啮合点远离旋转中心 O ,这种现象更加明显。齿轮模型中,可以采用 Euler 梁单元简化为悬臂梁模型,在模拟计算过程中,齿轮的孔径 r_m 是固定的。其中, u_r 和 v_r 是旋转产生的位移,而 u 和 v 是离心膨胀产生的位移。齿轮上给定点总位移矢量为

$$\mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} x - u_r + u \cos \theta - v \sin \theta \\ z_{r,x} + v_r + u \sin \theta + v \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1)$$

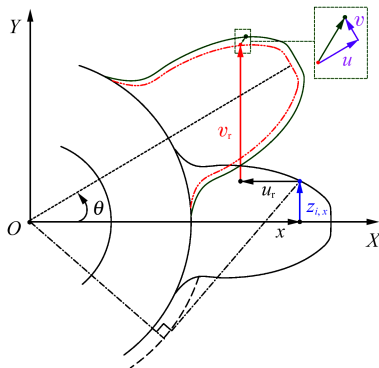


图1 齿轮变形响应建模框架

Fig. 1 Modeling framework of gear deformation response

离心膨胀后齿轮相对于齿轮旋转中心的速度矢量为 $\dot{\mathbf{P}}^T$, 可表示为

$$\dot{\mathbf{P}}^T = \begin{bmatrix} -[(u+x)\dot{\theta} - (z_{r,x}\dot{\theta} - \dot{u})] \cos \theta - [(x+u)\dot{\theta} + \dot{v}] \sin \theta \\ -[(v+z_{r,x})\dot{\theta} + (z_{r,x}\dot{\theta} - \dot{u})] \sin \theta + [(x+u)\dot{\theta} + \dot{v}] \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中,点表示对于时间的导数。

根据齿轮的总位移 \mathbf{P}^T , 可以推断出齿轮中储存的动能为 T_i , 其表达式为

$$T_i = \frac{1}{2} \rho \int \dot{\mathbf{P}}^T \dot{\mathbf{P}}^T dV \quad (3)$$

式中, ρ 为密度; dV 为对齿轮体积进行积分。

这里只考虑柔性齿轮应变张量的轴向分量。因此,非线性轴向应变 ε_{xx} 计算式为

$$\varepsilon_{xx} = u' + \frac{1}{2} [(u')^2 + (v')^2] \quad (4)$$

式中,撇号表示对于 x 的导数。

考虑到齿轮单个齿的横截面关于中性层对称分布,并使用轴向应变定义式(4),齿轮的势能可以仅用横向位移 x_2 来表示。因此,齿轮 U_i 的势能^[18]为

$$U = \frac{1}{2} \int E \varepsilon_{xx}^2 dV \quad (5)$$

根据哈密顿原理,有

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U - T) dt = 0 \quad (6)$$

利用应变能方程(4)和动能方程(3),根据哈密顿原理,可以推导出柔性齿轮的运动方程,即

$$(\mathbf{M}_i + \mathbf{M}_r) \ddot{\mathbf{X}} + (\mathbf{C}_r + \mathbf{C}_p) \dot{\mathbf{X}} + (\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_v) \mathbf{X} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_v \quad (7)$$

其中, \mathbf{M}_i 、 \mathbf{M}_r 分别为齿轮的平移质量矩阵、转动惯量质量矩阵; \mathbf{C}_r 、 \mathbf{C}_p 分别为瑞利阻尼系数矩阵、陀螺阻尼矩阵; \mathbf{K}_e 、 \mathbf{K}_v 分别为结构刚度矩阵、离心刚度矩阵; \mathbf{F}_v 、 \mathbf{F} 分别为离心力和啮合力。质量 \mathbf{M}_i 和 \mathbf{M}_r 、刚度 \mathbf{K}_e 的基本矩阵是对称的,仅取决于材料特性和齿轮几何形状。然而,离心刚度 \mathbf{K}_v 的基本矩阵是对称的,与驱动速度的平方成正比。

齿轮任意的单元对称平移质量矩阵的表达式为

$$\mathbf{M}_i = \rho \Delta L A \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{35} & \frac{11\Delta L}{210} & 0 & \frac{9}{70} & -\frac{13\Delta L}{420} \\ 0 & \frac{11\Delta L}{210} & \frac{\Delta L^2}{105} & 0 & \frac{13\Delta L}{420} & \frac{\Delta L^2}{140} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{13}{35} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{70} & \frac{13\Delta L}{420} & 0 & \frac{13}{35} & -\frac{\Delta L^2}{105} \\ 0 & -\frac{13\Delta L}{420} & \frac{\Delta L^2}{140} & 0 & -\frac{\Delta L^2}{105} & \frac{\Delta L^2}{105} \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中, A 为齿轮横截面的面积。

齿轮任意单元旋转惯性质量矩阵的表达式为

$$\mathbf{M}_r = \frac{\rho I}{\Delta L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{\Delta L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{\Delta L}{10} \\ 0 & \frac{\Delta L}{10} & \frac{2\Delta L^2}{15} & 0 & -\frac{\Delta L}{10} & -\frac{\Delta L^2}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{\Delta L}{10} & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{\Delta L}{10} \\ 0 & \frac{\Delta L}{10} & -\frac{\Delta L^2}{30} & 0 & -\frac{\Delta L}{10} & \frac{2\Delta L^2}{15} \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中, I 为齿轮横截面的惯性质量矩阵。

齿轮任意单元的陀螺阻尼矩阵 \mathbf{C}_p 为

$$C_p = \rho \Delta L A \dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{7}{10} & -\frac{\Delta L}{10} & 0 & -\frac{3}{10} & \frac{\Delta L}{15} \\ \frac{7}{10} & 0 & 0 & \frac{3}{10} & 0 & 0 \\ \frac{\Delta L}{10} & 0 & 0 & \frac{\Delta L}{15} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{10} & -\frac{\Delta L}{15} & 0 & -\frac{7}{10} & \frac{\Delta L}{10} \\ \frac{3}{10} & 0 & 0 & \frac{7}{10} & 0 & 0 \\ -\frac{\Delta L}{15} & 0 & 0 & \frac{\Delta L}{10} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

齿轮任意单元对称弹性刚度矩阵 K_e 为

$$K_e = \frac{E}{\Delta L} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12I}{\Delta L^2} & \frac{6I}{\Delta L} & 0 & -\frac{12I}{\Delta L^2} & \frac{6I}{\Delta L} \\ 0 & \frac{6I}{\Delta L} & 4I & 0 & -\frac{6I}{\Delta L} & 2I \\ -A & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12I}{\Delta L^2} & -\frac{6I}{\Delta L} & 0 & \frac{12I}{\Delta L^2} & -\frac{6I}{\Delta L} \\ 0 & \frac{6I}{\Delta L} & 2I & 0 & -\frac{6I}{\Delta L} & 4I \end{bmatrix} \quad (11)$$

齿轮任意单元离心刚度矩阵 K_v 为

$$K_v = \frac{\rho A \Delta L \dot{\theta}^2}{210} \begin{bmatrix} -70 & 0 & 0 & -35 & 0 & 0 \\ 0 & K_v^{22} & K_v^{23} & 0 & K_v^{25} & K_v^{26} \\ 0 & K_v^{23} & K_v^{33} & 0 & -K_v^{26} & K_v^{36} \\ -35 & 0 & 0 & -70 & 0 & 0 \\ 0 & K_v^{25} & -K_v^{26} & 0 & K_v^{22} & -K_v^{23} \\ 0 & K_v^{26} & K_v^{36} & 0 & -K_v^{23} & K_v^{36} \end{bmatrix} \quad (12)$$

其中, $K_v^{22} = -156 + \frac{504I}{A\Delta L^2}$; $K_v^{23} = -22\Delta L + \frac{42I}{A\Delta L}$; $K_v^{25} = -54\Delta L - \frac{504I}{A\Delta L^2}$; $K_v^{26} = 13\Delta L + \frac{42I}{A\Delta L}$; $K_v^{33} = -4\Delta L^2 + \frac{56I}{A}$; $K_v^{36} = 3A\Delta L^2 - \frac{14I}{A}$ 。

齿轮任意单元瑞利阻尼矩阵 C_r 为

$$C_r = \alpha_M (M_t + M_r) + \beta_K (K_e + K_v) \quad (13)$$

对齿轮的微元 dx 的离心力进行积分,得到节点处的离心力 F_v 。离心力沿齿轮轴向作用^[19],可表示为

$$F_v = -\frac{\rho A \Delta L \dot{\theta}^2}{2} (L + \frac{\Delta L}{3}, 0, 0, L + \frac{2\Delta L}{3}, 0, 0)^T \quad (14)$$

2 离心作用下动态啮合刚度的计算方法

本节中,采用Newmark算法求解受驱动速度影响的齿轮动态位移,以此获得考虑离心效应柔性齿轮的动态啮合刚度。轮齿在前一啮合点产生的弹性变形会随着驱动速度产生的动态激励影响下一啮合点轮齿的啮合状态。如图2所示,齿轮副的啮合过程通过单齿齿轮模型进行模拟。为了更准确地反映驱动速度动态激励对齿轮啮合过程的影响,本文分别针对两

种不同工况进行了模拟分析:①小齿轮上的啮合力 F^i 从小齿轮的初始啮合点 B 起逐渐啮合到齿轮啮出点 A ;②大齿轮上的啮合力 F^i 从大齿轮的初始啮合点 A 起逐渐啮合到齿轮啮出点 B 。图2中,柔性轮齿啮合时的任意啮合点表示为 i ; x_i 为坐标原点到第 i 个啮合点的距离; $z_{i,x}$ 为第 i 个啮合点到 x 轴的距离。由于大小齿轮的计算过程一致,仅存在参数设置不同。因此,下文以小齿轮的计算过程为例进行详细说明。

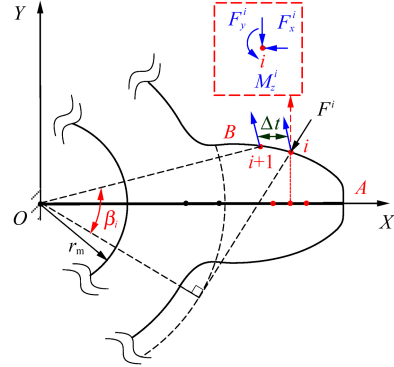


图2 齿刚度计算模型

Fig. 2 Calculation model of tooth stiffness

外载荷矩阵 F_i 会随着齿轮的旋转过程而发生变化,即在同一时刻仅存在一个啮合点 i 的外载荷,其余任意节点上的外载荷均为0。外载荷矩阵计算式可以表示为

$$F_i = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad F^i \sin(\beta_i) \quad F^i \cos(\beta_i) \quad F^i \cos(\beta_i) z_{i,x} \quad \cdots \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (15)$$

式中, β_i 为轮齿在啮合线上第 i 个单元位置的啮合角,可以表示为

$$\beta_i = \arccos \frac{R_{bp}}{\sqrt{x_i^2 + z_{i,x}^2}} - \arctan \frac{z_{i,x}}{x_i} \quad (16)$$

式中, R_{bp} 为小齿轮的基圆半径。

第 i 个啮合点的啮合速度可以由小齿轮驱动速度 $\dot{\theta}$ 和啮合点坐标求得,其表达式为

$$v_i = \dot{\theta} \sqrt{x_i^2 + z_{i,x}^2} \quad (17)$$

为了求解柔性齿轮考虑离心效应受驱动速度影响的位移矩阵 $\{X_i\}$ 。采用Newmark算法对运动方程式(7)进行求解,其中关键参数是载荷步长。本文对作用于2个啮合点之间的啮合速度取2个啮合速度的平均值进行表示。齿轮动态位移的时间步长 Δt_i 是啮合力 F^i 从前啮合点移动到下一个啮合点的时间间隔,其计算式为

$$\Delta t_i = \frac{2\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}}{v_i + v_{i+1}} \quad (18)$$

其中, Δx_i 、 Δy_i 分别为啮合点在 x 和 y 方向上的弹性挠度。

轮齿啮合时初始啮合点的初始速度矩阵 \dot{X}_1 与初始加速度矩阵 \ddot{X}_1 在循环计算中元素都设置为0。使用传统的胡克定律法计算初始位移矩阵 X_1 , 其表达式为

$$X_1 = \frac{F_1}{K} \quad (19)$$

其中, F_1 为初始啮合点处啮合力的外载荷矩阵。

上述参数计算完成后, 使用 Newmark 算法对式 (7) 中的 X_i 、 \dot{X}_i 、 \ddot{X}_i 进行迭代计算, 直至动态载荷运动至啮出点时停止。此时受驱动速度影响的动态位移矩阵 X_i 通过迭代计算得到。从不断迭代的 X_i 中提取第 i 个啮合点的弹性挠度 $\Delta x_{i,x}$ 和 $\Delta x_{i,y}$, 随后小齿轮在该啮合点处的单齿动态刚度值 k_{pi} 可由弹性挠度表示, 即

$$k_{pi} = F^i / [\Delta x_{i,x} \cos(\frac{\pi}{2} - \beta_i) + \Delta x_{i,y} \cos \beta_i] \quad (20)$$

同理可以得到, 大齿轮在第 i 个啮合点的单齿动态刚度值 k_{gi} 。单对齿啮合时齿轮副受驱动速度影响的综合动态啮合刚度可由 k_{pi} 与 k_{gi} 表示为

$$k_{ms} = \frac{k_{pi} k_{gi}}{k_{pi} + k_{gi}} \quad (21)$$

单齿啮合区和双齿啮合区都存在于一个完整的啮合周期中。两对齿在双齿啮合区内, 动态啮合刚度是串联关系。为了更准确地计算具有离心效应的动态啮合刚度, 绘制了该算法的详细流程图, 如图3所示。

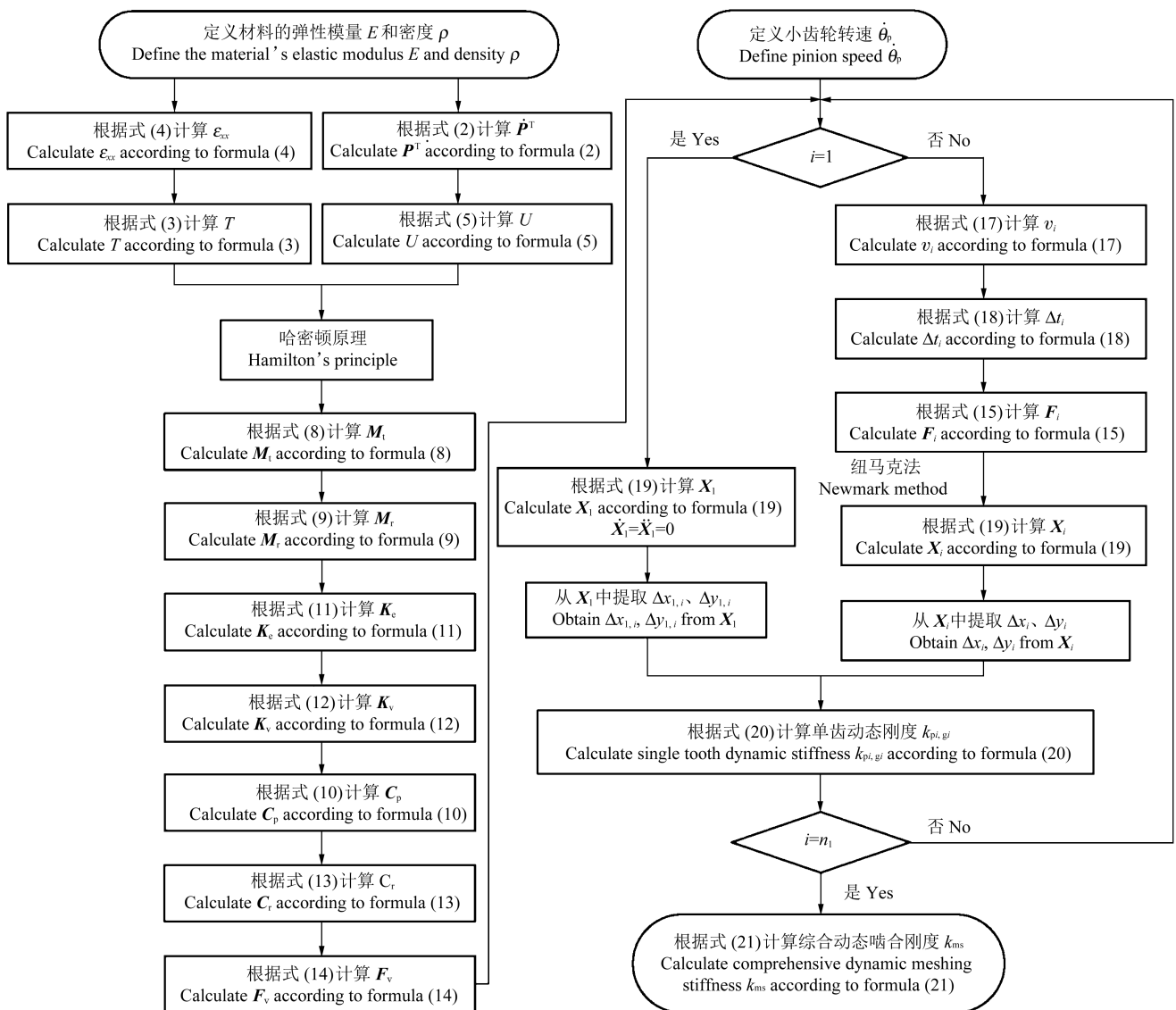


图3 考虑离心效应动态啮合刚度的算法流程

Fig. 3 Algorithm flow chart of the dynamic meshing stiffness with considering centrifugal effect

3 离心作用下动态啮合刚度的验证及分析

为了验证所提出的算法用于计算离心作用下动态啮合刚度的准确性, 与 Ansys 方法进行了比较。在

Ansys APDL (ANSYS Parametric Design Language, APDL) 软件的背景下, 直齿轮的齿建模为一维悬臂梁。为了尽量减少驱动速度和离心效应对啮合刚度的影响, 将驱动速度设置为 $\dot{\theta}_p = 0.01$ r/min。在准静态

条件下,将该方法计算得到的单齿动态刚度(Single Tooth Dynamic Stiffness, STDS)与 Ansys 计算的静刚度进行对比。同时展示了考虑离心效应时新方法在 $\dot{\theta}_p=300$ r/min 时计算得到的 STDS 与 Ansys 计算的单齿动态刚度的对比。本节中,STDS 是在 Fortran 环境下进行计算的;Ansys 得到的结果是在 APDL 环境中对 Euler 梁单元进行仿真与提取的。直齿轮副的参数如表 1 所示。

表 1 直齿轮副参数

Tab. 1 Parameters of the spur gear pair

参数 Parameters	小/大齿轮 Pinion/Gear
齿数 Number of teeth	27/41
质量 Mass/kg	0.22/0.34
弹性模量 Elasticity modulus E/GPa	207
泊松比 Poisson ratio	0.3
模数 Modulus/mm	2.5
齿宽 Width of tooth/mm	10
压力角 Pressure angle/(°)	20

当驱动速度无限接近于 0 时,离心效应对 STDS 没有影响。此时 STDS 的值将趋近于单齿静态刚度。由图 4 可以看出, $\dot{\theta}_p=0.01$ r/min 时的 STDS 和 Ansys 计算的单齿静态刚度几乎完全一致。但当驱动速度 $\dot{\theta}_p=300$ r/min 时,STDS 和 Ansys 计算得到的动态啮合刚度具有较大误差。主要原因是 Ansys 不能计算离心力对动态啮合刚度的影响,其次是因为对于 Euler 梁单元进行动力学计算时,Ansys 内置的有限元理论中积分点到顶端有一定距离,故动态位移与理论解也总是有一定误差。单齿动态刚度一直围绕单齿静态刚度周围波动,这是驱动速度所产生的动态激励产生的,离心效应会放大动态激励。因此,STDS 与 Ansys 在 $\dot{\theta}_p=300$ r/min 时计算的单齿动态刚度相比具有更大的波动幅值。

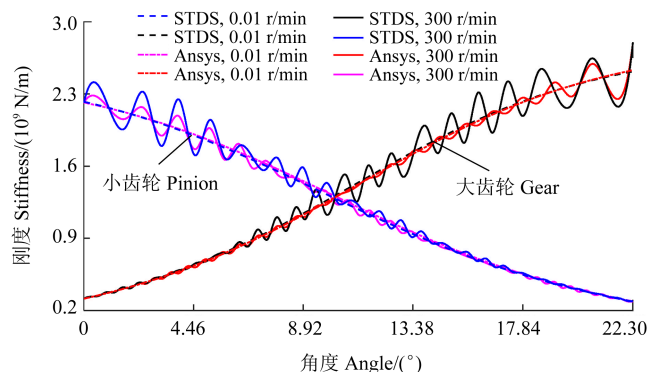
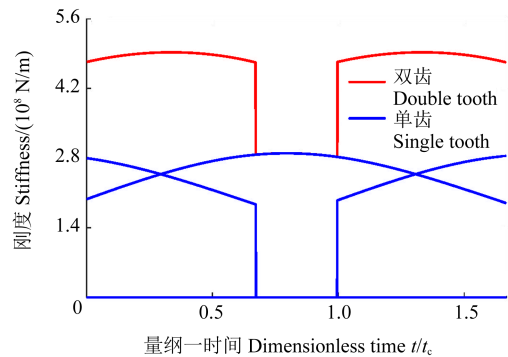


图 4 结果验证图

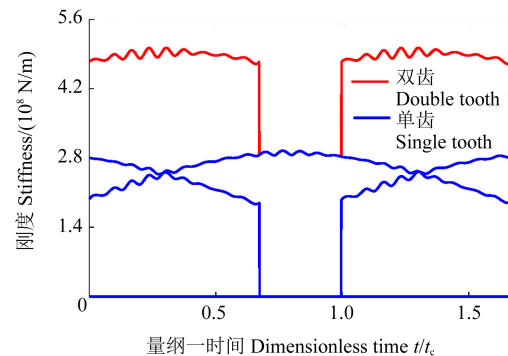
Fig. 4 Result verification chart

为了进一步验证该算法在刚度计算中的作用,图 5 中,对动态啮合刚度和静态啮合刚度进行了比较。其中无量纲时间(t/t_c)是对一个啮合周期 t_c 进行归一化处理。



(a) 静态啮合刚度

(a) Static mesh stiffness



(b) 动态啮合刚度

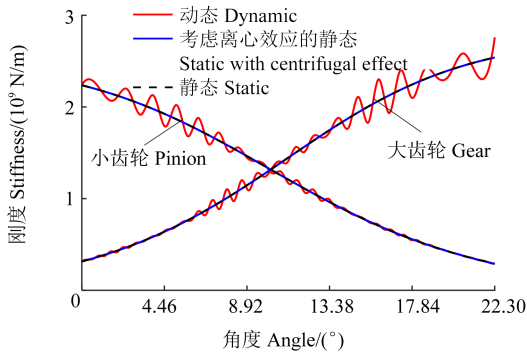
(b) Dynamic mesh stiffness

图 5 数值比较

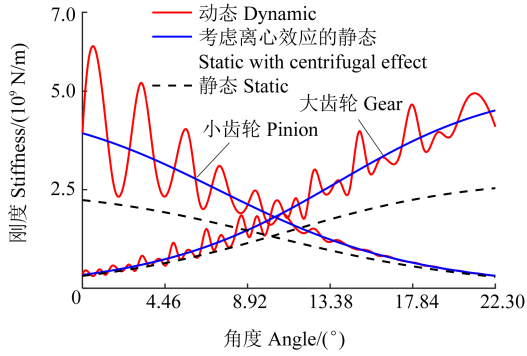
Fig. 5 Numerical comparison

为了进一步探究驱动速度及其伴随而来的离心效应对啮合刚度的影响,图 6(a)~图 6(d)分别显示了不同速度下小齿轮与大齿轮的单齿动态刚度。可以看出,随着转速的增加,单齿动态刚度的波动逐渐增加,但是始终在静刚度周围波动。其原因是,随着驱动速度的增加,作用在相邻啮合点上的动态激励的时间间隔减小。因此,悬臂梁在前一个啮合点的挠度没有足够的时间立即恢复,导致后一个啮合点将产生新的挠度。这种挠度不断累积的过程最终产生了这一现象。此外,初始啮合点的刚度波动比其他啮合点大,这是由于此时小齿轮的动能和振幅达到最大值。随着啮合过程的推进,驱动速度逐渐降低,单齿动态刚度波动逐渐抑制,直到网格位置结束。随着驱动速度的增加,离心效应增强使得动态单齿刚度的波动振幅增大。这是因为随着驱动速度增加,2 个啮合点的时间间隔变小,导致挠度恢复变慢。

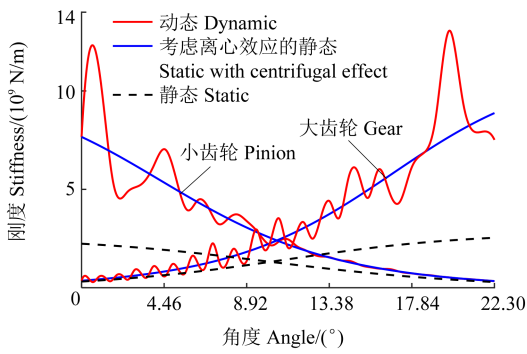
为了更全面地揭示离心效应对啮合刚度的影响,



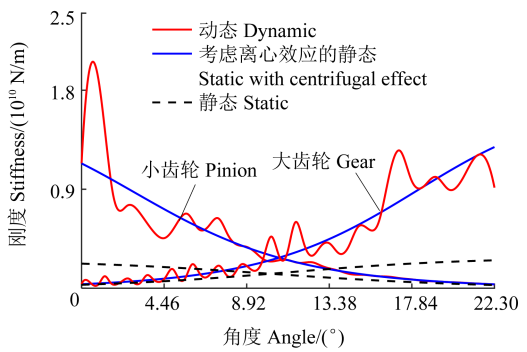
(a) 300 r/min



(b) 3000 r/min



(c) 5000 r/min

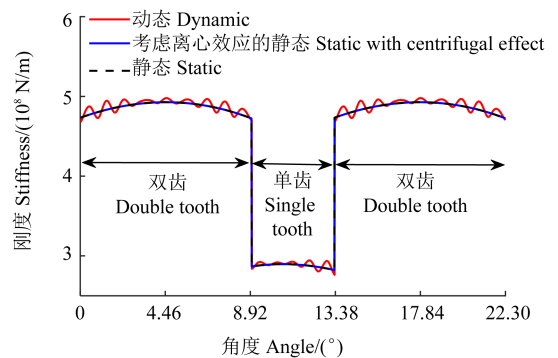


(d) 9000 r/min

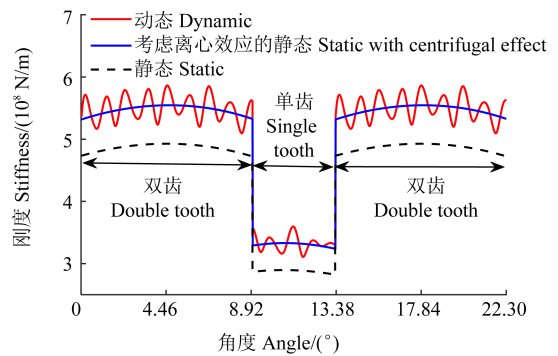
图 6 不同驱动速度下的单齿刚度

Fig. 6 Single tooth stiffness at different speeds

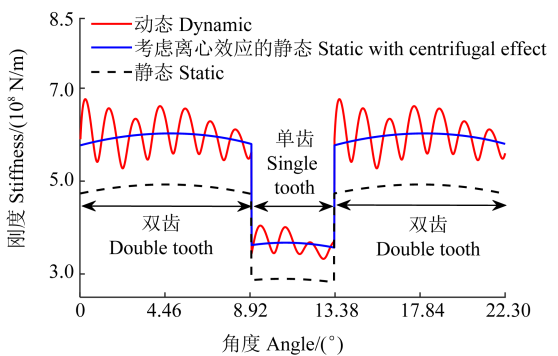
图 7 所示为不同离心力条件下静态啮合刚度和动态啮合刚度的比较分析。一般来说,较高的离心力会产生更多的额外弹性势能,因此 2 种方法的啮合刚度都会随着驱动速度的增加而增加。然而,必须指出的是,离心力不仅会增强动态啮合刚度,还会增强其振幅波



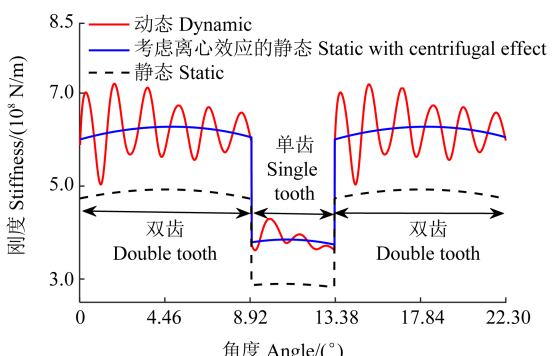
(a) 300 r/min



(b) 3000 r/min



(c) 5000 r/min



(d) 9000 r/min

图 7 不同驱动速度下的啮合刚度

Fig. 7 Mesh stiffness at different speeds

动,这与静态啮合刚度形成鲜明对比。这种差异的主要原因是离心效应加剧了驱动速度对啮合刚度的影响,这使得齿轮系统中的振动能量更高,从而增加了动态啮合刚度的振幅波动。其中,驱动速度对双齿啮合区域的啮合刚度影响较大,对单齿啮合刚度的影响较

小。这是因为齿轮系统在双齿啮合区域时拥有更大的振动能量,双对齿的离心力对系统的影响远大于单对齿。结果表明,新方法计算的动态啮合刚度随着驱动速度的增加而增加,这与理论定性一致。

4 不同材料齿轮动态啮合刚度及固有频率分析

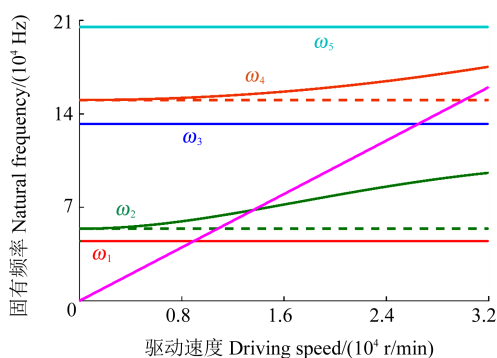
表 2 所示为低转速时新算法与有限元的固有频率,两者的相对误差在 5% 以内。因此,新算法在求解固有频率方面是可靠的。在此基础上分别研究了两种不同质量矩阵条件下离心效应对柔性齿轮固有频率的影响:①不考虑转动惯性质量矩阵;②同时考虑转动惯性质量矩阵和平动惯性质量矩阵。

表 2 齿轮固有频率

Tab. 2 Natural frequency of gears

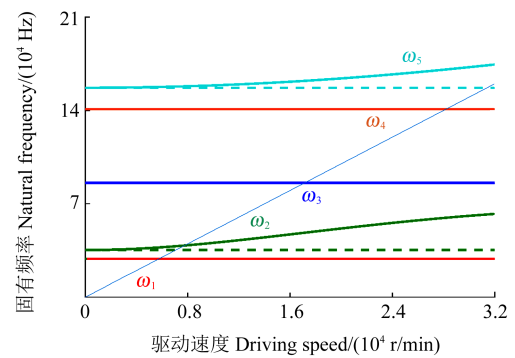
模态 Modal	小齿轮 Pinion			大齿轮 Gear		
	新算法 New algorithm/ Hz	有限元 FEM/Hz	误差 Error/%	新算法 New algorithms/ Hz	有限元 FEM/Hz	误差 Error/%
1	35 850	36 158	1.80	23 091	23 515	0.85
2	44 731	43 880	4.12	28 719	27 582	1.93
3	120 102	126 220	1.22	77 068	76 137	1.93
4	132 534	134 160	2.36	85 754	87 830	1.21
5	138 663	146 614	2.58	140 950	137 400	4.05

图 8 为仅设置平动惯性质量矩阵得到的不同驱动速度下大齿轮和小齿轮的坎贝尔图。图 8 中,随着转速的升高,离心效应并不完全影响齿轮系统的每一阶固有频率。小齿轮的第 1 阶频率 ω_1 、第 3 阶频率 ω_3 和第 5 阶频率 ω_5 随着驱动速度增大保持不变。大齿轮的第 2 阶频率 ω_2 和第 5 阶频率 ω_5 随着驱动速度的变化而显著增大。图 8(a) 和图 8(b) 表明,随着齿轮齿数的减少,频率分叉变得更加突出。其原因是,随着齿轮齿数的增加,齿轮体对轮齿的支撑增加,离心效应对齿轮固有频率的影响减小。



(a) 小齿轮

(a) Pinion



(b) 大齿轮

(b) Gear

图 8 不含转动惯性质量矩阵齿轮系统振动模式的坎贝尔图

Fig. 8 Campbell diagram of vibration modes in gear systems without rotation inertia mass matrix

图 9 为同时设置平动惯性质量矩阵及转动惯性质量矩阵得到的不同驱动速度下小齿轮和大齿轮的坎贝尔图。可以发现,转动惯性质量矩阵对齿轮系统固有频率的影响不可忽视,并且在离心效应的耦合中展现出更加多样的频率特性。图 9 中,在 12 790 r/min 时可以观察到第 1 阶频率转向现象,这表明齿轮系统中可能存在较高旋转模式的强耦合。同时还展现出齿轮系统在考虑转动惯性质量时在不同驱动速度下离心硬化效应产生的特殊频率 ω_3 。这与姚学诗等^[18]对于离心效应的结论是一致的,进一步验证了离心硬化对齿轮系统固有频率的影响。

由于不同材料的齿轮在驱动速度的影响下展现出各异的动态特性,研究材料差异对动态啮合刚度的影响具有重要意义。铝合金、铸铁、陶瓷和碳纤维尼龙是变速箱中常用的齿轮材料,具体参数见表 3。

图 10 为不同材料的刚度增长率和波动率。可以看出,动态啮合刚度的增长率和波动率随着驱动速度的增加而持续上升。铝合金齿轮动态啮合刚度出现了明显的刚度增长,这归因于低弹性模量引起的离心效应的增强。虽然铸铁和碳纤维尼龙的弹性模量相似,但它们的增长曲线显示出明显差异。出现这种现象的主要原因是铸铁的密度大于碳纤维尼龙的密度,这可能导致动态啮合刚度的波动幅度更大。此外,铸铁齿轮的增长曲线介于铝合金齿轮和陶瓷材料齿轮之间。这一观察表明,材料密度对动态啮合刚度的影响明显小于材料弹性模量的影响。由于其轻质和坚固的强度,碳纤维尼龙可以在高速行驶时有效地承受冲击、应力和振动。这说明在高驱动速度工况下,碳纤维尼龙材料齿轮相较于铸铁齿轮拥有更高的稳定性。

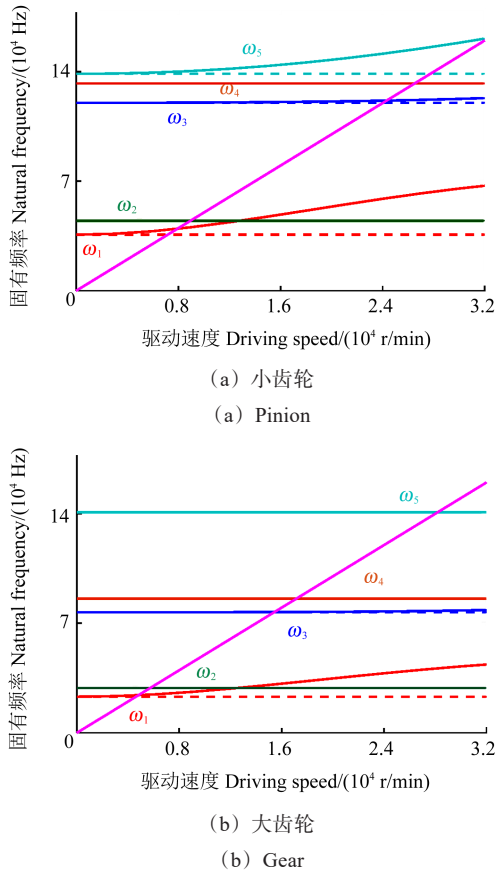


图9 含转动惯性质量矩阵齿轮系统振动模式的坎贝尔图

Fig. 9 Campbell diagram of vibration modes of gear systems with rotation inertia mass matrix

表3 材料参数

Tab. 3 Material parameters

材料 Material	弹性模量 Elastic modulus/ GPa	密度 Density/(kg/m ³)	比模量 Specific modulus/m
硬铝合金 Hard aluminum alloy	70	2.7	25.92
铸铁 Cast iron	207	7.89	26.24
碳纤维尼龙 Carbon fiber nylon	230	1.76	130.68
陶瓷 Ceramics	410	3.15	130.16

分别研究了2种不同质量矩阵情况对4种材料受到离心效应产生刚度增长的影响:①设置不考虑转动惯性质量矩阵;②设置考虑转动惯性质量矩阵。数值仿真结果见表4。

表4表明,仅设置平动惯性质量矩阵得到的不同材料齿轮在离心效应下的增长率与图10中结果相比,计算误差随着驱动速度的增加变得越来越大;改变质量矩阵设置对离心效应下齿轮的啮合刚度计算的影响不可忽视。

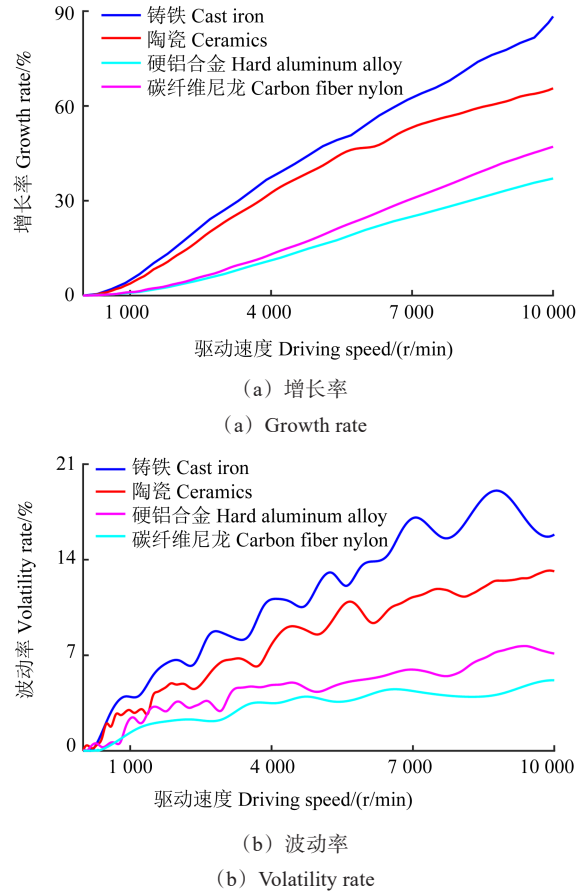


图10 不同材料的增长率和波动率的比较

Fig. 10 Comparison of growth rate and volatility rate of different materials

表4 质量矩阵对不同材料的增长率的影响

Tab. 4 Influence of mass matrix on the growth rate of different materials

质量矩阵 Mass matrix	材料 Material	2 000 r/min	6 000 r/min	10 000 r/min
M_i	硬铝合金 Hard aluminum alloy	14.31	50.24	70.10
$M_i + M_r$	硬铝合金 Hard aluminum alloy	15.71	53.85	86.50
M_i	铸铁 Cast iron	12.78	46.77	65.57
$M_i + M_r$	铸铁 Cast iron	13.45	49.93	69.02
M_i	陶瓷 Ceramics	3.39	21.73	38.26
$M_i + M_r$	陶瓷 Ceramics	3.83	24.60	47.10
M_i	碳纤维尼龙 Carbon fiber nylon	3.30	20.34	36.56
$M_i + M_r$	碳纤维尼龙 Carbon fiber nylon	3.30	21.74	37.71

5 结论

在本研究中,直齿轮系统的运动控制方程是通过哈密顿原理推导的。该模型将离心效应与啮合变形相结合,扩展了齿轮动力学方程;提出了一种基于有限元分析框架的独创计算算法,用于计算离心效应对动态啮合刚度的影响。数值分析结果表明,驱动速

度、弹性模量、离心效应和密度共同影响齿轮系统的动态啮合刚度。主要结论如下:

1) 动态啮合刚度始终围绕静态啮合刚度上下波动;随着驱动速度的增加,动态啮合刚度表现出明显的离心硬化和波动现象;且驱动速度产生的动态激励对双对齿啮合的影响较大,对单对齿啮合的影响较小。

2) 利用所提出的模型计算得到的动态啮合刚度比传统模型更真实,特别是在高速行驶条件下或柔性材料齿轮中。在离心效应的影响下,12 790 r/min 齿轮固有频率出现频率转向现象。

3) 齿轮系统在离心效应影响下,随着转速的升高,转动质量对振动特性的影响越来越大。不同齿轮系统在 6 000 r/min 展现出显著差异,故在高驱动速度下采用 2 个质量矩阵的计算结果精度更高。柔性齿轮应结合具体工况选择合适的驱动速度,这有利于提高齿轮系统的传动性能。

参考文献(References)

- [1] 吴鲁纪,杨世豪,冯伟,等. 斜齿轮时变啮合刚度改进算法及影响因素分析[J]. 机械强度,2024,46(2):312-319.
WU Lujun, YANG Shihao, FENG Wei, et al. Improvement algorithm of time-varying meshing stiffness of helical gear and analysis of influencing factors[J]. Journal of Mechanical Strength, 2024, 46(2):312-319. (In Chinese)
- [2] 杨鄂川,李映辉,赵翔,等. 基于能量法的裂纹梁振动特性分析[J]. 机床与液压,2014,42(12):34-39.
YANG Echuan, LI Yinghui, ZHAO Xiang, et al. Vibration characteristics analysis of cracked beams based on energy method [J]. Machine Tool & Hydraulics, 2014, 42(12):34-39. (In Chinese)
- [3] 魏鹏,邓松. 基于势能法的两级斜齿轮系统时变啮合刚度计算与动态特性研究[J]. 机械传动,2020,44(9):51-57.
WEI Peng, DENG Song. Time-varying mesh stiffness calculation and research on dynamic characteristic of two-stage helical gear system based on potential energy method[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2020, 44(9):51-57. (In Chinese)
- [4] TALAKESH A, HADIAN JAZI S, ARIAIEI A, et al. A new experimental method for calculating mesh stiffness in healthy and cracked straight bevel gear system[J]. Measurement, 2024, 224:113804.
- [5] CHEN Z G, SHAO Y M. Dynamic simulation of spur gear with tooth root crack propagating along tooth width and crack depth[J]. Engineering Failure Analysis, 2011, 18(8):2149-2164.
- [6] 徐可君,焦为,秦海勤. 基于改进势能法的直齿轮时变啮合刚度计算方法研究[J]. 机械传动,2023,47(2):1-7.
XU Kejun, JIAO Wei, QIN Haiqin. Research on the time-varying meshing stiffness algorithm of spur gears based on an improved potential energy method[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2023, 47(2):1-7. (In Chinese)
- [7] 常乐浩,刘更,郑雅萍,等. 一种基于有限元法和弹性接触理论的齿轮啮合刚度改进算法[J]. 航空动力学报,2014,29(3):682-688.
CHANG Lehao, LIU Geng, ZHENG Yaping, et al. A modified method for determining mesh stiffness of gears based on finite element method and elastic contact theory [J]. Journal of Aerospace Power, 2014, 29(3):682-688. (In Chinese)
- [8] BEINSTINGEL A, KELLER M, HEIDER M, et al. A hybrid analytical-numerical method based on isogeometric analysis for determination of time varying gear mesh stiffness[J]. Mechanism and Machine Theory, 2021, 160:104291.
- [9] 刘宏,赵荣珍,郑玉巧. 考虑时变啮合刚度的风机传动链动态性能[J]. 振动、测试与诊断,2015,35(6):1025-1030.
LIU Hong, ZHAO Rongzhen, ZHENG Yuqiao. Dynamic properties of wind turbine drive-train system considering time-varying gear mesh stiffness [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2015, 35(6):1025-1030. (In Chinese)
- [10] ZHENG X Y, LUO W J, HU Y M, et al. Study on the mesh stiffness and nonlinear dynamics accounting for centrifugal effect of high-speed spur gears[J]. Mechanism and Machine Theory, 2022, 170:104686.
- [11] ZHENG X Y, LUO W J, HU Y M, et al. Analytical approach to mesh stiffness modeling of high-speed spur gears[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2022, 224:107318.
- [12] LIU G M, LIU F H, MA T, et al. Dynamic analysis of spur gears system with dynamic force increment and velocity-dependent mesh stiffness[J]. Nonlinear Dynamics, 2023, 111(15):13865-13887.
- [13] LI S T. Centrifugal load and its effects on bending strength and contact strength of a high speed thin-walled spur gear with offset web[J]. Mechanism and Machine Theory, 2008, 43(2):217-239.
- [14] GENTA G, SILVAGNI M. On centrifugal softening in finite element method rotordynamics [J]. Journal of Applied Mechanics, 2013, 81(1):011001.
- [15] LI S T. Effects of centrifugal load on tooth contact stresses and bending stresses of thin-rimmed spur gears with inclined webs[J]. Mechanism and Machine Theory, 2013, 59:34-47.
- [16] XIAO W Q, LI J N, WANG S, et al. Study on vibration suppression based on particle damping in centrifugal field of gear transmission[J]. Journal of Sound and Vibration, 2016, 366:62-80.
- [17] CURÀ F, MURA A, ROSSO C. Effect of centrifugal load on crack path in thin-rimmed and webbed gears [J]. Frattura Ed Integrità Strutturale, 2015(34):447-455.
- [18] 姚学诗,陈江,郑春龙. 基于旋转软化的柔性梁动力学研究[J]. 应用力学学报,2014,31(4):582-587.
YAO Xueshi, CHEN Jiang, ZHENG Chunlong. Dynamic of flexible beams based on spin softening [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2014, 31(4):582-587. (In Chinese)
- [19] 李辉,杜群贵. 考虑弹流润滑的高速深沟球轴承径向刚度特性分析[J]. 轴承,2021(10):10-13.
LI Hui, DU Qungui. Analysis on radial stiffness characteristics of high-speed deep groove ball bearings considering elastohydrodynamic lubrication [J]. Bearing, 2021(10):10-13. (In Chinese)

A new method for the dynamic mesh stiffness calculation of spur gear under centrifugal effect

ZHANG Xiaocui¹ MO Guoyin² LIU Fuhao² ZHANG Jianqiang³ JIANG Hanjun² ZHANG Jieliu⁴

(1. Intelligent Manufacturing College, Xinxiang Vocational and Technical College, Xinxiang 453001, China)

(2. School of Mechanical & Automotive Engineering, Qingdao University of Technology, Qingdao 266520, China)

(3. State Key Laboratory of Intelligent Manufacturing for Special Vehicles and Transmission System, Baotou 014032, China)

(4. Jiangsu Tailong Decelerator Machinery Co., Ltd., Taizhou 225400, China)

Abstract: During the gear meshing process, the driving speed plays a crucial role in evaluating mesh stiffness, a factor that many scholars often overlook along with the accompanying centrifugal effects. Based on Euler beam theory, a original computational algorithm was proposed to calculate the dynamic mesh stiffness of spur gears considering driven-speed effects by introducing centrifugal effects into the velocity field. Using the driving speed as a control parameter, the dynamic mesh stiffness in relation to driving speed was investigated, and the nonlinear relation between centrifugal effects and dynamic mesh stiffness was demonstrated. The results indicate that, under the influence of a centrifugal field, both the natural frequency and the dynamic mesh stiffness of the gears increase with rising driving speed. Additionally, materials with a high elastic modulus tend to suppress the impact of driving speed on dynamic mesh stiffness, while higher density has the opposite effect. The research results provide reference for further analysis of gear vibration and noise under centrifugal effects.

Key words: Dynamic mesh stiffness; Centrifugal effect; Driving speed; Gear material; Frequency analysis

Corresponding author: MO Guoyin, E-mail: guoyinmo@mvrmlab.com

Fund: National Science and Technology Support Program (2015BAF06B02); National Natural Science Foundation of China (52375104, 51605412, 51305378); Natural Science Foundation of Shandong Province of China (ZR2021ME010); Open Topic of State Key Laboratory of Intelligent Manufacturing for Special Vehicles and Transmission System (2022FFQ0625)

Received: 2024-10-22 Revised: 2024-12-11