

两自由度含间隙弹性碰撞振动系统的等效电路仿真

朱喜锋^{1,2} 付文斌¹ 马硕¹ 郑冬¹

(1. 兰州交通大学机电工程学院, 兰州 730070)

(2. 甘肃省轨道交通装备系统动力学与可靠性重点实验室, 兰州 730070)

摘要: 以一类两自由度含间隙及弹性约束碰撞系统为研究对象,通过数值仿真方法,研究了系统在低频工况下周期运动的区域分布及转迁规律,得出随着激振频率的减小, $p/1$ 周期运动发生擦边分岔转迁为 $(p+1)/1$ 周期运动,当碰撞次数足够大时,系统呈现 Chattering-impact 特性。随后建立与碰撞系统完全等效的电路模型并进行仿真实验。研究结果表明,建立等效电路产生的结果与数值仿真产生的结果相一致,且等效电路在仿真实验时运算速度更高效,能够实现快速的模态转换及参数调节,使之更加便捷,为非线性动力学的研究提供了一种研究方法。

关键词: 振动系统; 模态转换; 数值仿真; 颤碰运动; 等效电路

中图分类号: TH39 **DOI:** 10.16579/j.issn.1001.9669.2025.01.004

0 引言

间隙和约束等非线性因素常常存在于高速列车的轮轨系统、制动系统中,影响各类车辆系统的动力性和稳定性。当接触到这些非线性因素时,高速列车将会引起噪声和振动,从而使得机械装备成为一个非光滑的动力学系统,这种现象的持续发生会造成零件的损坏。为提高各类铁路车辆的运行稳定性与可靠性,朱喜锋等^[1-2]运用数值仿真法研究了一类含间隙弹性碰撞振动系统,通过数值仿真法揭示了该系统的周期运动和参数存在的区域,并揭示了系统发生颤振和碰撞的运动特点。丁杰等^[3]研究了一类含不同约束的单自由度碰撞振动系统,通过系统周期运动及转迁规律,揭示了周期运动之间的转迁规律。李国芳等^[4]研究了一类非光滑系统模型在不同状态下的动力学特性,揭示了系统从基本周期运动到黏附运动的过渡机制。李得洋等^[5]采用了胞映射法研究了一类单自由度碰撞振动系统,重点分析了系统在各参数域内的动力特性及转迁规律,并研究了系统周期吸引子与吸引域分布规律。李万祥等^[6]研究了一类单自由度含间隙系统,采用4阶 Runge-Kutta 法进行数值仿真,发现了该机械碰撞系统存在叉式分岔、倍周期分岔,而且存在 Hopf 分岔。吕小红等^[7-8]研究了一类两自由度含间隙碰撞振动系统,揭示了系统低频区无冲击、基本冲

击、亚谐冲击周期振动模式以及奇异点的分岔特征。吕恩胜等^[9]设计了一类分段线性电阻,再将其应用于新的蔡氏电路中,通过仿真和测试发现了新的蔡氏电路能有效地产生混沌行为。李新颖等^[10]设计了一类广义忆阻器,将其引入到混沌系统中,研究其动力学特性,在此基础上建立了混沌电路,验证了忆阻器混沌电路的可行性。李旭等^[11]研究了一类蔡氏电路模型,着重分析了电路系统不同区域中平衡态及稳定性,并且探讨系统穿越非光滑分界面时的非常规分岔类型。季颖等^[12]研究了一类四阶广义蔡氏电路在两时间尺度下的动力学特性,通过引入快慢分析法,对系统动力学行为产生机制及其演化规律进行理论与解释,所得出的结果与数值计算的结果进行对比,发现一致。徐国泰等^[13]建立了一类二维弹道修正组件的电路仿真模型,在有无控制条件下分别对其进行仿真分析,发现小阻值的负载阻值以及大容值的电容对磁力矩电动机控制较好。张小红等^[14]研究了一类忆阻函数多项式为实数指数幂的忆阻器,在此次基础上构建了一类混沌电路系统,研究系统在不同参数下的动力学特性。赵丽娜^[15]研究了一类非线性电路,对非线性电路传输信号的影响机制进行深入研究。通过 Huiwitz 定理,研究非线性同步传输信号时相关系数的取值范围,发现结果与实验结果相对应。汪净等^[16-19]利用集成运算放大电路的线性叠加原理,设计

收稿日期: 2023-06-02 修回日期: 2023-07-06

基金项目: 甘肃省科技计划项目(20JR5RA424)

作者简介: 朱喜锋,男,1980年生,河南虞城人,博士,副教授,硕士研究生导师; 主要研究方向为非线性系统动力学; E-mail: zhuxf@mail.lzjtu.cn。

付文斌,男,1995年生,甘肃兰州人,硕士研究生; 主要研究方向为非线性系统动力学; E-mail: fuwenbing1314520@163.com。

引用格式: 朱喜锋,付文斌,马硕,等. 两自由度含间隙弹性碰撞振动系统的等效电路仿真[J]. 机械强度,2025,47(1):31-41.

ZHU Xifeng, FU Wenbin, MA Shuo, et al. Equivalent circuit simulation of a two-degree-of-freedom elastic collision vibration system with gaps[J]. Journal of Mechanical Strength, 2025, 47(1): 31-41.

了几类不同特征的分段线性函数,并进行仿真实验,验证了所设计等效电路的正确性。刘瑞家等^[20]研究了一类含间隙二自由度碰撞振动系统,通过建立等效电路模型,得出了等效电路与数值仿真分析结果相同的结论。LUO等^[21]研究了一类两自由度含间隙弹性碰撞振动系统的动力学特性,通过搭建等效电路来分析约束参数对动力学的影响。近年来国内外学者在研究非线性动力学方面大多基于数值计算,利用等效电路来研究复杂的非线性系统动力学方面研究的比较少。

本文研究了一类两自由度含间隙机械碰撞振动系统,建立了两种 Poincaré 映射,分析了该系统在 $(p+1)/1$ 和 $p/1$ 周期运动的转迁规律,在此基础上设计了一种理论上与数值计算等效的电子电路,并在 Multisim 软件中对其进行仿真分析,主要缩短了为解决非线性问题时所耗费的时间成本及提高了相关参数调节时的便捷性,为非线性系统动力学的研究提供一种实验方法。

1 力学模型及动力学特性

1.1 力学模型

两自由度含间隙机械碰撞系统的力学模型如图 1 所示,其中两物块分别用 M_1 、 M_2 表示,由刚度系数为 K_1 的线性弹簧和阻尼系数为 C_1 的线性阻尼器连接在 M_1 、 M_2 之间。由刚度系数为 K_2 的线性弹簧和阻尼系数为 C_2 的线性阻尼器连接在物块 M_2 与支撑面上,作用在 M_1 、 M_2 上的简谐激振力为 $P_i \sin(\Omega' T + \tau)$ ($i=1, 2$); 其中, P_i 为激振力的振幅, Ω' 为频率, τ 为相位角。当激振力幅值逐渐增大时,使得物块 M_1 的位移大于或等于间隙 B , 物块 M_1 与弹性约束发生碰撞,弹性约束的刚度系数取值范围为 $K_0 \in (0, \infty)$ 。当系统发生弹性碰撞时,使得原本初始的线性系统转变为复杂的冲击碰撞振动系统。根据系统的受力条件,建立动力学微分方程,为

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 & -C_1 \\ -C_1 & C_1 + C_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 + K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F(x_1) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} \sin(\Omega' T + \tau) \quad (1)$$

为了分析的普遍性引入以下无量纲量:

$$\begin{aligned} \mu_m &= \frac{M_2}{M_1 + M_2}, \omega = \Omega \sqrt{\frac{M_1}{K_1}}, \mu_k = \frac{K_2}{K_1 + K_2}, \\ \mu_c &= \frac{C_2}{C_1 + C_2}, \zeta = \frac{C_1}{\sqrt{K_1 M_1}}, f_{20} = \frac{P_2}{P_1 + P_2}, \\ \mu_{k_0} &= \frac{K_0}{K_0 + K_1}, \delta = \frac{BK_1}{P_1 + P_2}, t = T \sqrt{\frac{K_1}{M_1}}. \end{aligned}$$

该系统无量纲微分方程为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\mu_m}{1 - \mu_m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\zeta & -2\zeta \\ -2\zeta & \frac{2\zeta}{1 - \mu_c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{1}{1 - \mu_k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f(x_1) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 - f_{20} \\ f_{20} \end{Bmatrix} \sin \theta(\omega t + \tau) \quad (2)$$

其中

$$f(x_1) = \begin{cases} \frac{\mu_{k_0}}{1 - \mu_{k_0}} (x_1 - \delta), & x_1 > \delta \\ 0, & x_1 \leq \delta \end{cases} \quad (3)$$

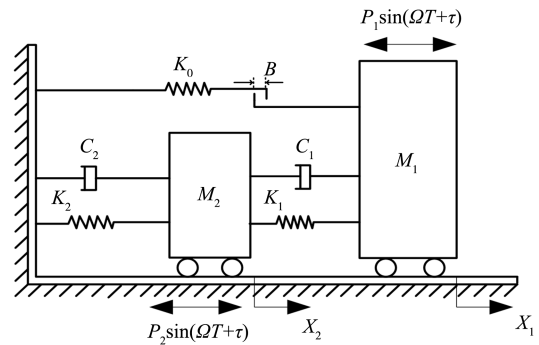


图 1 两自由度机械碰撞系统的力学模型

Fig. 1 Mechanical model of two-degree-of-freedom mechanical collision system

1.2 Poincaré 截面

引入符号 $q=p/n$ 表示机械碰撞系统的周期运动以及亚谐运动,其中 p ($p=1, 2, \dots$) 表示碰撞次数, n ($n=1, 2, \dots$) 表示周期数,在此基础上建立了该系统 Poincaré 映射,选择

$$\sigma_p = \{(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, t) \in R^4 \times T, x_1 = \delta, x_1 > 0\} \quad (4)$$

建立 Poincaré 映射为

$$X^{(i+1)} = f[v, X^{(i)}] \quad (5)$$

式中, $X \in R^4$, $v \in R^m$ 是实参数, $X^{(i)} = (\dot{x}_2^{(i)}, x_2^{(i)}, \dot{x}_2^{(i)}, \tau^{(i)})T$, $X^{(i+1)} = (\dot{x}_2^{(i+1)}, x_2^{(i+1)}, \dot{x}_2^{(i+1)}, \tau^{(i+1)})T$ 。

1.3 低频下碰撞振动系统的动力学特性

由于机械碰撞系统中含有的无量纲参数分别为 ω 、 μ_{k_0} 、 ζ 、 δ 、 μ_m 、 μ_c 、 μ_k 、 f_{20} , 选择其中影响最大的激振频率 ω 与间隙 δ 作为分岔参数,分析机械系统的动力学特性。选取参数 $\mu_{k_0}=0.95$, $\zeta=0.1$, $\mu_m=\mu_c=\mu_k=0.5$, $f_{20}=1$, 以 $\delta \in [0, 1]$, $\omega \in [0, 0.8]$ 为参数采样范围,计算出系统在 (ω, δ) 参数域上的双参数分岔图,如图 2 所示,其中不同的 p/n 周期运动由不同的颜色标识。由图 2 可知,随着 ω 和间隙的减小, $p/1$ 周期运动穿越 Grazing 分岔边界线转迁为 $(p+1)/1$ 周期运动,基本冲击运动呈带状区域分布,并在两类稳定周期运动的边界附近夹杂着 $(np+1)/n$ 。系统的三维冲击速度如图 3 所示。由图 3 可知,随着激振频率的减小,系统在小间隙工况下所

呈现动力学特性尤为丰富,比较具有研究价值。

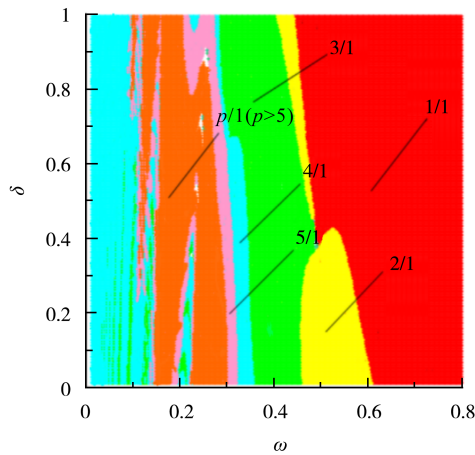


图 2 低频工况下系统周期运动的双参数分岔图

Fig. 2 Two-parameter bifurcation diagram of the periodic motion of the system under low frequency operating condition

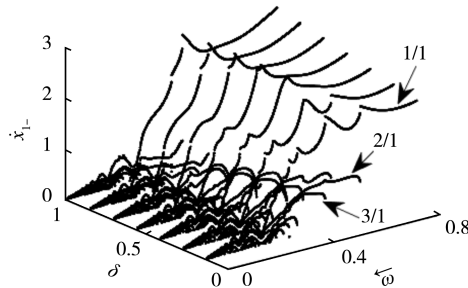


图 3 系统冲击速度 \dot{x}_1 分岔图

Fig. 3 Bifurcation diagram of the system impact velocity \dot{x}_1

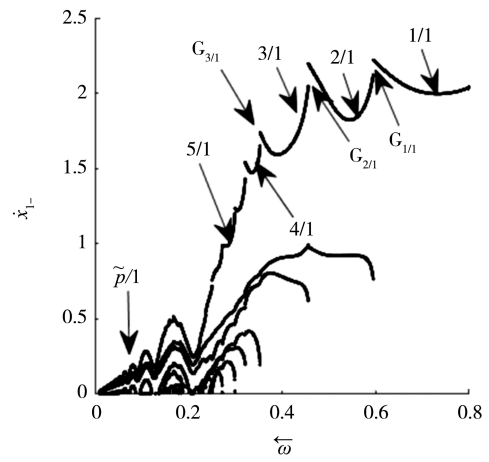
选取参数 $\delta=0.1$,通过数值仿真计算得出,该碰撞振动系统中物块 M_1 的冲击速度 \dot{x}_1 随激振频率 ω 变化的单参数分岔图如图 4(a)、图 4(c) 所示,系统中物块 M_1 的位移 x_{1p} 随激振频率 ω 变化的单参数分岔图如图 4(b)、图 4(d) 所示。图 4 中横坐标为激振频率 ω , ω 上面的“ \leftarrow ”表示对激振频率以减小的方式进行数值计算。图 4(a)、图 4(c) 中纵坐标 \dot{x}_1 表示物块 M_1 在庞加莱映射截面 σ_p 上碰撞前的速度,图 4(b) 中 x_{1p} 表示物块 M_1 穿过固定周期截面 σ_n 时的位移。当 $\omega=(0.5956, 0.8)$ 时系统呈现稳定的 $1/1$ 周期运动;当 ω 减至 $\omega=0.5956$ 时, $1/1$ 周期运动经过 Grazing 分岔转迁为 $2/1$ 周期运动。当 $\omega=0.3530$ 时,系统由稳定的 $3/1$ 周期运动经过擦边分岔转迁为 $4/1$ 周期运动,随着激振频率的逐渐减小,系统由 $4/1$ 周期运动经历擦边分岔转迁为 $5/1$ 周期运动,以及 $5/1$ 周期运动经历擦边分岔转迁为 $6/1$ 周期运动。随着激振频率的继续减小,系统由 $p/1$ 周期运动经历擦边分岔转迁为 $(p+1)/1$ 周期运动,当碰撞次数达到一定次数时,系统发生 Chattering-impact 动力学现象。随着 ω 的减小, $1/1$ 周期运动到 $\tilde{p}/1$ 运动的转迁规律为

$$\omega \downarrow: \tilde{p}/1 \xleftarrow{\text{GBif}} \dots \xleftarrow{\text{GBif}} (p+1)/1 \xleftarrow{\text{GBif}} p/1 \xleftarrow{\text{GBif}} \dots \xleftarrow{\text{GBif}} 3/1 \xleftarrow{\text{GBif}} 2/1 \xleftarrow{\text{GBif}} 1/1$$

其中, $\tilde{p}/1$ 表示颤碰运动;GBif 表示擦边分岔。

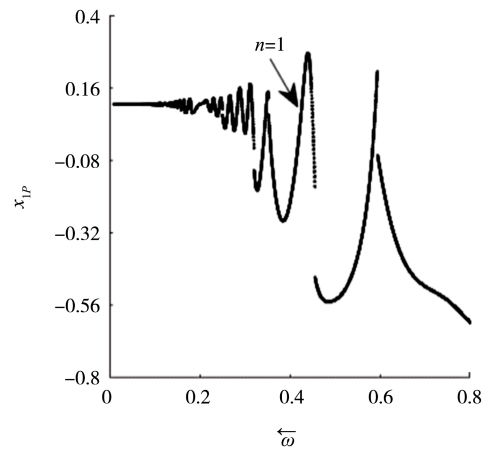
选定 $\omega=0.5956, 0.5434, 0.3530, 0.3138, 0.237, 0.1123$ 得到系统在不同激振频率下的运动相图如图 5 所示。图 5 中,横坐标 x_1 表示物块 M_1 的位移,纵坐标 \dot{x}_1 表示物块 M_1 的速度,橙色线表示间隙 $\delta=0.1$ 。

选取 $\omega=0.1123$,绘制系统的速度位移时间历程图如图 6 所示,其中横坐标 ωt 表示时间。图 6(a) 表



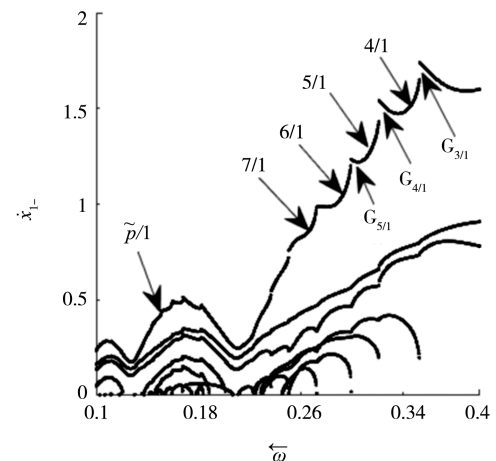
(a) \dot{x}_1 分岔图

(a) Bifurcation diagram of \dot{x}_1



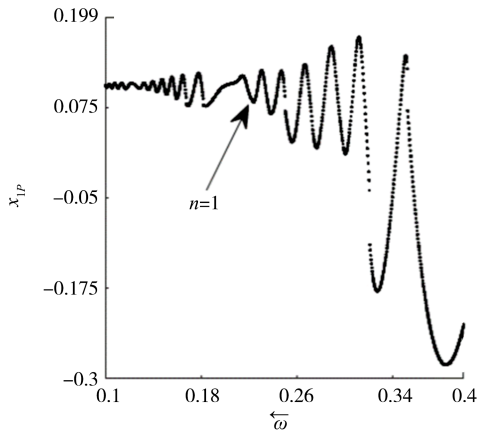
(b) x_{1p} 分岔图

(b) Bifurcation diagram of x_{1p}



(c) 图(a)的局部放大图

(c) Partial enlarged view of Fig. (a)

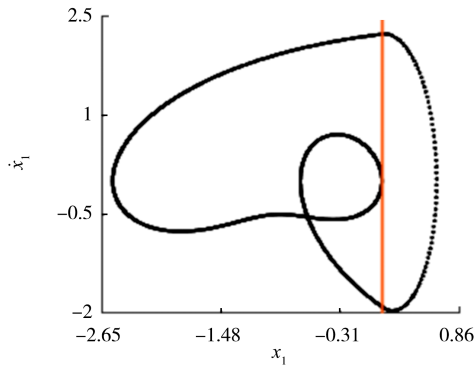


(d) 图(b)的局部放大图
(d) Partial enlarged view of Fig. (b)

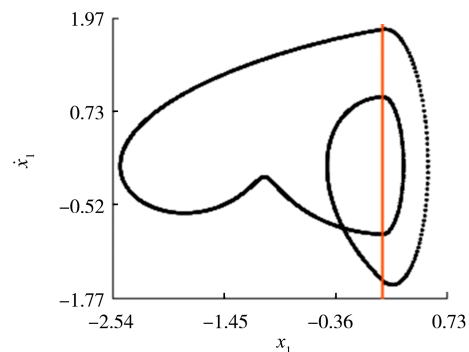
图4 分岔图

Fig. 4 Bifurcation diagram

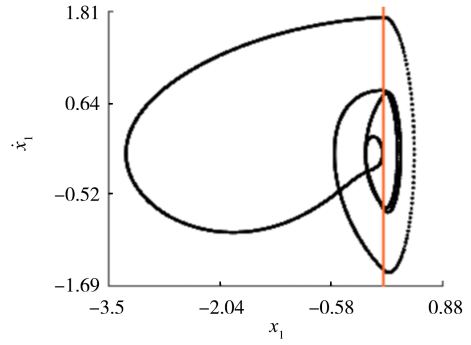
示物块 M_1 在 $\omega=0.1123$ 时的速度时间历程图,其中黑色区域表示颤碰次数。由图 6(a)可知,随着时间的变化,物块 M_1 无限次与止挡板发生碰撞,黑色区域纵向振幅逐渐变小说明物块每一次发生碰撞后,物块所受力逐渐衰减。图 6(b)表示物块 M_1 位移时间历程图。由图 6(b)可知,随着时间的变化,黑色区域纵向振幅逐渐衰减至趋于稳定,即物块 M_1 每一次发生碰撞位移量逐渐减小,所受力逐渐衰减至趋近于 0,随着激振频率的继续增加,物块 M_1 进入下一次运动。由图 6 可知,物块 M_1 在 $\omega=0.1123$ 处发生 Chattering-impact 动力学特性尤为明显。



(a) 1/1 擦边运动($\omega=0.5956$)
(a) 1/1 grazing motion($\omega=0.5956$)

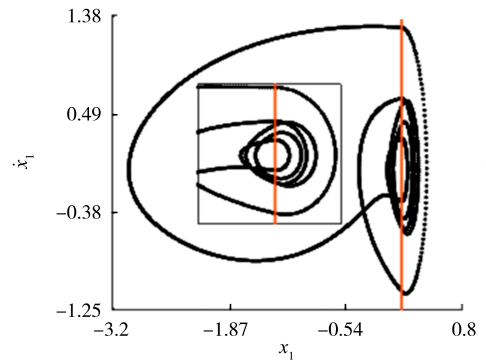


(b) 2/1 周期运动($\omega=0.5434$)
(b) 2/1 periodic motion($\omega=0.5434$)



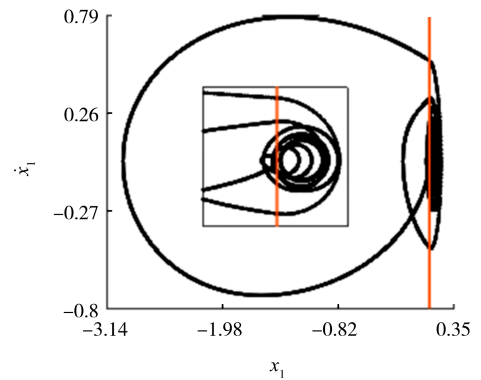
(c) 3/1 擦边运动($\omega=0.3530$)

(c) 3/1 grazing motion($\omega=0.3530$)



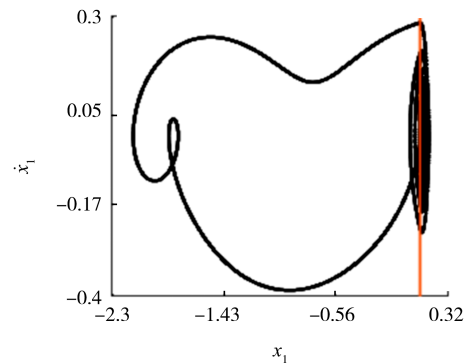
(d) 5/1 周期运动($\omega=0.3138$)

(d) 5/1 periodic motion($\omega=0.3138$)



(e) 8/1 擦边运动($\omega=0.237$)

(e) 8/1 grazing motion($\omega=0.237$)



(f) $\bar{p}/1$ 周期运动($\omega=0.1123$)

(f) $\bar{p}/1$ periodic motion($\omega=0.1123$)

图5 周期运动相图

Fig. 5 Phase diagram of periodic motion

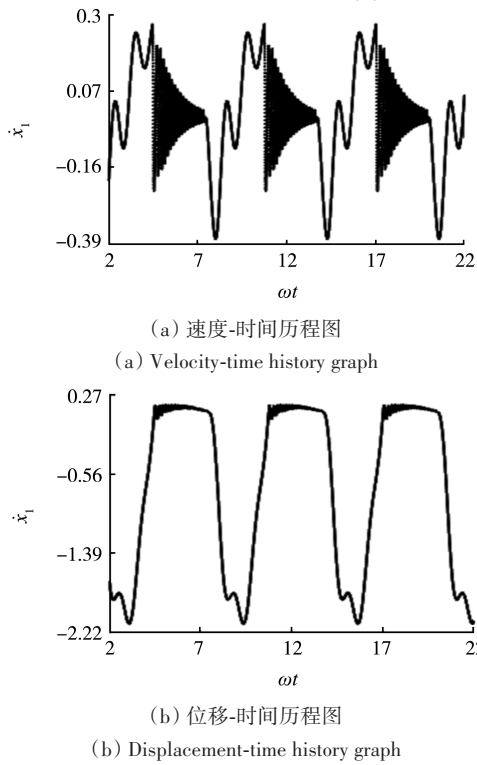


图 6 $\omega=0.1123$ 时速度位移时间历程图

Fig. 6 Time history graph of speed displacement when $\omega=0.1123$

选取参数 $\mu_{k0}=0.95, \mu_m=\mu_c=\mu_k=0.5, f_{20}=1, \delta=0.1$, 选定 $\zeta=0.05, 0.15, 0.3$, 通过数值仿真计算出系统中物块 M_1 在 Poincaré 映射截面 σ_p 上碰撞前的速度随激振频率 ω 变化的单参数分岔图(图 7)。由图 7 可知,当阻尼系数增大时系统分岔图中混沌区逐渐消失,系统由复杂的周期运动逐渐演化为单一的 $p/1$ 周期运动序列。选取激振频率 $\omega=0.5433$, 阻尼系数为 $\zeta=0.05, 0.15, 0.3$ 时 $2/1$ 周期运动相图如图 8(a)~图 8(c) 所示;激振频率 $\omega=0.4024$, 阻尼系数为 $\zeta=0.05, 0.15, 0.3$ 时 $3/1$ 周期运动的相图如图 8(d)~图 8(f) 所示。由图 8 可知,随着阻尼系数的变大,系统中物块 M_1 由复杂的周期运动逐渐趋近于单一的 $p/1$ 周期运动序列。

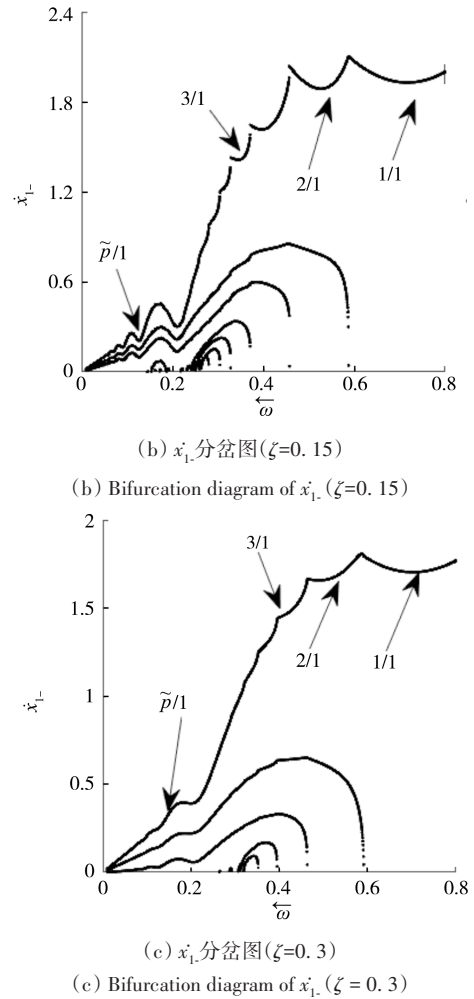
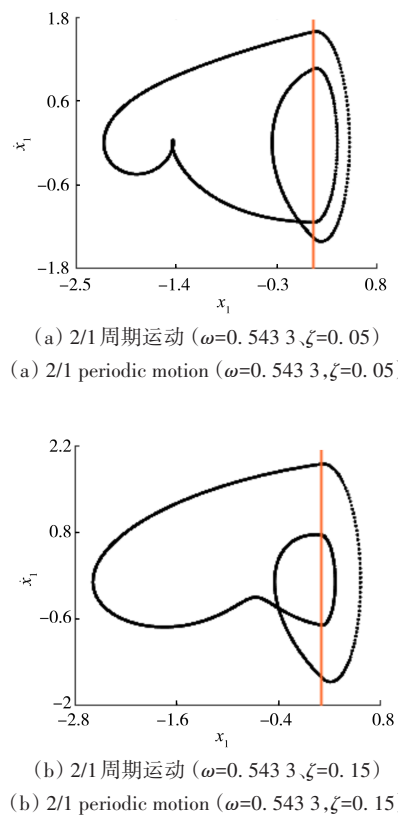
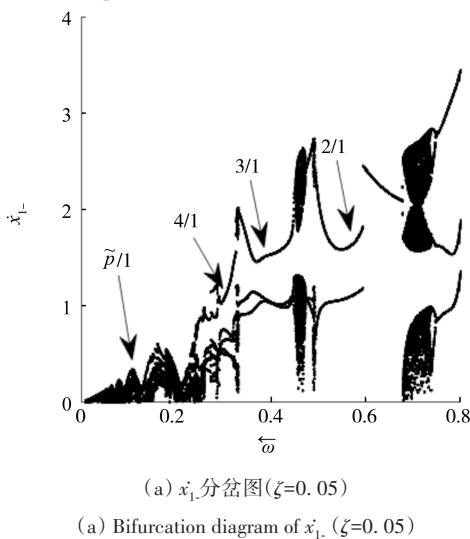
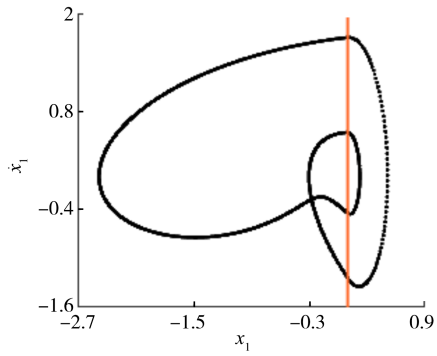


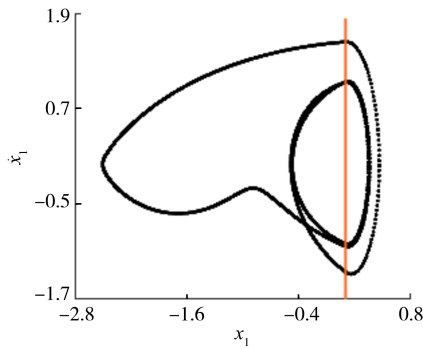
图 7 不同阻尼下系统分岔图

Fig. 7 System bifurcation diagram under different dampings

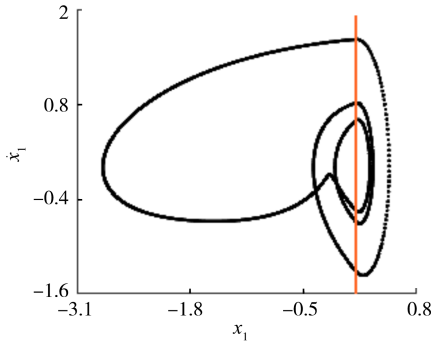




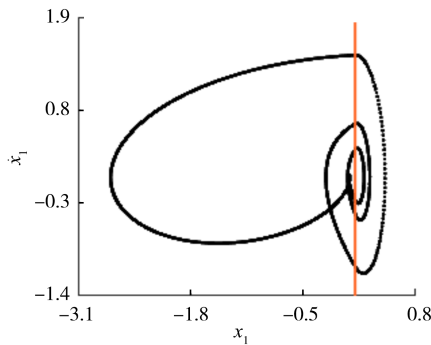
(c) 2/1 周期运动 ($\omega=0.5433, \zeta=0.3$)
(c) 2/1 periodic motion ($\omega=0.5433, \zeta=0.3$)



(d) 3/1 周期运动 ($\omega=0.4024, \zeta=0.05$)
(d) 3/1 periodic motion ($\omega=0.4024, \zeta=0.05$)



(e) 3/1 周期运动 ($\omega=0.4024, \zeta=0.15$)
(e) 3/1 periodic motion ($\omega=0.4024, \zeta=0.15$)



(f) 3/1 周期运动 ($\omega=0.4024, \zeta=0.3$)
(f) 3/1 periodic motion ($\omega=0.4024, \zeta=0.3$)

图 8 不同阻尼下系统周期运动相图

Fig. 8 Phase diagram of the periodic motion of the system under different dampings

2 等效电路模型的设计与仿真

机械碰撞系统的数值计算通常利用四阶变步长 Runge-Kutta 法进行若干次迭代运算得出动力学微分方程的数值计算结果,用以分析机械碰撞振动系统的动力学特性。此方法主要受到计算机计算速度和精度的影响,尤其是在改变相关参数时,需重新计算,时间成本往往较高。在电路系统中,电流流经电子元件的时间很短,如若采用若干电子器件搭建出与数值计算理论上等效的电子电路,不仅能够提高仿真速度,还能够快速地实现模态转换。

2.1 等效电路设计

设计等效电路部分主要是在 Multisim 软件进行设计,首先根据动力学系统方程(2)及无量纲表达式和相关参数可以计算出等效电路的相关参数,并用于验证弹性碰撞振动模型的数值计算结果。用模拟电路实现方程(2)需要将方程(2)转化为模态方程,令 $v_1 = x_1$, $v_2 = \dot{v}_1$, $v_3 = x_2$, $v_4 = \dot{v}_3$, 对其进行转化得到等效电路方程

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = v_2 \\ \dot{v}_2 = f_{20} \sin(\omega t + \tau) - 2\zeta(v_2 - v_4) - v_1 + v_3 - f'(v_1) \\ \dot{v}_3 = v_4 \\ \dot{v}_4 = \frac{\mu_m}{1 - \mu_m} (1 - f_{20}) \sin(\omega t + \tau) + 2\zeta(v_2 - \frac{v_4}{1 - \mu_c}) + v_1 - \frac{v_3}{1 - \mu_k} \end{cases} \quad (6)$$

根据式(6)选择有源积分电路进行搭建,首先将方程进行转化则得到

$$\dot{v}_1 = \frac{1}{R_1 C_1} v_2 \quad (7)$$

$$\dot{v}_2 = -\frac{1}{R_{11} C_3} v_2 + \frac{1}{R_{12} C_3} v_4 - \frac{1}{R_9 C_3} v_1 - \frac{1}{R_{10} C_3} f'(v_1) + \frac{1}{R_{13} C_3} v_3 + \frac{V_{M_1}}{R_{14} C_3} \sin(\Omega T + \tau) \quad (8)$$

$$\dot{v}_3 = \frac{1}{R_4 C_2} v_4 \quad (9)$$

$$\dot{v}_4 = \frac{1}{R_{19} C_4} v_2 - \frac{1}{R_{17} C_4} v_4 + \frac{1}{R_{20} C_4} v_1 - \frac{1}{R_{18} C_4} v_3 \quad (10)$$

式(8)中,

$$f'(v_1) = \begin{cases} \frac{\mu_{k0}}{1 - \mu_{k0}} (v_1 - \delta), & v_1 > \delta \\ 0, & v_1 \leq \delta \end{cases} \quad (11)$$

对式(7)~式(10)用两个状态变量 v_1 和 v_3 进行整合,结果为

$$R_1 C_1 \ddot{v}_1 + \frac{R_1 C_1}{R_{11} C_3} \dot{v}_1 - \frac{R_4 C_2}{R_{12} C_3} \dot{v}_3 + \frac{1}{R_9 C_3} v_1 - \frac{1}{R_{13} C_3} v_3 + \frac{1}{R_{10} C_3} f'(v_1) = \frac{V_{M_1}}{R_{14} C_3} \sin(\Omega T + \tau) \quad (12)$$

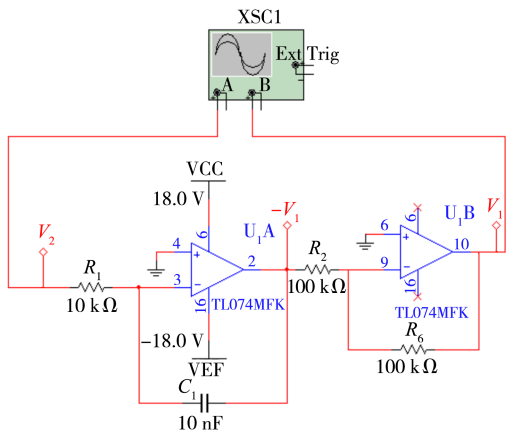
$$R_4 C_2 \dot{v}_3 - \frac{R_1 C_1}{R_{19} C_4} \dot{v}_1 + \frac{R_4 C_2}{R_{17} C_4} v_3 - \frac{1}{R_{20} C_4} v_1 + \frac{1}{R_{18} C_4} v_3 = 0 \quad (13)$$

对式(11)进行转化得到

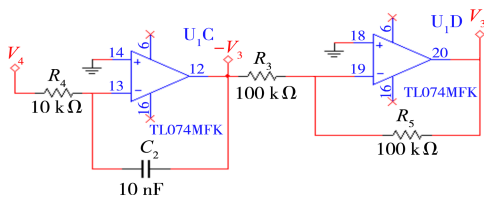
$$f'(v_1) = \begin{cases} \frac{\mu_{k0}}{1 - \mu_{k0}} (v_1 - \delta), & v_1 > \delta \\ 0, & v_1 \leq \delta \end{cases} = \frac{\mu_{k0}}{1 - \mu_{k0}} v_1 + 0.5 \frac{\mu_{k0}}{1 - \mu_{k0}} (|v_1 + \delta| + |v_1 - \delta|) \quad (14)$$

电路设计如图 9 所示,所设计的等效电路主要分成 5 个模块。模块 1 主要是以放大器 U_1A 、 U_1B 实现方程(7);模块 2 主要是以放大器 U_1C 、 U_1D 实现方程(9);模块 3 是运放 U_2A 、 U_2D 实现方程(8);模块 4 主要是运放 U_2B 、 U_2C 实现方程(10),其中运放 U_1B 、 U_1D 、 U_2A 、 U_2B 单元还可以实现反向作用;模块 5 主要采用 Multisim 软件中的 NONLINEAR-DEPENDENT 模块来设计非线性部分 $f(x_1)$ 。根据 $\mu_m=0.5$ 、 $\mu_k=0.5$ 、 $\mu_c=0.5$ 、 $\zeta=0.1$ 、 $\delta=0.1$ 、 $\mu_{k0}=0.95$ 等条件及组成等效电路的各元器件的作用,首先取 $R_1=R_4=R_{18}=10 \text{ k}\Omega$,选取电阻 $R_2=R_3=R_5=R_6=R_7=R_8=R_{14}=R_{15}=R_{16}=100 \text{ k}\Omega$, $R_9=R_{13}=R_{20}=20 \text{ k}\Omega$,选取电容 $C_1=C_2=10 \text{ nF}$, $C_3=C_4=100 \text{ nF}$ 。激励幅值可取 $P=25$ 、 $B=0.064$,计算出 $R_{11}=R_{12}=R_{19}=22.36 \text{ k}\Omega$ 、 $R_{17}=11.18 \text{ k}\Omega$ 、 $R_{10}=26.32 \text{ k}\Omega$,计算相关电阻值为

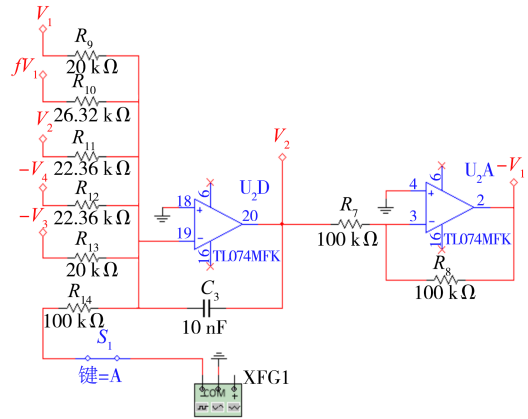
$$\mu_{k0} = \frac{K_0}{K_0 + K_1} = \frac{1}{1 + K_1/K_0} \quad (15)$$



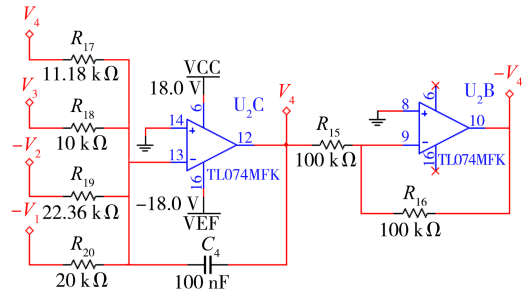
(a) 模块 1
(a) Module 1



(b) 模块 2
(b) Module 2

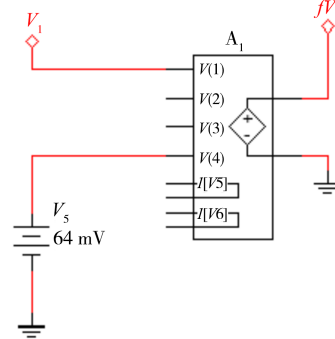


(c) 模块 3
(c) Module 3



(d) 模块 4
(d) Module 4

$$V = 25V(1) + 0.5 \times 25 \{ \text{abs}[V(1) + V(4)] + \text{abs}[V(1) - V(4)] \}$$



(e) 模块 5
(e) Module 5

图 9 等效电路

Fig. 9 Equivalent circuit

将 $\mu = \frac{K_0}{K_1}$ 代入式(15)可得 $\mu_{k0} = \frac{\mu}{1 + \mu} = 0.95$, 计算出 $\mu=19$:

$$\mu = \frac{K_0}{K_1} = \frac{R_9}{R'_{10}} = 19 \quad (16)$$

将其代入式(16)则

$$R'_{10} P = R_{10} \quad (17)$$

得到 R_{10} 的电阻值为 $26.32 \text{ k}\Omega$, 根据方程(18)计算出 $R_{12}=22.36 \text{ k}\Omega$, 计算过程为

$$\zeta = \frac{C_1}{2\sqrt{K_1 M_1}} = \frac{R_4 C_2 / (R_{12} C_3)}{2\sqrt{R_1 C_1 / (R_9 C_3)}} = 0.1 \quad (18)$$

$$\delta = \frac{K_1 B}{P_1 + P_2} = \frac{0.064/(R_9 C_3)}{V_{M_1}/(R_{14} C_3)} = 0.1 \quad (19)$$

根据无量纲化过程,激励频率 f 和 ω 之间的关系为

$$\omega = \Omega \sqrt{\frac{M_1}{K_1}} = 2\pi f \sqrt{R_1 C_1 R_9 C_3} \quad (20)$$

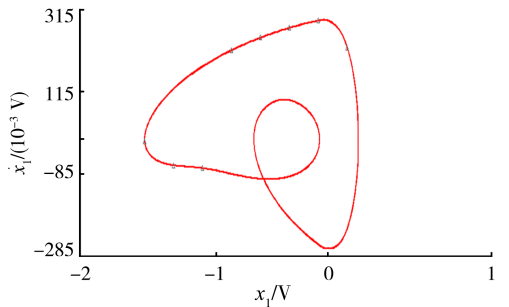
计算可得

$$f = 355.88\omega \quad (21)$$

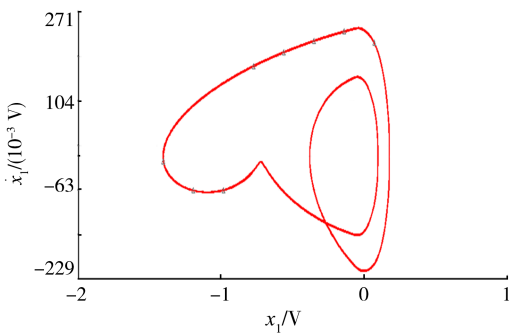
2.2 等效电路仿真

通过方程(21),分别计算出: $\omega=0.5956$ 时系统呈现的1/1擦边运动所对应的激励频率 $f=211.962$ Hz; $\omega=0.5434$ 时系统呈现的2/1周期运动所对应的激励频率 $f=193.385$ Hz; $\omega=0.3530$ 时由3/1周期运动经过Grazing分岔转迁为4/1周期运动时所对应的激励频率 $f=125.625$ Hz; $\omega=0.3138$ 时系统呈现出的5/1周期运动时所对应的激励频率 $f=111.675$ Hz; $\omega=0.237$ 时系统由7/1周期运动Grazing分岔转迁为8/1周期运动时所对应的激励频率 $f=84.343$ Hz; $\omega=0.1123$ 时系统呈现的 $p/1$ 周期运动特性所对应的激励频率 $f=39.9$ Hz。打开函数发生器,先将振幅设置为 $3.2v_p$,偏置设为0,再将计算出的频率分别输入其中。对系统进行仿真得到的相图如图10所示,其中横坐标 x_1 表示物块 M_1 的位移,纵坐标 \dot{x}_1 表示物块 M_1 的速度。

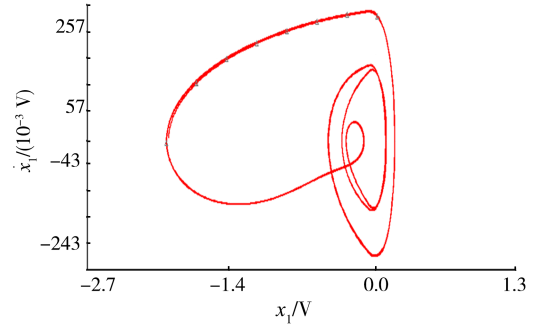
以图10(f)相图为研究对象,选择激励频率 $f=$



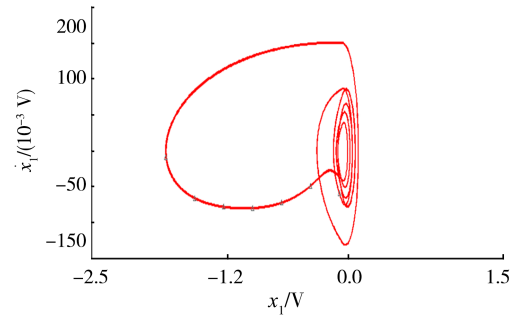
(a) 1/1 擦边运动 ($f=211.962$ Hz)
(a) 1/1 grazing motion ($f=211.962$ Hz)



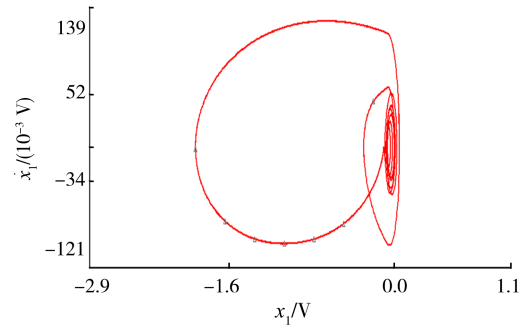
(b) 2/1 周期运动 ($f=183.63$ Hz)
(b) 2/1 periodic motion ($f=183.63$ Hz)



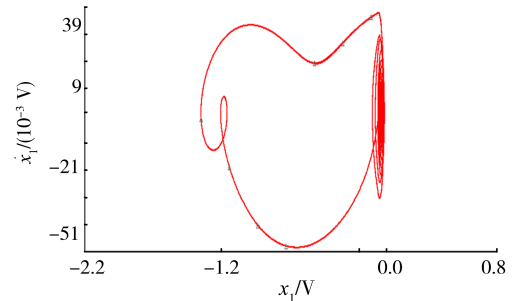
(c) 3/1 擦边运动 ($f=125.635$ Hz)
(c) 3/1 grazing motion ($f=125.635$ Hz)



(d) 5/1 周期运动 ($f=111.675$ Hz)
(d) 5/1 periodic motion ($f=111.675$ Hz)



(e) 8/1 擦边运动 ($f=84.343$ Hz)
(e) 8/1 grazing motion ($f=84.343$ Hz)



(f) $\bar{p}/1$ 周期运动 ($f=39.96$ Hz)
(f) $\bar{p}/1$ periodic motion ($f=39.96$ Hz)

图10 周期运动相图

Fig. 10 Phase diagram of the periodic motion

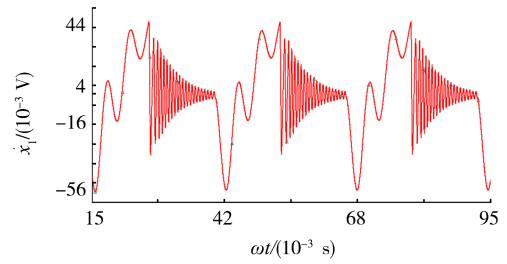
39.9 Hz ($\omega=0.1123$)时等效电路系统仿真出颤碰运动的速度位移时间历程图,图11(a)中 \dot{x}_1 表示物块 M_1 的速度,横坐标 ωt 表示时间。图11(b)表示的是位移

时间历程图。由图 11(b)可得出,随着时间的增加,系统呈现出 Chattering-impact 的动力学特性。图 11(a)、图 11(b)分别对应于数值仿真的图 6(a)、图 6(b),由此可以得出数值仿真与电路仿真的时间历程图相一致。

当选取阻尼系数 $\zeta=0.05、0.15、0.3$ 时需重新计算图 9 中电阻 $R_{11}、R_{12}、R_{19}$ 的阻值, R_{17} 的阻值也需改变,其余参数不变,主要计算过程为

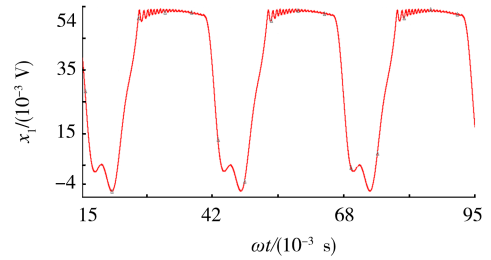
$$\zeta = \frac{C_1}{2\sqrt{K_1 M_1}} = \frac{R_4 C_2 / (R_{12} C_3)}{\sqrt{R_1 C_1 / (R_9 C_3)}} \quad (22)$$

代入 $\zeta=0.05、0.15、0.3$, 计算出 R_{12} 的阻值分别为 44.72、14.91、7.45 k Ω , 则得到 R_{17} 的阻值分别为 22.36、7.45、3.73 k Ω 。由式(21)计算出激振频率 $\omega=0.5433、0.4024$ 所对应的激励频率分别为 $f=193.35、143.21$ Hz, 图 9 中将原 $R_{11}=R_{12}=R_{19}$ 及 R_{17} 的阻值替换为所计算的阻值。通过在 Multium 仿真软件中仿真出系统在激励频率为 $f=193.35$ Hz 时系统呈现 2/1 周期运动, 以及 $f=143.21$ Hz 时系统呈现 3/1 周期运动所对应的相图, 如图 12 所示。由图 12 可知, 当激励频率不变时, 随着阻尼系数的变大, 2/1 周期运动(或 3/1 周期运动)由不稳定运动逐渐演化为稳定运动。将所得出的



(a) 速度时间历程图

(a) Time-history graph of the velocity



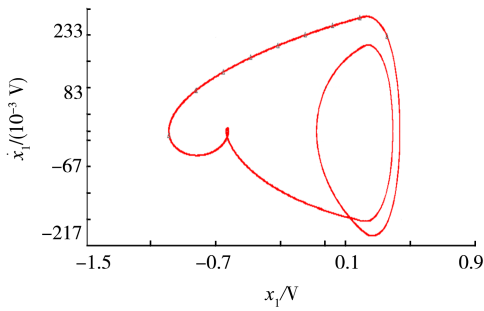
(b) 位移时间历程图

(b) Time-history graph of the displacement

图 11 速度位移时间历程图

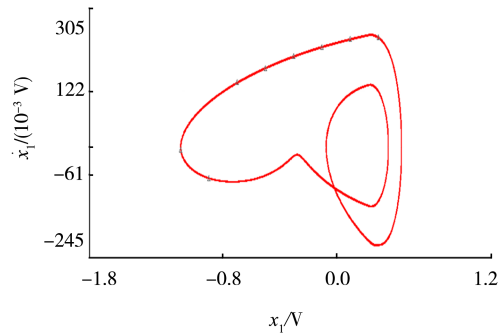
Fig. 11 Time-history graph of the speed-displacement

结果与图 8 进行对比发现结果一致。由此得出, 相比于数值计算采用等效电路仿真出系统的相图, 无论是速度还是调节参数时的便捷性都比数值计算效率更高。



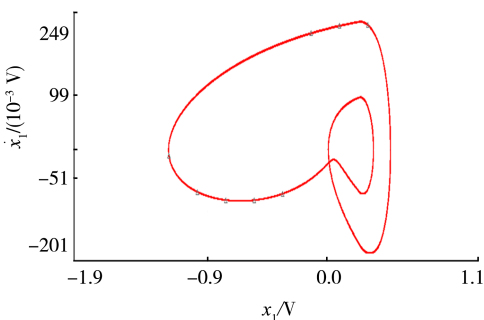
(a) 2/1 周期运动 ($f=193.35$ Hz, $\zeta=0.05$)

(a) 2/1 periodic motion ($f=193.35$ Hz, $\zeta=0.05$)



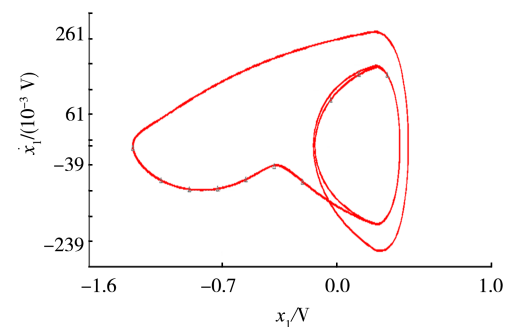
(b) 2/1 周期运动 ($f=193.35$ Hz, $\zeta=0.15$)

(b) 2/1 periodic motion ($f=193.35$ Hz, $\zeta=0.15$)



(c) 2/1 周期运动 ($f=193.35$ Hz, $\zeta=0.3$)

(c) 2/1 periodic motion ($f=193.35$ Hz, $\zeta=0.3$)



(d) 3/1 周期运动 ($f=143.21$ Hz, $\zeta=0.05$)

(d) 3/1 periodic motion ($f=143.21$ Hz, $\zeta=0.05$)

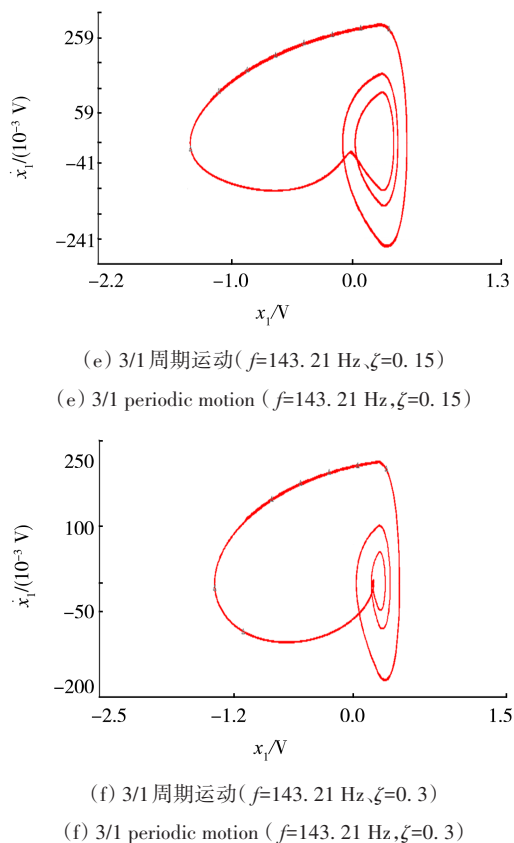


图12 系统不同阻尼下等效电路仿真相图

Fig. 12 Simulation phase diagram of equivalent circuit under different dampings of the system

3 结论

通过两自由度含间隙弹性碰撞系统为对照模型,建立了两种 Poincaré 截面对其进行数值分析并进行仿真实验,研究了其运动状态和转迁规律,并且通过使用 TL074MFK 型集成运算放大器、NONLINEAR-DEPENDENT 模块、电容、电阻等建立了与动力学模型等效的电路模型,并进行仿真实验,得到了如下结论:

1) 随着系统的激振频率逐渐减小,系统会发生擦边分岔,使得系统的碰撞次数逐渐增大,当碰撞次数增大到一定次数时,系统将发生 Chattering-impact 动力学现象。

2) 通过建立与动力学模型等效的电路模型并进行仿真实验,发现利用等效电路仿真所得的结果与数值仿真的结果一致,得出采用等效电路能够实现非线性动力学的分析和研究。

3) 利用等效电路来研究非线性动力学的问题时既可以快速实现系统的模态转换,又能够实现动态化的参数调节,如可以快速地调节信号发生器中的激励频率,以改变电路系统在不同激励频率下的相图,提高了调节参数的便捷性。

参考文献 (References)

- [1] 朱喜锋, 罗冠炜. 两自由度含间隙弹性碰撞系统的颤碰运动分析[J]. 振动与冲击, 2015, 34(15): 195-200.
ZHU Xifeng, LUO Guanwei. Analysis of chattering motion of two-degree-of-freedom elastic collision system with gap [J]. Journal of Vibration and Shock, 2015, 34(15): 195-200. (In Chinese)
- [2] 朱喜锋. 含间隙机械系统的动力学特性及参数匹配规律研究[D]. 兰州: 兰州交通大学, 2016: 50-55.
ZHU Xifeng. Research on dynamic characteristics and parameter matching laws of mechanical systems containing gaps [D]. Lanzhou: Lanzhou Jiaotong University, 2016: 50-55. (In Chinese)
- [3] 丁杰, 王超, 丁旺才, 等. 双侧不同约束碰撞系统的周期运动转迁规律[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2021, 49(1): 6-11.
DING Jie, WANG Chao, DING Wangcai, et al. Periodic motion transitions of bilaterally differently constrained bump-vibration systems [J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2021, 49(1): 6-11. (In Chinese)
- [4] 李国芳, 俞力洋, 丁旺才, 等. 一类无足自驱动系统的运动特性分析[J]. 振动与冲击, 2020, 39(14): 9-16.
LI Guofang, YU Liyang, DING Wangcai, et al. Kinematic characterization of a class of footless self-driven systems [J]. Journal of Vibration and Shock, 2020, 39(14): 9-16. (In Chinese)
- [5] 李得洋, 丁旺才, 丁杰, 等. 单自由度含对称约束碰撞系统周期运动的转迁规律分析[J]. 振动与冲击, 2019, 38(22): 52-59.
LI Deyang, DING Wangcai, DING Jie, et al. Analysis of the transmigration law for the periodic motion of single-degree-of-freedom bumper-vibration systems with symmetric constraints [J]. Journal of Vibration and Shock, 2019, 38(22): 52-59. (In Chinese)
- [6] 李万祥, 牛卫中. 一类含间隙系统的分岔与混沌的形成过程[J]. 振动与冲击, 2005(3): 47-49.
LI Wanxiang, NIU Weizhong. Bifurcation of a class of gap-containing systems with chaotic formation process [J]. Journal of Vibration and Shock, 2005(3): 47-49. (In Chinese)
- [7] 吕小红, 罗冠炜. 含间隙振动系统周期振动的多样性和转迁特征[J]. 振动工程学报, 2020, 33(4): 688-697.
LÜ Xiaohong, LUO Guanwei. Diversity and transmigration characteristics of periodic vibrations in systems containing gap vibrations [J]. Journal of Vibration Engineering, 2020, 33(4): 688-697. (In Chinese)
- [8] 吕小红, 张开成, 朱喜锋, 等. 两自由度碰撞振动系统的两参数非光滑分岔[J]. 振动工程学报, 2023, 36(1): 107-115.
LÜ Xiaohong, ZHANG Kaicheng, ZHU Xifeng, et al. Two-parameter nonsmooth bifurcation of a two-degree-of-freedom collisional vibration system [J]. Journal of Vibration Engineering, 2023, 36(1): 107-115. (In Chinese)
- [9] 吕恩胜, 白金柯. 基于分段线性正电阻的蔡氏电路设计[J]. 电子器件, 2015, 38(3): 553-557.
LÜ Ensheng, BAI Jinke. Tsai circuit design based on segmented linear positive resistance [J]. Electronic Devices, 2015, 38(3): 553-557. (In Chinese)
- [10] 李新颖, 卢毅. 基于广义忆阻器的超混沌系统的研究与电路实现[J]. 电子元件与材料, 2023, 42(1): 103-109.
LI Xinying, LU Yi. Research and circuit implementation of

- hyperchaotic systems based on generalized memristors [J]. *Electronic Components and Materials*, 2023, 42(1): 103-109. (In Chinese)
- [11] 李旭,张正娣,毕勤胜. 两时间尺度下非光滑广义蔡氏电路系统的簇发振荡机理[J]. *物理学报*, 2013, 62(22): 40-48.
LI Xu, ZHANG Zhengdi, BI Qinsheng. Mechanism of cluster-emerging oscillations in a nonsmooth generalized Tsai's circuit system at two timescales[J]. *Journal of Physics*, 2013, 62(22): 40-48. (In Chinese)
- [12] 季颖,毕勤胜. 高维广义蔡氏电路中的快慢动力学行为及其分岔分析[J]. *物理学报*, 2012, 61(1): 9-14.
JI Ying, BI Qinsheng. Fast and slow dynamical behavior in high-dimensional generalized Cai's circuits and its bifurcation analysis [J]. *Journal of Physics*, 2012, 61(1): 9-14. (In Chinese)
- [13] 徐国泰,张晓玲,范清田,等. 基于 Simulink 的二维弹道修正组件控制电路仿真方法[J]. *探测与控制学报*, 2021, 43(4): 58-64.
XU Guotai, ZHANG Xiaoling, FAN Qingtian, et al. Simulation method of two-dimensional ballistic correction component control circuit based on Simulink [J]. *Journal of Detection and Control*, 2021, 43(4): 58-64. (In Chinese)
- [14] 张小红,齐彦丽. 实数指数幂忆阻函数设计与电路仿真实现 [J]. *系统仿真学报*, 2018, 30(10): 3807-3816.
ZHANG Xiaohong, QI Yanli. Real exponential power memristor function design and circuit simulation implementation [J]. *Journal of System Simulation*, 2018, 30(10): 3807-3816. (In Chinese)
- [15] 赵丽娜. 一类非线性电路的特性分析与信号同步传输的机理研究[J]. *光电技术应用*, 2019, 34(5): 63-66.
ZHAO Lina. Characterization of a class of nonlinear circuits and mechanistic study of signal synchronous transmission [J]. *Applications of Optical Technology*, 2019, 34(5): 63-66. (In Chinese)
- [16] 汪净,潘丽华. 基于运算放大器的非线性电阻设计[J]. *钦州学院学报*, 2018, 33(3): 12-16.
WANG Zheng, PAN Lihua. Nonlinear resistor design based on operational amplifier [J]. *Journal of Qinzhou College*, 2018, 33(3): 12-16. (In Chinese)
- [17] 汪净,潘丽华,刘文辉,等. 对称间隙单自由度振动系统的等效电路仿真和实验[J]. *振动与冲击*, 2017, 36(1): 141-145.
WANG Zheng, PAN Lihua, LIU Wenhui, et al. Equivalent circuit simulation and experiment for symmetric gap single-degree-of-freedom vibration system [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2017, 36(1): 141-145. (In Chinese)
- [18] 汪净,刘鑫鹏,崔锦涛. 含有间隙的运动副非线性振动等效电路模型与仿真[J]. *兰州交通大学学报*, 2018, 37(2): 79-83.
WANG Zheng, LIU Xinpeng, CUI Jintao. Nonlinear vibration equivalent circuit model and simulation of kinematic vice with gap [J]. *Journal of Lanzhou Jiaotong University*, 2018, 37(2): 79-83. (In Chinese)
- [19] 崔锦涛,汪净. 对称间隙单自由度振动系统的 Simulink 仿真 [J]. *自动化与仪表*, 2018, 33(9): 71-75.
CUI Jintao, WANG Zheng. Simulink simulation of symmetric gap single-degree-of-freedom vibration system [J]. *Automation and Instrumentation*, 2018, 33(9): 71-75. (In Chinese)
- [20] 刘瑞家,汪净,罗帆. 含间隙二自由度碰撞振动系统等效电路仿真 [J]. *机械强度*, 2022, 44(1): 53-58.
LIU Ruijia, WANG Zheng, LUO Fan. Equivalent circuit simulation of two-degree-of-freedom collision vibration system with gap [J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2022, 44(1): 53-58. (In Chinese)
- [21] LUO T Q, WANG Z. Dynamics and SC-CNN circuit implementation of a periodically forced non-smooth mechanical system [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 85(1): 23-45.

Equivalent circuit simulation of a two-degree-of-freedom elastic collision vibration system with gaps

ZHU Xifeng^{1,2} FU Wenbin¹ MA Shuo¹ ZHENG Dong¹

(1. School of Mechanical Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

(2. Key Laboratory of System Dynamics and Reliability of Rail Transport Equipment of Gansu Province, Lanzhou 730070, China)

Abstract: A two-degree-of-freedom collision system with gap and elastic constraint was used as the research object, and the regional distribution and transitions of the periodic motion of the system under low frequency conditions were studied by numerical simulation. It was obtained that with the decrease of excitation frequency, the $p/1$ periodic motion occurs with grazing bifurcation transitions to $(p+1)/1$ periodic motion. When the number of collisions was large enough, the Chattering-impact characteristics were presented. Then a circuit model that was completely equivalent to the collision system was established and simulation experiments were carried out. The results show that the results generated by establishing the equivalent circuit are consistent with those generated by numerical simulations, and the equivalent circuit is more efficient in simulation experiments, which can realize fast modal transitions and parameter adjustments, making it more convenient and providing a research method for the study of nonlinear dynamics.

Key words: Vibration system; Modal conversion; Numerical simulation; Chattering-impact motion; Equivalent circuit

Corresponding author: ZHU Xifeng, E-mail: zhuxf@mail.lzjtu.cn

Fund: Science and Technology Plan of Gansu Province (20JR5RA424)

Received: 2023-06-02 Revised: 2023-07-06