

## 基于同伦随机有限元方法的梁结构边界约束静力模型修正

胡建伟<sup>1</sup> 祁 灿<sup>2,4</sup> 朱礼平<sup>3,4</sup> 吴志峰<sup>4,5</sup> 黄 斌<sup>4</sup> 陈学龙<sup>1,4</sup>

(1. 中冶武勘工程技术有限公司, 武汉 430080)

(2. 中国葛洲坝集团电力有限责任公司, 宜昌 443002)

(3. 中冶南方武汉建筑设计有限公司, 武汉 430000)

(4. 武汉理工大学 土木工程与建筑学院, 武汉 430070)

(5. 华中科技大学 土木与水利工程学院, 武汉 430074)

**摘要:** 考虑到结构边界条件的不确定性,基于同伦随机有限元方法,提出了一种梁结构边界约束静力模型修正方法。基于不确定的静力测量数据,实现了梁身单元与边界单元的整体修正。静力凝聚方法能够保证计算自由度与测量自由度相匹配。正则化方法可以减少随机模型修正方程病态解的问题。概率残差最小化法实现同伦系数的最优选择,保证了边界约束的精确识别和整体修正的精度。最后,通过变截面混凝土梁数值算例和铝合金梁的静力加载试验,验证了该方法的有效性。

**关键词:** 同伦随机有限元; 边界约束; 模型修正; 静力测量误差; 静力凝聚

**中图分类号:** TH114 **DOI:** 10.16579/j.issn.1001.9669.2025.02.017

## 0 引言

基于有限元分析的桥梁健康监测与检测对于识别桥梁状态至关重要<sup>[1]</sup>。一个足够精确的有限元模型能够提高状态识别的准确性。然而,建模过程中边界约束处的理想假定和过度简化是导致建模误差的关键因素。一般将其假定为简支或固支,但实际情况大多是介于二者之间的,属于半刚性。过分简化边界约束有时远大于质量、刚度对修正模型精度的影响<sup>[2-3]</sup>。边界条件难以精确模拟,边界处的响应难以通过传感器测得。因此,如何准确模拟结构边界约束在模型修正中具有重要意义。

对于结构边界条件的研究,大致可归纳为以下3种思路:①研究模拟边界约束的弹簧刚度与动静力特性之间的关系。PARK等<sup>[4-5]</sup>通过灵敏度分析得到弹簧常数与桥梁响应之间的关系,并利用测量响应估计边界约束刚度。并且,通过分析桥梁的转角与挠度、转动弹簧刚度间的关系,进而利用神经网络方法识别边界条件。KIM等<sup>[6]</sup>进一步选用可考虑非线性的神经网络方法进行边界约束识别。②将边界约束的影响考虑进理论公式。黄斌等<sup>[7]</sup>使用摄动法将随机微分方程及其边界条件转化为确定形式,推导了其统计特征

值的二阶摄动近似表达。张妃二等<sup>[8]</sup>利用模糊随机变量建立了模糊随机边界元代数方程,通过 $\lambda$ 水平截集得到随机区间方程,应用区间数分解和小参数摄动理论计算了应力统计特征、结构破坏概率和可靠度。蔡永昌等<sup>[9]</sup>在无单元伽辽金法中实现准确施加位移边界和材料不连续性条件。李英超等<sup>[10]</sup>使用子结构校正因子法进行边界条件修正,仅用低阶的有限实测频率实现对杆系结构边界条件的修正。WANG等<sup>[11]</sup>将连接灵活性和边界条件的模型修正和参数估计纳入交叉模型交叉模态方法。③调整模型中模拟边界约束的弹簧刚度参数来使目标函数最小化。SHI等<sup>[12]</sup>提出了一种利用模态参数修正桥梁边界条件的方法,成功修正了附加扭转约束刚度。邹向农等<sup>[13]</sup>基于现场动载测试结果,运用响应面法考虑边界约束条件,进行了悬索桥有限元模型修正。秦仙蓉等<sup>[14]</sup>将边界条件不确定性引入塔机有限元模型中,并利用二次响应面法对有限元模型进行修正。郭晓敬等<sup>[15]</sup>利用试验模态参数,基于遗传算法的多目标优化方法,并结合模态试验和计算模态分析,准确获取了有限元模型的边界约束信息。

然而,上述大部分研究只识别了边界约束而没有进行结构的整体修正,即使实现了整体修正也未考虑测量误差变异性等随机因素的影响。于是,本文针对

收稿日期: 2024-08-19 修回日期: 2024-10-10

基金项目: 国家自然科学基金(51978545)

作者简介: 胡建伟,男,1988年生,湖北黄冈人,硕士,高级工程师; 主要研究方向为地下结构的健康监测; E-mail:411088120@qq.com。

吴志峰(通信作者),男,1990年生,湖北武汉人,博士,助理研究员; 主要研究方向为随机模型修正; E-mail:wuzhifeng\_tujian@whut.edu.cn。

引用格式: 胡建伟,祁灿,朱礼平,等. 基于同伦随机有限元方法的梁结构边界约束静力模型修正[J]. 机械强度,2025,47(2):138-146.

HU Jianwei, QI Can, ZHU Liping, et al. Boundary constraint static model modification of beam structure based on homotopy stochastic finite element method[J]. Journal of Mechanical Strength, 2025, 47(2): 138-146.

边界约束识别问题,基于同伦随机有限元方法,将结构参数和测量误差考虑为随机变量,建立了考虑边界约束的静力随机模型修正方程。通过弹簧单元来模拟边界约束,将约束附加刚度叠加边界单元对应约束自由度的刚度分量。使用静力凝聚解决测量信息不完备的问题。为避免求解模型修正方程时的不稳定性问题,选择使用了Tikhonov正则化方法。利用概率残差最小化方法进行同伦方法中辅助参数 $h$ 的选择。最后,通过变截面混凝土梁的数值算例和铝合金梁的静力加载试验来验证该方法的可行性。

## 1 基于同伦分析的梁约束边界模型

### 1.1 带边界约束的梁结构静力方程

假设一个结构具有 $N$ 个自由度,在静力荷载 $F_0$ 作用下,初始静力平衡方程为

$$K_0 x_0 = F_0 \quad (1)$$

式中, $K_0$ 为 $N \times N$ 维的结构初始整体刚度矩阵; $x_0$ 为初始位移向量。将结构初始整体刚度矩阵分块可写成:

$$\begin{pmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_a \\ F_b \end{pmatrix} \quad (2)$$

式中, $a$ 表示非边界自由度; $b$ 表示为边界自由度。

$$K_{bb} = K_{bb}^u + K_{bb}^v \quad (3)$$

式中, $K_{bb}$ 为边界自由度对应的刚度; $K_{bb}^u$ 为边界单元在约束自由度上的刚度分量; $K_{bb}^v$ 为约束附加刚度。对于一个任意约束边界的梁,本文采用弹簧单元模拟附加约束。

为了方便建模,在平面外一般将边界约束设置为完全约束,在平面内,参考有限元中处理约束的方法,将边界单元的弹簧系数取为 $k_n = \Theta_n \frac{EA}{l}$ , $k_r = \Theta_r \frac{12EI}{l^3}$ , $k_v = \Theta_v \frac{4EI}{l}$ ,耦合项 $k_{rv} = k_{vr} = \Theta_{vr} \frac{6EI}{l^2}$ 。即边界节点处自由度对应元素乘上刚度系数 $\Theta_n$ 、 $\Theta_r$ 、 $\Theta_v$ 、 $\Theta_{vr}$ ,且 $\Theta_n$ 、 $\Theta_r$ 、 $\Theta_v$ 、 $\Theta_{vr} \in [0, \infty)$ ,当值为0时,表示无约束;当为 $\infty$ 时,表示完全约束。实际中不可能存在完全约束的情况,其值按梁本身刚度来选取合适值。

### 1.2 考虑边界约束的梁结构静力随机模型修正方程

对于有限元模型,整体刚度的变化视为单元刚度的变化组合,即

$$\Delta K = \sum_{i=1}^n \beta_{0i} K_i \quad (4)$$

式中, $n$ 为结构单元总数; $\beta_{0i}$ 为第 $i$ 个单元修正因子; $K_i$ 为第 $i$ 个单元刚度矩阵的 $N \times N$ 维扩展矩阵。

修正后的刚度矩阵 $K_m$ 为

$$K_m = K_0 + \sum_{i=1}^n \beta_{0i} K_i \quad (5)$$

考虑到模型修正的过程中仅加载一次,则

$$K_m x_m = F_0 \quad (6)$$

式中, $x_m$ 为测量的位移向量。

将式(1)、式(6)联立求解,得

$$K_0 x_0 = (K_0 + \sum_{i=1}^n \beta_{0i} K_i) x_m \quad (7)$$

令 $\Delta x = x_0 - x_m$ ,则式(7)为

$$L \beta_0 = S \quad (8)$$

式中, $L = [K_1 x_m \quad K_2 x_m \quad \cdots \quad K_n x_m]$ ;  $S = K_0 \Delta x$ ;  $\beta_0$ 为由 $\beta_{0i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )组成的向量。

考虑到假设的模型与实际结构之间存在差异,将静力数据的测量误差视为随机变量,则

$$x_m = x_{m0} + \sum_{i=1}^l \eta_i x_{mi} \quad (9)$$

式中, $x_{m0}$ 为 $x_m$ 的均值部分; $l$ 为引起测量误差的随机变量个数; $\eta_i$ 为独立随机变量; $x_{mi}$ 为 $\eta_i$ 的伴随向量。

假定 $\eta_i$ 为完全相关的,即 $\eta_i = \eta$ 。同时由于修正因子受到实际测量信息的影响,则修正因子也可视为随机变量 $\eta$ 的函数,将其表示为 $\beta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, l$ )。

将式(9)代入式(7),同时假定 $x_{mi} = x_{m1}$  ( $i = 1, 2, \dots, l$ ),则

$$K_0 x_0 = [K_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i(\eta) K_i] (x_{m0} + \eta x_{m1}) \quad (10)$$

式(10)为一个考虑边界约束的静力随机模型修正方程。

### 1.3 静力凝聚

有限元模型修正通常使用结构的实际测量数据,旨在使修正后的有限元模型所计算的响应能够与实际结构的响应相匹配。由于实际测量的测量信息不足,实测数据会有一些的缺失,并且会对模型修正的效果产生一定的影响。为了使测量自由度与计算自由度相匹配。本文选择通过静力凝聚来解决实测数据缺失的问题。

对于结构的修正, $K_0$ 可以写成分块矩阵,即

$$\begin{pmatrix} K_{0ss} & K_{0st} \\ K_{0ts} & K_{0tt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{0s} \\ x_{0t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{0s} \\ F_{0t} \end{pmatrix} \quad (11)$$

式中, $K_{0ss}$ 、 $K_{0ts}$ 为 $K_0$ 对于未测量自由度的子矩阵; $K_{0st}$ 、 $K_{0tt}$ 为与测量自由度相关的子矩阵; $F_{0s}$ 为与未测量自由度对应的力向量; $F_{0t}$ 为与测量自由度对应的力向量。忽略梁的轴向变形,一个节点有两个自由度,把转角位移和竖向位移分别视为未测量自由度和测量自由度的位移向量。

将力向量 $F_{0s}$ 假定为零向量,代入式(11)得

$$K_{0t} x_{0t} = F_{0t} \quad (12)$$

式中, $K_{0t}$ 表示与 $K_0$ 的测量自由度匹配的刚度矩阵, $K_{0t} = K_{0tt} - K_{0ts} K_{0ss}^{-1} K_{0st}$ 。

同理, $K_m$ 可凝聚为

$$K_{mt} = K_{mtt} - K_{mts} K_{mss}^{-1} K_{mst} \quad (13)$$

式中,  $\mathbf{K}_{mss}$ 、 $\mathbf{K}_{mst}$  分别为  $\mathbf{K}_m$  对于未测量自由度的子矩阵;  $\mathbf{K}_{mtt}$ 、 $\mathbf{K}_{mst}$  为与测量自由度对应的子矩阵。

将  $\mathbf{K}_{mss}$ 、 $\mathbf{K}_{mst}$ 、 $\mathbf{K}_{mtt}$  和  $\mathbf{K}_{mst}$  表示为式(5)的形式后代入式(13)中,则

$$\mathbf{K}_{mt} = (\mathbf{K}_{0tt} + \sum_{i=1}^n \beta_{0i} \mathbf{K}_{it} - (\mathbf{K}_{0ts} + \sum_{i=1}^n \beta_{0i} \mathbf{K}_{its})(\mathbf{K}_{0ss} + \sum_{i=1}^n \beta_{0i} \mathbf{K}_{iss})^{-1} (\mathbf{K}_{0st} + \sum_{i=1}^n \beta_{0i} \mathbf{K}_{ist})) \quad (14)$$

式中,  $\mathbf{K}_{it}$ 、 $\mathbf{K}_{its}$ 、 $\mathbf{K}_{iss}$  和  $\mathbf{K}_{ist}$  为与第  $i$  个修正单元相关的扩展刚度矩阵  $\mathbf{K}_i$  的子矩阵。

将式(14)对修正因子  $\beta_{0i}$  求偏导,则

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{mt}}{\partial \beta_{0i}} = \mathbf{K}_{it} - \mathbf{K}_{its} \mathbf{K}_{0ss}^{-1} \mathbf{K}_{0st} - \mathbf{K}_{0ts} \mathbf{K}_{0ss}^{-1} \mathbf{K}_{ist} + \mathbf{K}_{0ts} \mathbf{K}_{0ss}^{-1} \mathbf{K}_{iss} \mathbf{K}_{0ss}^{-1} \mathbf{K}_{0st} \quad (15)$$

将式(6)、式(12)代入式(15)的1阶泰勒展开式,得

$$\mathbf{K}_{0t} \mathbf{x}_{0t} = (\mathbf{K}_{mt}|_{\beta_{0i}=0} + \sum_{i=1}^n \beta_{0i} \frac{\partial \mathbf{K}_{mt}}{\partial \beta_{0i}}|_{\beta_{0i}=0}) \mathbf{x}_{mt} \quad (16)$$

式中,  $\mathbf{x}_{mt}$  为测量位移向量,  $\mathbf{K}_{mt}|_{\beta_{0i}=0} = \mathbf{K}_{0t}$ 。

假定  $\mathbf{x}_{mt}$  为  $\eta$  的函数,可表示为  $\mathbf{x}_{m0} + \eta \mathbf{x}_{m1}$ , 则用  $\beta_i (i = 1, 2, \dots, n)$  替换  $\beta_{0i}$ , 式(16)可写为

$$\mathbf{K}_{0t} \mathbf{x}_{0t} = [\mathbf{K}_{mt}|_{\beta_i=0} + \sum_{i=1}^n \beta_i(\eta) \frac{\partial \mathbf{K}_{mt}}{\partial \beta_i}|_{\beta_i=0}] (\mathbf{x}_{m0} + \eta \mathbf{x}_{m1}) \quad (17)$$

式中,  $\mathbf{x}_{m0}$  为  $\mathbf{x}_{mt}$  的均值;  $\mathbf{x}_{m1}$  为  $\eta$  的伴随向量。

#### 1.4 随机模型修正方程的同伦构造和求解

为构造  $\beta$  的同伦形变方程,式(17)写为

$$(\mathbf{L}_0 + \eta \mathbf{L}_1) \beta - (\mathbf{K}_0 \mathbf{x}_0 - \mathbf{S}_0 - \eta \mathbf{S}_1) = 0 \quad (18)$$

式中,  $\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]^T$ ;  $\mathbf{S}_0 = \mathbf{K}_{0t} \mathbf{x}_{m0}$ ;  $\mathbf{S}_1 = \mathbf{K}_{0t} \mathbf{x}_{m1}$ ;

$$\mathbf{L}_0 = [\frac{\partial \mathbf{K}_{mt}}{\partial \beta_1}|_{\beta_1=0} \mathbf{x}_{m0}, \frac{\partial \mathbf{K}_{mt}}{\partial \beta_2}|_{\beta_2=0} \mathbf{x}_{m0}, \dots, \frac{\partial \mathbf{K}_{mt}}{\partial \beta_n}|_{\beta_n=0} \mathbf{x}_{m0}];$$

$$\mathbf{L}_1 = [\frac{\partial \mathbf{K}_{mt}}{\partial \beta_1}|_{\beta_1=0} \mathbf{x}_{m1}, \frac{\partial \mathbf{K}_{mt}}{\partial \beta_2}|_{\beta_2=0} \mathbf{x}_{m1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{K}_{mt}}{\partial \beta_n}|_{\beta_n=0} \mathbf{x}_{m1}]$$

为利用同伦方法,将方程构造以下形式:

$$(1-p)[\mathbf{L}_0 \Gamma(\eta, h, p) - \mathbf{L}_0 \beta_0] = p h [(\mathbf{L}_0 + \eta \mathbf{L}_1) \Gamma(\eta, h, p) - (\mathbf{K}_0 \mathbf{x}_0 - \mathbf{S}_0 - \eta \mathbf{S}_1)] \quad (19)$$

式中,  $p$  为嵌入参数,  $p \in [0, 1]$ ,  $h \neq 0$ 。  $\Gamma(\eta, h, p)$  表示关于参数  $h$  与  $p$  的函数,为  $\beta$  对应的同伦构造。

将向量函数  $\Gamma(\eta, h, p)$  进行麦克劳林展开,如

$$\Gamma(\eta, h, p) = \Gamma(\eta, h, 0) + \sum_{m=1}^{\infty} [\frac{\Gamma^{(m)}(\eta, h, 0)}{m!}] p^m \quad (20)$$

式中,  $\Gamma^{(m)}(\eta, h, 0)$  表示当  $p = 0$  时,  $\Gamma(\eta, h, p)$  对  $p$  的  $m$  阶偏导。

求得  $\Gamma(\eta, h, p)$  的一阶形变方程为

$$-[\mathbf{L}_0 \Gamma(\eta, h, p) - \mathbf{L}_0 \beta_0] + (1-p)(\mathbf{L}_0 \Gamma^{(1)}) = h [(\mathbf{L}_0 + \eta \mathbf{L}_1) \Gamma(\eta, h, p) - (\mathbf{K}_0 \mathbf{x}_0 - \mathbf{S}_0 - \eta \mathbf{S}_1)] + p h [(\mathbf{L}_0 + \eta \mathbf{L}_1) \Gamma^{(1)}] \quad (21)$$

式中,  $\Gamma^{(1)}$  中的符号  $\Gamma$  为  $\Gamma(\eta, h, p)$ 。当  $p = 0$ , 式(21)写为

$$\mathbf{L}_0 \Gamma^{(1)} = h [\mathbf{L}_0 \beta_0 - \mathbf{K}_0 \mathbf{x}_0 + \mathbf{S}_0 + (\mathbf{L}_1 \beta_0 + \mathbf{S}_1) \eta] \quad (22)$$

由推导可知,  $\mathbf{L}_0 \beta_0 - \mathbf{K}_0 \mathbf{x}_0 + \mathbf{S}_0 = 0$ 。求解式(22)得

$$\Gamma^{(1)} = (-h) \beta_1 \eta \quad (23)$$

式中,

$$\beta_1 = -\mathbf{L}_0^{-1} (\mathbf{L}_1 \beta_0 + \mathbf{S}_1) \quad (24)$$

当  $p = 0$  将零阶形变方程对  $p$  求  $m$  阶偏导数, 2~4 阶的表达形式如下:

$$\Gamma^{(2)} = 2(-h)(1+h) \beta_1 \eta + 2(-h)^2 \beta_2 \eta^2 \quad (25)$$

$$\Gamma^{(3)} = 6(-h)(1+h)^2 \beta_1 \eta + 12(-h)^2 (1+h) \beta_2 \eta^2 + 6(-h)^3 \beta_3 \eta^3 \quad (26)$$

$$\Gamma^{(4)} = 24(-h)(1+h)^3 \beta_1 \eta + 72(-h)^2 (1+h)^2 \beta_2 \eta^2 + 72(-h)^3 (1+h) \beta_3 \eta^3 + 24(-h)^4 \beta_4 \eta^4 \quad (27)$$

式中,  $\Gamma^{(2)}$ 、 $\Gamma^{(3)}$ 、 $\Gamma^{(4)}$  中的符号  $\Gamma$  为  $\Gamma(\eta, h, p)$ ;  $\beta_2 = -\mathbf{L}_0^{-1} \mathbf{L}_1 \beta_1$ ;  $\beta_3 = -\mathbf{L}_0^{-1} \mathbf{L}_1 \beta_2$ ;  $\beta_4 = -\mathbf{L}_0^{-1} \mathbf{L}_1 \beta_3$ 。

按上述步骤可求出当  $p = 0$  时函数  $\Gamma(\eta, h, p)$  对  $p$  的  $m$  阶偏导数。因此, 假定  $p = 1$  时,  $\beta$  的同伦级数解为

$$\beta(\eta, h) = \Gamma(\eta, h, 1) = \beta_0 + \lambda_{g,1}(h) \beta_1 \eta + \lambda_{g,2}(h) \beta_2 \eta^2 + \dots + \lambda_{g,k}(h) \beta_k \eta^k \dots \quad (28)$$

式中,  $\lambda_{g,k}(h) (k = 1, 2, \dots, g)$  表示为

$$\lambda_{g,k}(h) = \begin{cases} 0, & q > g \\ (-h)^q \sum_{k=0}^{g-q} \binom{k+q-1}{k} (1+h)^k, & 1 \leq q \leq g \\ 1, & q < 1 \end{cases} \quad (29)$$

式(29)中的辅助参数  $h$  对同伦级数解的收敛效率有较大影响。为了得到最优的  $h$  值, 我们一般使用样本点法。但样本点法选择的  $h$  值对样本点的取值范围较为敏感, 且选取的样本点强烈依赖于经验, 也就导致了所选取的  $h$  值不太稳定。为了避免人为选择的  $h$  值不合适造成的准确性损失, 本文使用了一种概率残差最小化方法<sup>[16]</sup>来求解本模型修正方法中同伦级数解的  $h$  值。

假设同伦算子方程的精确解为  $\beta(\eta)$ ,  $\beta_{(g),i}(\eta)$  为精确解  $\beta(\eta)$  对应的同伦级数近似解。近似解与精确解之间必然会有残余误差, 则在整个定义域内的累积误差为

$$R_{\text{Resp}}(h) = \int_R \{(\mathbf{L}_0 + \eta \mathbf{L}_1) \beta_{(g),i}(\eta) - (\mathbf{K}_{0t} \mathbf{x}_{0t} - \mathbf{S}_0 - \eta \mathbf{S}_1)\} \zeta(\eta) d\eta \quad (30)$$

式中,  $\zeta(\eta)$  为随机输入的联合概率密度函数, 可以看作是不同的概率分布对应的样本的权重。  $y$  可以取

1, 2, ... 等正整数。

对于精确解来说,有

$$\lim_{O \rightarrow \infty} E [\| (L_0 + \eta^{(O)} L_1) \beta(\eta^{(O)}) - (K_{0i} x_{0i} - S_0 - \eta^{(O)} S_1) \|^p] = 0, O = 1, 2, \dots \quad (31)$$

式中,  $\|\cdot\|$  表示向量的范数;  $O$  为样本数量。如果采用近似解来替代精确解,则有

$$\lim_{O \rightarrow \infty} E [\| (L_0 + \eta^{(O)} L_1) \beta_{(g),i}(\eta^{(O)}) - (K_{0i} x_{0i} - S_0 - \eta^{(O)} S_1) \|^p] = \theta, O = 1, 2, \dots \quad (32)$$

从等式可以看出,当  $\theta$  越接近 0 的时候,  $(L_0 + \eta^{(O)} L_1) \beta_{(g),i}(\eta^{(O)})$  和  $(K_{0i} x_{0i} - S_0 - \eta^{(O)} S_1)$  之间差值的  $y$  次幂的期望会越趋向于 0。因此  $R_{\text{Resp}}$  越小,近似解的精确度就越高。

设  $n$  个相互独立的随机变量  $\eta_i, i = 1, 2, \dots, n$  的样本区间为  $[c_i, d_i], i = 1, 2, \dots, n$ ; 概率密度函数为  $f_{\eta_i}, i = 1, 2, \dots, n$ 。则其累积的残余误差可写为

$$R_{\text{Resp}}(h) = \int_{c_1}^{d_1} \cdots \int_{c_n}^{d_n} [(L_0 + \eta L_1) \beta(\eta) - (K_{0i} x_{0i} - S_0 - \eta S_1)] f_{\eta_1}(\eta) \cdots f_{\eta_n}(\eta) d\eta_1 \cdots d\eta_n = E [(L_0 + \eta L_1) \beta(\eta) - (K_{0i} x_{0i} - S_0 - \eta S_1)] \quad (33)$$

将随机修正因子的同伦级数展开代入式(33),则

$$R_{\text{Resp}}(h) = \int_{c_1}^{d_1} \cdots \int_{c_n}^{d_n} [(L_0 + \eta L_1) [\beta_0(\eta) + \lambda_{g,1}(h) \beta_1(\eta) \eta + \lambda_{g,2}(h) \beta_2(\eta) \eta^2 + \cdots + \lambda_{g,k}(h) \beta_k(\eta) \eta^k \cdots] - (K_{0i} x_{0i} - S_0 - \eta S_1)] f_{\eta_1} \cdots f_{\eta_n} d\eta_1 \cdots d\eta_n \quad (34)$$

为找到使同伦级数解的收敛效率最快的  $h$  值,定义如下表达式

$$\min_{h^*} R_{\text{Resp}}(h) = E \{ [(L_0 + \eta L_1) \beta(\eta) - (K_{0i} x_{0i} - S_0 - \eta S_1)]^p \} \quad (35)$$

此时引入 2 范数来确定  $h$  值,使  $R_{\text{Resp}}(h)$  的 2 范数最小时对应的  $h$  值即为最优解  $h^*$ 。

Tikhonov 正则化是现今使用得最为广泛的一种正则化方法,其求解效率十分高。于是本文先使用 Tikhonov 正则化方法,建立式(8)的最小化目标函数为

$$B = \|L\beta_0 - S\|_2^2 + \varphi^2 \|\beta_0\|_2^2 \quad (36)$$

式中,  $\varphi$  为由 L 曲线准则所确定的正则化参数。

根据奇异值截断,可得  $\beta_0$  的正则化解为

$$\beta_0 = \sum_{i=1}^m \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \varphi^2} \frac{w_i^T S}{\sigma_i} v_i \quad (37)$$

式中,  $\sigma_i^2, w_i$  和  $v_i$  分别为矩阵的第  $i$  个奇异值、左奇异向量和右奇异向量。

### 1.5 模型修正的有效性验证

对于修正后的刚度矩阵,结构的修正位移应满足下式:

$$\{ K_0 + \sum_{i=1}^n [\beta_{0i} + \lambda_{g,1}(h) \beta_{1i} \eta + \lambda_{g,2}(h) \beta_{2i} \eta^2 + \cdots + \lambda_{g,k}(h) \beta_{ki} \eta^k \cdots] K_i \} x_m = F_0 \quad (38)$$

式中,  $x_m$  为结构的修正位移向量,且为随机变量  $\eta_i$  的函数;  $\beta_{1i}, \beta_{2i}, \dots, \beta_{ki}$  分别为向量  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  的第  $i$  个单元。

## 2 带边界约束变截面梁的随机模型修正

考虑一个混凝土变截面单跨梁,如图 1 所示。假定梁的初始有限元模型的弹性模量  $E=28$  GPa,截面尺寸为  $0.15 \text{ m} \times 0.3 \text{ m}, 0.15 \text{ m} \times 0.4 \text{ m}$ ,梁总长为  $1.9 \text{ m}$ 。将梁划分为 12 个欧拉-伯努利梁单元。外力作用于第 5、9 号节点,大小均为  $5000 \text{ N}$ 。假定两侧的弹簧系数  $\Theta_{v,1}=10, \Theta_{v,2}=10$ 。除去两支座处的位移,其余节点位移的测量误差均假定为服从贝塔分布。

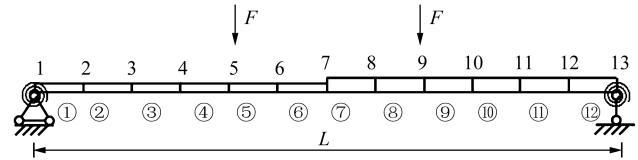


图 1 变截面梁有限元模型

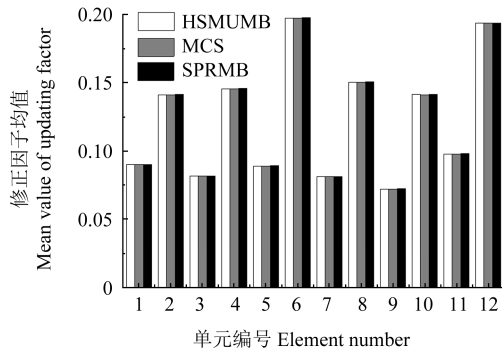
Fig. 1 Finite element model of variable cross-section beam

由于梁的模型与实际情况之间存在一定误差,则假定每个单元的刚度均产生折减,其折减的值如表 1 所示。为了模拟测量挠度的不确定性从小变大,假定测量误差的变异系数  $C_{\text{cov}}$  分别为 0.10 和 0.30。用同伦方法 (Homotopy Stochastic Finite Element Based Structural Static Model Updating Method With Boundary Conditions, HSMUMB) 和蒙特卡洛方法 (Monte-Carlo Simulation, MCS) 对其进行修正。MCS 方法是一种通过随机抽样来估计复杂系统的行为或计算某些量的统计特性的方法,是对确定性修正结果的重复抽样,一般认为最接近于真实值,故可作为其他随机方法的参考值。对于 MCS 方法,用  $10^5$  个样本模拟测量误差,并与二阶摄动方法 (Second-order Perturbation with Regularization Based Model Updating with Boundary Conditions, SPRMB) 进行比较。为了展示本方法整体修正的效果,分别选取边界单元和梁身单元的修正结果。图 2 展示了梁单元修正因子的均值和均方差,图 3、图 4 分别展示了第 1 和第 8 单元的修正因子概率密度函数。

表 1 单元抗弯刚度折减率

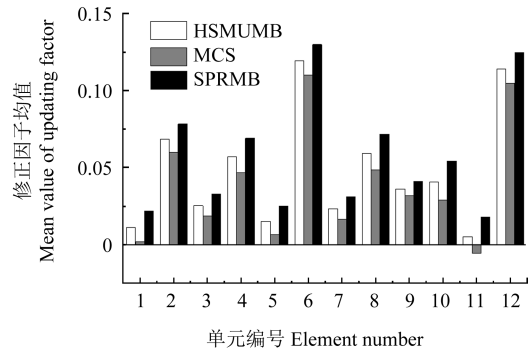
Tab. 1 Reduction rate of element bending stiffness

单元编号 Element number	1	2	3	4	5	6
刚度折减率 Reduction rate	0.1	0.15	0.1	0.15	0.1	0.2
单元编号 Element number	7	8	9	10	11	12
刚度折减率 Reduction rate	0.1	0.15	0.1	0.15	0.1	0.2



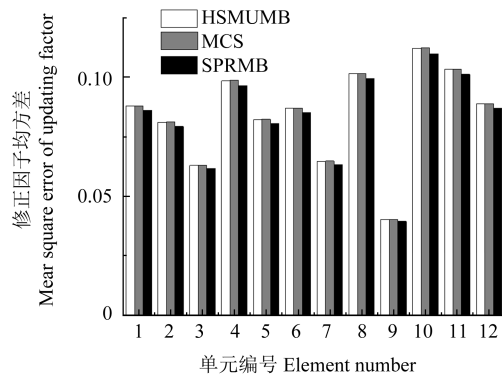
(a) 均值 ( $C_{cov}=0.10$ )

(a) Mean value ( $C_{cov}=0.10$ )



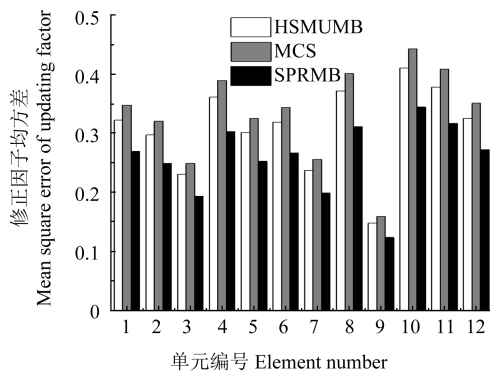
(b) 均值 ( $C_{cov}=0.30$ )

(b) Mean value ( $C_{cov}=0.30$ )



(c) 均方差 ( $C_{cov}=0.10$ )

(c) Mean square error ( $C_{cov}=0.10$ )

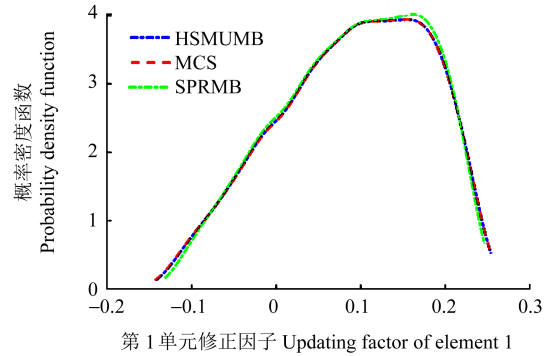


(d) 均方差 ( $C_{cov}=0.30$ )

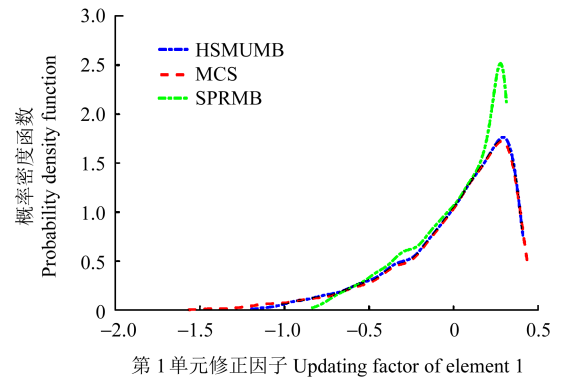
(d) Mean square error ( $C_{cov}=0.30$ )

图2 梁单元修正因子统计值

Fig. 2 Statistics value of beam element updating factors



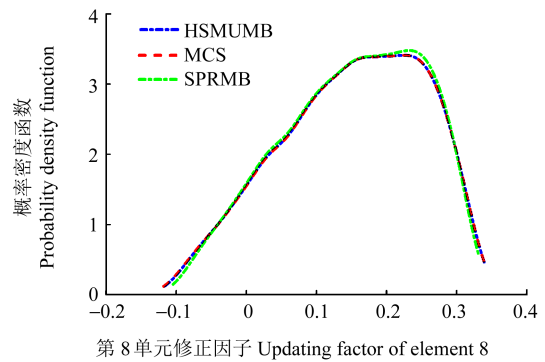
(a)  $C_{cov}=0.10$



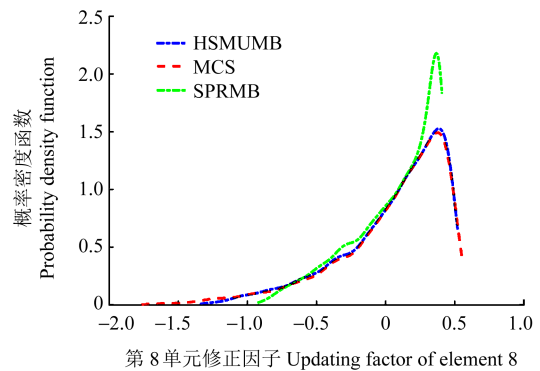
(b)  $C_{cov}=0.30$

图3 第1单元修正因子概率密度函数

Fig. 3 Probability density function of updating factors of element 1



(a)  $C_{cov}=0.10$



(b)  $C_{cov}=0.30$

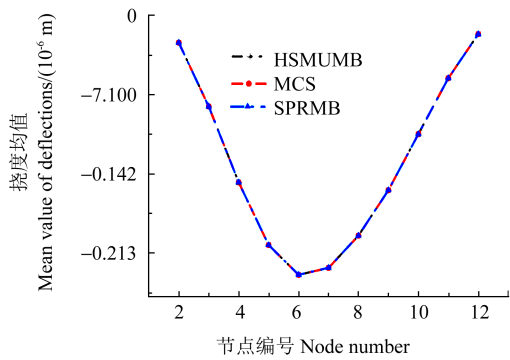
图4 第8单元修正因子概率密度函数

Fig. 4 Probability density function of updating factors of element 8

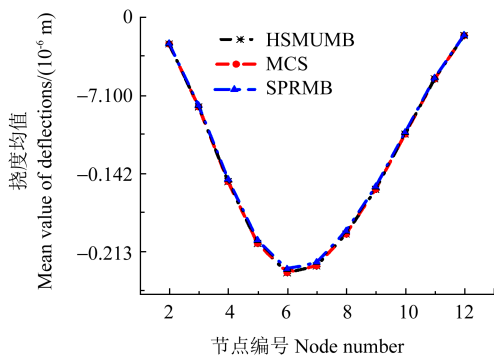
从图 2(a)、图 2(c)可以看出,在变异系数  $C_{cov}$  为 0.1 时,HSMUMB 方法、SPRMB 方法与 MCS 方法的修正结果都比较接近。HSMUMB 方法其均值和均方差的相对误差均在 0.2% 和 2% 以内。但随着测量误差变异性增大,由图 2(b)、图 2(d)可知,SPRMB 方法修正结果的均值与 MCS 方法的相对误差最小有 28.5%,而 HSMUMB 方法的均值与 MCS 方法相对误差明显要小,最小相对误差保证在 8.2%。对于均方差部分,HSMUMB 方法与 MCS 方法的相对误差在 7.3%,而 SPRMB 方法与 MCS 方法的相对误差在 68%~252%。

从图 3、图 4 的第 1 和第 8 单元修正因子的概率密度函数的曲线也可以看出,在变异系数  $C_{cov}$  为 0.1 的时候,SPRMB 方法还能与 MCS 方法有着较好的吻合,但当变异系数变  $C_{cov}$  为 0.3 的时候,SPRMB 方法就已经产生了严重的偏移,而 HSMUMB 方法还是能与 MCS 方法有较高的拟合度。因此,综合图 2 的结果,HSMUMB 方法比 SPRMB 方法的精度更高。

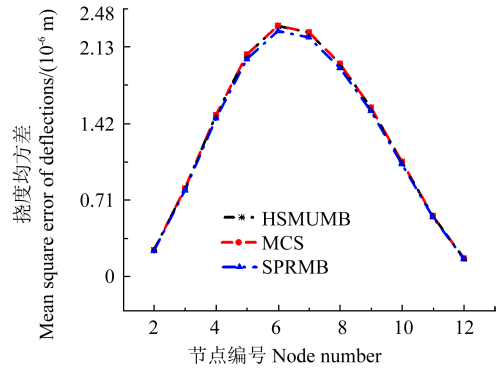
为了证明模型的有效性,将单元修正因子代回到公式中计算出节点修正后的挠度。图 5 展示了挠度的均值和均方差,由图 5 可以看出,当变异系数较小的时候,SPRMB 方法和 MCS 方法计算出的节点挠度均值和均方差基本一致,但随着变异系数变大之后,其也产生了差异。这一结果清晰地表明,HSMUMB 方法在变异



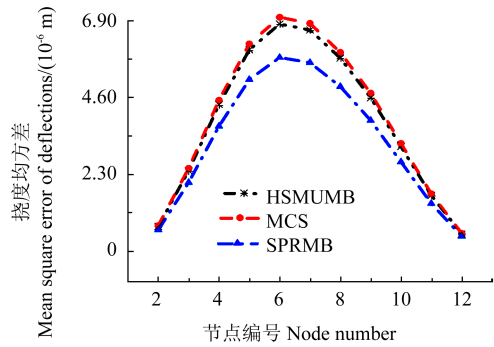
(a) 均值 ( $C_{cov}=0.10$ )  
(a) Mean value ( $C_{cov}=0.10$ )



(b) 均值 ( $C_{cov}=0.30$ )  
(b) Mean value ( $C_{cov}=0.30$ )



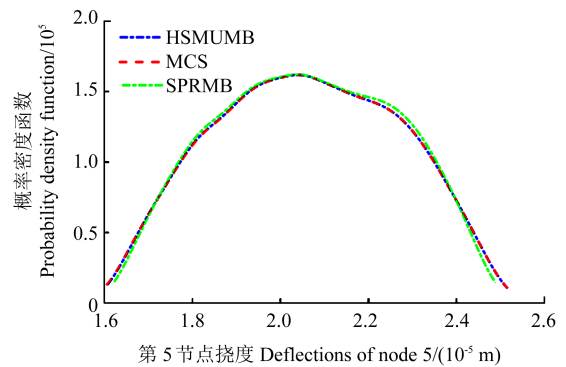
(c) 均方差 ( $C_{cov}=0.10$ )  
(c) Mean square error ( $C_{cov}=0.10$ )



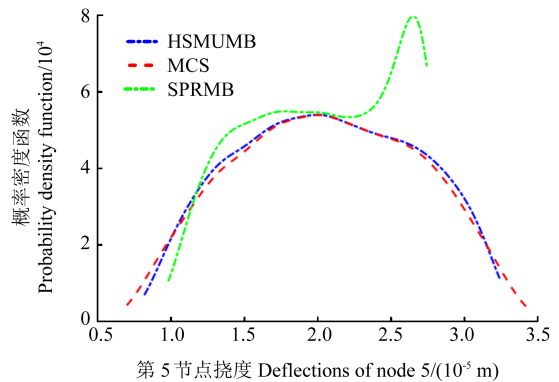
(d) 均方差 ( $C_{cov}=0.30$ )  
(d) Mean square error ( $C_{cov}=0.30$ )

图 5 梁节点挠度统计值

Fig. 5 Statistics value of beam nodal deflection



(a)  $C_{cov}=0.10$



(b)  $C_{cov}=0.30$

图 6 第 5 节点挠度概率密度函数

Fig. 6 Probability density function of deflections of node 5

系数较大时的优越性。图6、图7展示了第5和第12节点挠度的概率密度函数。从图6、图7则更加清晰地看出,变异系数变大之后,SPRMB方法产生了严重的偏移,而HSMUMB方法仍然还有着较高的吻合度。

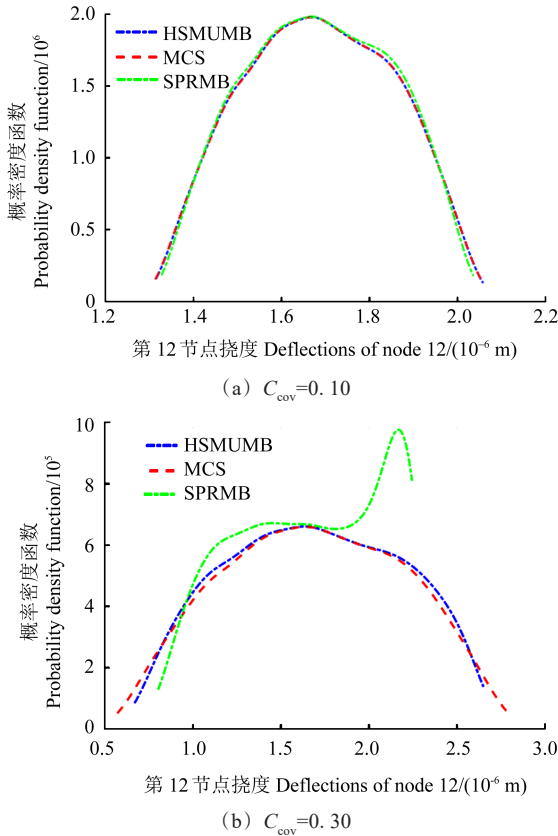
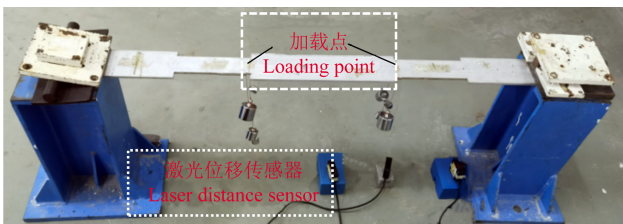


图7 第12节点挠度概率密度函数  
Fig. 7 Probability density function of deflections of node 12

### 3 试验研究

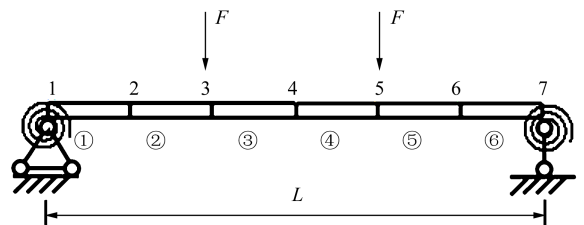
铝合金梁的加载试验如图8(a)、图8(b)所示,铝合金梁的材料参数:铝合金梁的长度为1.2 m;截面面积为0.1 m × 0.008 m。将铝合金梁沿纵向划分为6个单元,每个单元的长度为0.2 m。考虑到右侧支座处存在搭接长度,则6号单元的计算长度为0.19 m,铝合金梁的弹性模量为66 GPa。试验铝合金梁的有限元模型由6个梁单元和7个节点构成,如图8(c)所示。在梁的三分点处通过悬挂砝码进行加载。测量节点位移的测量误差假定为贝塔分布,利用本文所提出的方法对铝合金梁初始模型进行修正。



(a) 激光传感器及加载位置  
(a) Laser sensor and loading position



(b) 梁的刚度变化区域  
(b) Variation area of beam stiffness



(c) 梁的有限元模型  
(c) Finite element model of beam

图8 铝合金梁加载试验  
Fig. 8 Loading test of aluminum alloy beam

为了模拟铝合金梁的刚度变化,试验前对铝合金梁进行处理,将梁的第2和第5单元左右各切掉15%和20%左右的铝合金条,使第2单元和第5单元的刚度人为地减少了30%和40%,铝合金梁刚度折减的单元不连续。将铝合金梁两端用螺栓和重物固定好后,将螺栓拧松几圈,模拟半刚性的情况。在两侧加载点施加载荷。试验过程中只有3个激光位移传感器,于是对铝合金梁进行分批测量,以获得5个测量节点的挠度信息。使用激光位移传感器进行测量时,取每次加载时挠度稳定后一段时间内的平均值作为一次挠度的响应值,卸载然后再重复加载。用15组挠度数据作为试验数据的样本集。在铝合金梁的静力加载试验过程中,所使用的激光位移传感器不能进行节点转角的测量,只能测得竖向位移即挠度变化,于是在进行模型修正时需要通过静力凝聚来缩减自由度。加载力为30 N时,铝合金梁节点挠度的测量数据如表2所示。

表2 F=30 N荷载下试验梁节点测量挠度的均值与变异系数  
Tab. 2 Mean value and coefficient of variation of test beam nodal deflection at F=30 N

节点编号 Node number	2	3	4	5	6
均值 Mean value/m	$-4.48 \times 10^{-7}$	$-1.24 \times 10^{-6}$	$-1.52 \times 10^{-6}$	$-1.17 \times 10^{-6}$	$-4.33 \times 10^{-6}$
变异系数 Coefficient of variation	0.018 4	0.025 1	0.041 2	0.027 3	0.020 1

利用HSMUMB方法对梁进行修正,得到的区域修正因子统计值如图9所示。将所得到的修正因子的值代回公式可得到修正后试验梁节点的均值和均方差结果,节点挠度统计值如图10所示。

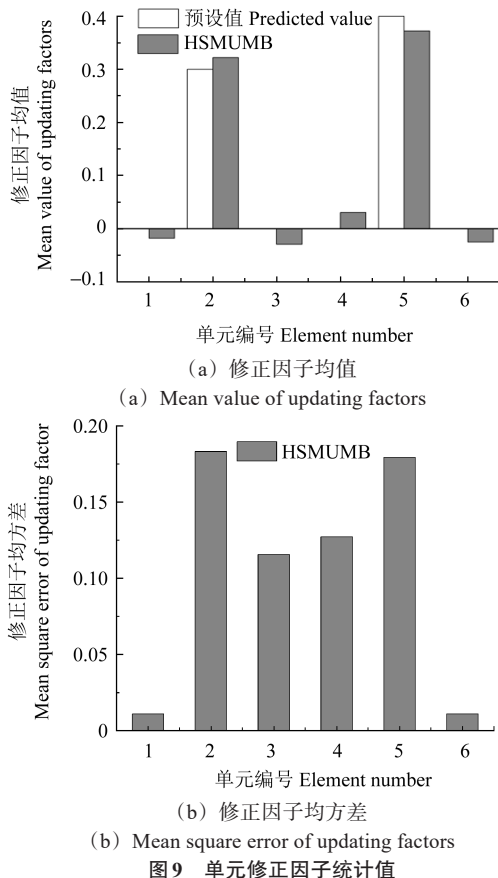


图9 单元修正因子统计值

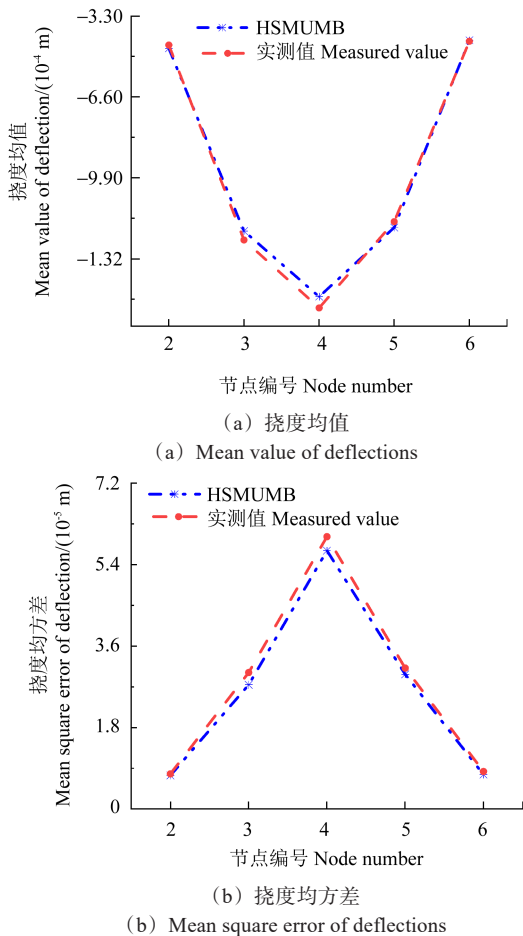


图10 节点挠度统计值

Fig. 10 Statistics value of nodal deflections

通过修正之后的修正结果可知,  $\Theta_{v1}=8.07$ ,  $\Theta_{v2}=8.24$ 。结果也表明了,修正后模型节点的挠度均值和均方差与实测的结果基本保持一致。而修正因子也与实际折减的结果相近,验证了HSMUMB方法的有效性。

#### 4 结论

通过上述理论推导、数值算例和加载试验验证,可以得到如下结论:

1)在模型修正中过分简化边界约束造成的影响不可忽略。

2)针对该问题,基于现有研究,本文提出了一种基于同伦随机有限元方法的梁结构边界约束的静力模型修正方法。将结构参数和测量误差考虑为随机变量,建立了考虑边界约束的随机有限元模型修正方程。利用静力凝聚方法将未测量自由度消除,最后使用正则化算法减少了随机模型修正方程病态解的出现。

3)变截面梁的数值算例表明,该方法在变异系数较大时仍能有较好的修正效果。

4)铝合金梁的静力加载试验验证了本方法的有效性。

#### 参考文献(References)

[1] 翁顺,朱宏平. 基于有限元模型修正的土木工程损伤识别方法[J]. 工程力学,2021,38(3):1-16.  
WENG Shun,ZHU Hongping. Damage identification of civil structures based on finite element model updating [J]. Engineering Mechanics,2021,38(3):1-16. (In Chinese)

[2] ZAPICO J L,GONZÁLEZ M P,FRISWELL M I, et al. Finite element model updating of a small scale bridge[J]. Journal of Sound and Vibration,2003,268(5):993-1012.

[3] FRISWELL M I,MOTTERSHEAD J E,AHMADIAN H. Finite-element model updating using experimental test data: parametrization and regularization[J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences,2001,359(1778):169-186.

[4] PARK Y S,KIM S,KIM N, et al. Evaluation of bridge support condition using bridge responses [J]. Structural Health Monitoring, 2019,18(3):767-777.

[5] PARK Y S,KIM S,KIM N, et al. Finite element model updating considering boundary conditions using neural networks [J]. Engineering Structures,2017,150:511-519.

[6] KIM S H,PARK Y S,KIM N G, et al. Finite element model updating of simple beam considering boundary conditions[J] Journal of the Korea Institute for Structural Maintenance and Inspection, 2018,22(2):76-82.

[7] 黄斌,常晓林,瞿伟廉. 边界约束刚度不确定的结构振动特征值[J]. 计算力学学报,2002,19(4):427-430.  
HUANG Bin,CHANG Xiaolin,QU Weilian. Vibration eigenvalues of structures with uncertain boundary restrict stiffness[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2002, 19(4):427-430. (In

- Chinese)
- [8] 张纪二,禹智涛. 结构强度可靠性分析的模糊随机边界元法[J]. 计算力学学报,2003,20(1):90-94.  
ZHANG Feier, YU Zhitao. Reliability analysis of structural strength for fuzzy stochastic boundary element method [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2003, 20(1): 90-94. (In Chinese)
- [9] 蔡永昌,朱合华. 在无单元法里直接准确施加位移边界条件和材料不连续条件[J]. 计算力学学报,2004,21(6):740-745.  
CAI Yongchang, ZHU Hehua. Direct imposition of essential boundary and material discontinuity conditions in the meshless method [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2004, 21(6): 740-745. (In Chinese)
- [10] 李英超,张敏,李华军. 利用不完备实测模态修正杆系结构约束边界条件[J]. 工程力学,2013,30(1):288-294.  
LI Yingchao, ZHANG Min, LI Huajun. Model updating for constraint boundary conditions of member structures using incomplete measured modes [J]. Engineering Mechanics, 2013, 30(1): 288-294. (In Chinese)
- [11] WANG S Q. Model updating and parameters estimation incorporating flexible joints and boundary conditions[J]. Inverse Problems in Science and Engineering, 2014, 22(5): 727-745.
- [12] SHI Z, HONG Y, YANG S L. Updating boundary conditions for bridge structures using modal parameters [J]. Engineering Structures, 2019, 196: 109346.
- [13] 邹向农,龙俊贤,阳德高,等. 考虑边界约束条件的悬索桥有限元模型修正研究[J]. 铁道科学与工程学报,2019,16(5):1223-1230.  
ZOU Xiangnong, LONG Junxian, YANG Degao, et al. Finite element model updating for a suspension bridge considering the boundary constraint conditions [J]. Journal of Railway Science and Engineering, 2019, 16(5): 1223-1230. (In Chinese)
- [14] 秦仙蓉,郝婧兰,徐俭,等. 考虑边界条件不确定性的塔机有限元模型修正[J]. 振动测试与诊断,2018,38(1):92-96.  
QIN Xianrong, HAO Ruolan, XU Jian, et al. Finite element model updating of a tower crane including boundary condition uncertainty [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2018, 38(1): 92-96. (In Chinese)
- [15] 郭晓敬,肖华,张伟伟,等. 一种基于试验模态参数的结构边界条件优化设计方法[J]. 西北工业大学学报,2014,32(5):707-712.  
WU Xiaojing, XIAO Hua, ZHANG Weiwei, et al. Optimization method for uncertain boundary constraint of structure dynamical model based on test modal parameter [J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2014, 32(5): 707-712. (In Chinese)
- [16] ZHANG H, HUANG B, LIU Y H, et al. A new stochastic residual error based homotopy approach for stability analysis of structures with large fluctuation of random parameters [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2023, 124(1): 183-216.

## Boundary constraint static model modification of beam structure based on homotopy stochastic finite element method

HU Jianwei<sup>1</sup> QI Can<sup>2,4</sup> ZHU Liping<sup>3,4</sup> WU Zhifeng<sup>4,5</sup> HUANG Bin<sup>4</sup> CHEN Xuelong<sup>1,4</sup>

(1. WSGRI Engineering & Surveying Incorporation Limited, Wuhan 430080, China)

(2. China Gezhouba Group Corporation of Power Company, Yichang 443002, China)

(3. WISDRI Wuhan Architecture Design Co., Ltd., Wuhan 430000, China)

(4. School of Civil Engineering and Architecture, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, China)

(5. School of Civil and Hydraulic Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

**Abstract:** Considering the uncertainty associated with structural boundary conditions, a method for modifying the boundary constraint static model of beam structures was proposed based on the homotopy stochastic finite element method. The overall modification of both the beam body elements and boundary elements was achieved using uncertain static measurement data. By employing the static condensation method, computational degrees of freedom were ensured to match measured degrees of freedom. Regularization methods were applied to mitigate ill-conditioned solutions in modification equations for stochastic models. The probabilistic residual minimization method enables optimal selection of homotopy coefficients, ensured accurate identification of boundary constraints and precise overall modification. Finally, simulations on variable-section concrete beams and static loading tests on aluminum alloy beams were conducted to verify the effectiveness of this approach.

**Key words:** Homotopy stochastic finite element; Boundary constraint; Model modification; Static measurement error; Static condensation

Corresponding author: WU Zhifeng, E-mail: wuzhifeng\_tujian@whut.edu.cn

Fund: National Natural Science Foundation of China (51978545)

Received: 2024-08-19 Revised: 2024-10-10