

## 悬链线及圆锥曲线混合柔性铰链设计与分析

谢祖强 陈贵清

(福建船政交通职业学院 机械与智能制造学院, 福州 350007)

**摘要:**【目的】既有的柔性铰链研究都对应着复杂的柔度和回转精度计算式。为了解决该问题,设计了一种新型悬链线形柔性铰链,提出一种用直线段逼近弧段建立铰链柔度和回转精度模型的方法。【方法】首先,将柔性铰链定义为渐缩段与渐扩段的串联组合,将渐缩段中曲线段分割成若干弧段,用直线段逼近弧段;基于卡氏第二定理,计算铰链渐缩段柔度,由矩阵运算建立铰链柔度和回转精度模型;其次,结合具体算例,采用推出公式、文献公式和有限元法计算,当曲线分割段数较大时,计算结果吻合较好,验证了公式正确性;再次,分析了结构参数对悬链线铰链柔度、回转精度和柔度精度比的影响;最后,分析了相同结构参数下悬链线、圆锥曲线及其混合铰链的弯曲柔度和柔度精度比。【结果】结果表明,单一参数对悬链线铰链柔度和回转精度的影响成负相关,减小最薄处厚度是提升其柔度的最佳方式。相同结构参数下,悬链线铰链弯曲柔度和柔度精度比介于抛物线和圆弧形之间。选择柔度大的为渐缩段、柔度小的为渐扩段的混合型铰链可兼顾柔度和回转精度;柔度悬殊越大,越有利于提升柔度精度比。

**关键词:** 悬链线柔性铰链; 混合柔性铰链; 渐缩段; 直线逼近; 柔度建模

**中图分类号:** TH112 **DOI:** 10.16578/j.issn.1004.2539.2026.01.013

## 0 引言

柔性铰链是一种一体化成形的高分辨率新型传动机构,具有小体积、无间隙、无机械摩擦、高定位精度等优点,广泛应用于微纳米操纵技术、微型机电系统、快速反射镜(Fast Steering Mirror, FSM)、多维加速传感器、生物医学工程等精密、超精密关键核心领域<sup>[1-6]</sup>。

柔性铰链通过弹性变形传递运动、力与能量,是构建柔性机构的关键单元。早在1965年,PAROS等<sup>[7]</sup>巧妙地推导出圆弧形柔性铰链柔度计算公式。近年来,国内外研究人员对各种形式的柔性铰链进行了大量研究。吴鹰飞等<sup>[8][137-139]</sup>推导出圆弧形柔性铰链柔度系列计算公式。SMITH等<sup>[9]</sup>推导了椭圆形柔性铰链柔度计算公式。CHEN等<sup>[10][95103][11][055106][12-16]</sup>对深切椭圆形、抛物线形、双曲线形、摆线形、指数形、倒角V形、混合型等形式柔性铰链进行柔度建模,分析了铰链精度和应力等性能。刘小院<sup>[17][9-16]</sup>研究了圆

锥曲线类柔性铰链的通用模型。CHEN等<sup>[18]</sup>针对变截面矩形柔性铰链扭转柔度提出两种通用解法。李立建等<sup>[19]</sup>采用非线性曲线拟合法得到了变截面矩形梁闭式扭转柔度计算公式。王传礼等<sup>[20]</sup>设计了一类新型椭圆导角混合柔性铰链,得出椭圆导角混合柔性铰链在回转能力和应力水平方面具有显著优势的结论。倪迎雪等<sup>[21]</sup>设计了一种新型双曲线直圆混合柔性铰链,它具有更好的转动能力和较高的载荷敏感性。张伟等<sup>[22]</sup>设计了一种直圆抛物线混合柔性铰链,它结合了直圆形和抛物线铰链的优点。

然而,上述研究中的每一种曲线形状的柔性铰链都对应着复杂的柔度和回转精度计算公式,应用不便。本文设计了一种新型悬链线形柔性铰链,难以通过上述方法求得该曲线全部柔度和回转精度项的解析解。为此,本文将铰链视为渐缩段与渐扩段的串联组合,将渐缩段曲线分割成若干弧段,用直线逼近弧段;基于卡氏第二定理,统一求取渐缩段柔度;再经过矩阵运算,建立了较为通用的柔度和回转精度;计

收稿日期: 2024-09-01 修回日期: 2024-10-20

基金项目: 福建省科技厅引导性科技计划项目(2022H0029); 福建船政交通职业学院校级科教发展基金项目(20220203); 福建船政交通职业学院校级科教发展基金项目(20200305)

作者简介: 谢祖强,男,1981年生,福建闽清人,工学硕士,高级实验师; 主要研究方向为机械设计、先进制造技术; 381759591@qq.com。  
陈贵清(通信作者),男,1979年生,福建尤溪人,工学博士,教授; 主要研究方向为机械设计、材料设计与加工; 409469554@qq.com。

引用格式: 谢祖强,陈贵清. 悬链线及圆锥曲线混合柔性铰链设计与分析[J]. 机械传动,2026,50(1):100-111.

XIE Zuqiang, CHEN Guiqing. Design and analysis of catenary and conical section hybrid flexure hinges[J]. Journal of Mechanical Transmission,2026,50(1):100-111.



免费获取

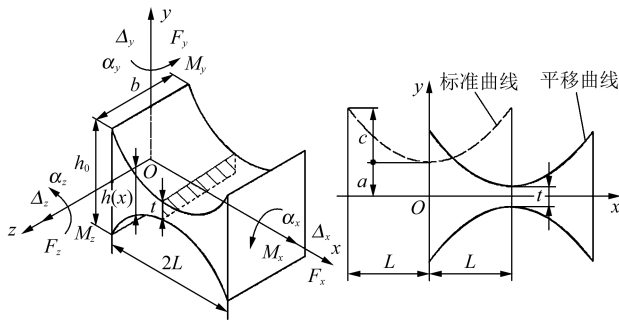
算模型, 并验证了公式正确性, 分析了悬链线、圆锥曲线及其混合型铰链的柔度和精度性能。提出的悬链线形柔性铰链丰富了切口曲线的选择, 可为新型柔性铰链的高效设计与分析提供参考。

### 1 悬链线形柔性铰链结构与受力

悬链线是指均质索链在重力作用下自然下垂变形所呈现的曲线。以悬链线为切口的柔性铰链的几何结构、受力和变形如图1(a)所示。图1中, 右手坐标系  $Oxyz$  的原点位于柔性铰链左端矩形截面中心,  $x$  轴沿截面法向指向右端,  $z$  轴与矩形截面宽度平行。设铰链宽度为  $b$ , 最大厚度为  $h_0$ , 最薄处厚度为  $t$ , 切口长度为  $2L$ , 切口厚度为  $c$ , 沿  $x$  轴方向铰链厚度函数为  $h(x)$ 。悬链线标准方程为

$$y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) \quad (1)$$

式中,  $a$  为悬链线顶点到  $x$  轴的距离, 为常数。



(a) 铰链几何结构、受力和变形 (b) 铰链悬链线切口曲线

图1 悬链线形柔性铰链的几何结构、受力和变形

Fig. 1 Geometric structure, force and deformation of the catenary flexure hinge

如图1(b)所示, 将标准方程向右平移  $L$  距离, 再向下平移  $a - \frac{t}{2}$  距离, 得到的铰链  $x$  轴上方切口曲线为

$$y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x-L}{a}} + e^{-\frac{x-L}{a}}) - a + \frac{t}{2} \quad (2)$$

设柔性铰链变形在线弹性材料弹性极限内, 其左端受到的力和力矩为  $\mathbf{F} = [F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z]^T$ , 右端为相对固定端; 载荷作用下左端变形为  $\boldsymbol{\zeta} = [\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z]^T$ ; 剪切模量  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ,  $E$  为弹性模量,  $\nu$  为泊松比。由胡克定律:  $\mathbf{F} = \mathbf{K}\boldsymbol{\zeta}$ ,  $\mathbf{K}$  为刚度矩阵, 则  $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F} = \mathbf{C}\mathbf{F}$ 。其中,  $\mathbf{C}$  为柔度矩阵,  $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{6 \times 6}$ , 其非零元素如下:  $C_{ii} (i = 1, 2, \dots, 6)$ ,  $C_{26} = C_{62}$ ,  $C_{35} = C_{53}$ 。

### 2 柔性铰链柔度模型建立

工程上, 柔性铰链切口可由一段连续光滑的曲

线构成, 也可由曲线段、折线段和平直段串联排列组合构成混合型铰链。考察图2所示的混合型柔性铰链, 以铰链最薄处截面为界将其分成两段, 设左段即载荷端段为渐缩段, 长度为  $L_1$ ; 右段即约束端段为渐扩段, 长度为  $L_2$ ; 分别建立局部坐标系。

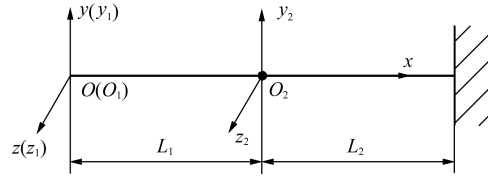


图2 柔性铰链两段式模型及坐标系

Fig. 2 Two-segment model and coordinate system of the flexure hinge

设在载荷作用下, 渐缩段在局部坐标系  $O_1x_1y_1z_1$  下柔度矩阵为  $\mathbf{C}^{(1)}$ , 渐扩段在局部坐标系  $O_2x_2y_2z_2$  下柔度矩阵为  $\mathbf{C}^{(2)}$ 。根据虚功原理和变形叠加原理, 柔性铰链在总体坐标系下的柔度矩阵为

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^{(1)} + \mathbf{J}\mathbf{C}^{(2)}\mathbf{J}^T \quad (3)$$

式中,  $\mathbf{J}$  为柔性铰链渐扩段在局部坐标系下变形量与位移输出端变形量之间的位移转换矩阵,  $\mathbf{J} \in \mathbf{R}^{6 \times 6}$ , 其非零元素为

$$\begin{cases} J_{11} = J_{22} = J_{33} = J_{44} = J_{55} = J_{66} = 1 \\ J_{26} = J_{35} = -L_1 \end{cases} \quad (4)$$

因此, 分别求出铰链渐缩段和渐扩段在局部坐标系下的柔度矩阵, 再由式(3)即可得到柔性铰链柔度矩阵。

#### 2.1 柔性铰链渐缩段柔度矩阵

图3(a)为局部坐标系下混合柔性铰链渐缩段结构示意图。根据柔性铰链末端受拉/压、弯曲、扭转作用下应变能公式<sup>[17]12-16</sup>, 由材料力学卡氏第二定理可得, 柔性铰链渐缩段柔度矩阵非零元素值为

$$\begin{cases} C_{11}^{(1)} = \frac{P_c}{E}, C_{55}^{(1)} = \frac{P_{1b}}{E}, C_{66}^{(1)} = \frac{P_{1a}}{E} \\ C_{22}^{(1)} = \frac{P_{3a}}{E} + \frac{k_s P_c}{G}, C_{33}^{(1)} = \frac{P_{3b}}{E} + \frac{k_s P_c}{G} \\ C_{26}^{(1)} = C_{62}^{(1)} = -\frac{P_{2a}}{E} \\ C_{35}^{(1)} = C_{53}^{(1)} = -\frac{P_{2b}}{E} \\ C_{44}^{(1)} = \frac{7}{24Gf(z_0)} (P_{1a} + P_{1b}) \end{cases} \quad (5)$$

式中,  $k_s$  为矩形截面的剪切系数,  $k_s = \frac{12 + 11\nu}{10(1 + \nu)}$ ;

$f(z_0)$  为矩形截面扭转补偿函数<sup>[17]14</sup>, 令  $z_0 = \frac{b}{t}$ , 则有

$$f(z_0) = \frac{1.17z_0^2 + 2.191z_0 + 1.17}{z_0^2 + 2.609z_0 + 1} \quad (6)$$

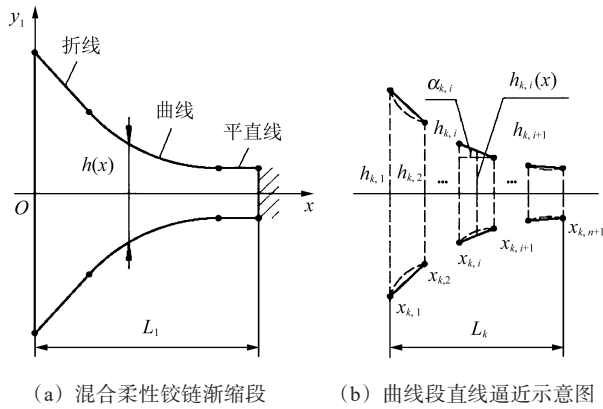


图3 柔性铰链渐缩段计算示意图  
Fig.3 Calculation diagram for the tapered section of the flexure hinge

式(5)中, 涉及截面参数与所处位置有关的积分因子为

$$\begin{cases} P_{ja} = \int_0^{L_1} \frac{x^{j-1}}{I_z(x)} dx \\ P_{jb} = \int_0^{L_1} \frac{x^{j-1}}{I_y(x)} dx, j = 1, 2, 3 \\ P_c = \int_0^{L_1} \frac{1}{A(x)} dx \end{cases} \quad (7)$$

式中,  $I_z(x)$  为  $x$  截面对  $z$  轴的截面惯性矩,  $I_z(x) = \frac{1}{12}bh(x)^3$ ;  $I_y(x)$  为  $x$  截面对  $y$  轴的截面惯性矩,  $I_y(x) = \frac{1}{12}h(x)b^3$ ;  $A(x)$  为截面面积,  $A(x) = bh(x)$ 。可见式(7)所示积分因子仅与铰链厚度函数  $h(x)$  有关。设渐缩段切口函数为  $y = f(x)$ , 对应的铰链厚度函数  $h(x) = 2f(x)$ 。

### 2.1.1 渐缩段曲线段积分因子

圆弧形、椭圆形、双曲线形、抛物线形、椭圆倒角混合型、广义圆锥倒角V型等线型常用于柔性铰链的工程设计中, 此类曲线有比较成熟的柔度计算模型, 而悬链线形柔性铰链线难以通过式(5)得到全部积分项解析解。设铰链渐缩段第  $k$  段曲线为  $y = f_k(x)$ , 如图3(b)所示, 将曲线沿  $x$  轴方向等间距分割成  $n$  段, 用过分割点的直线段近似弧段, 得

$$x_{k,i} = \frac{(i-1)L_k}{n} + x_k, i = 1, 2, 3, \dots, n+1 \quad (8)$$

式中,  $x_k$  为第  $k$  段起始横坐标值。

则对应分割点处的铰链厚度为

$$h_{k,i} = 2f_k(x_{k,i}) \quad (9)$$

考察直线逼近的第  $i$  段, 设其锥角为  $\alpha_{k,i}$ ,  $x$  截面处的铰链厚度为  $h_{k,i}(x)$ , 则

$$\begin{cases} \alpha_{k,i} = \arctan \frac{h_{k,i} - h_{k,i+1}}{2(x_{k,i+1} - x_{k,i})} \\ h_{k,i}(x) = \beta_{ki}(x + \varepsilon_{ki}), x_{k,i} \leq x \leq x_{k,i+1} \end{cases} \quad (10)$$

式中,  $\beta_{ki} = -2 \tan \alpha_{k,i}$ ;  $\varepsilon_{ki} = \frac{h_{k,i}}{\beta_{ki}} - x_{k,i}$ 。

将式(10)代入式(7), 得与  $h_{k,i}(x)$  有关的积分因子, 即

$$\begin{cases} I_{jka,i} = \int_{x_{k,i}}^{x_{k,i+1}} \frac{x^{j-1} dx}{(x + \varepsilon_{ki})^3} \\ I_{jkb,i} = \int_{x_{k,i}}^{x_{k,i+1}} \frac{x^{j-1} dx}{x + \varepsilon_{ki}} \end{cases} \quad j = 1, 2, 3 \quad (11)$$

令

$$\begin{cases} \lambda_{k,i} = \frac{x_{k,i+1} - x_{k,i}}{2(x_{k,i} + \varepsilon_{ki})^2(x_{k,i+1} + \varepsilon_{ki})^2} \\ \mu_{k,i} = \ln \frac{x_{k,i+1} + \varepsilon_{ki}}{x_{k,i} + \varepsilon_{ki}} \end{cases} \quad (12)$$

得第  $i$  段与  $h_i(x)$  有关的积分因子, 即

$$\begin{cases} I_{1ka,i} = \lambda_{k,i}(x_{k,i+1} + x_{k,i} + 2\varepsilon_{ki}) \\ I_{2ka,i} = \lambda_{k,i}[2x_{k,i+1}x_{k,i} + \varepsilon_{ki}(x_{k,i+1} + x_{k,i})] \\ I_{3ka,i} = \mu_{k,i} - \lambda_{k,i}[4\varepsilon_{ki}x_{k,i+1}x_{k,i} + 3\varepsilon_{ki}^2(x_{k,i+1}x_{k,i}) + 2\varepsilon_{ki}^3] \\ I_{1kb,i} = \mu_{k,i} \\ I_{2kb,i} = x_{k,i+1} - x_{k,i} - \varepsilon_{ki}\mu_{k,i} \\ I_{3kb,i} = \frac{1}{2}(x_{k,i+1} - x_{k,i})(x_{k,i+1} + x_{k,i} - 2\varepsilon_{ki}) + \varepsilon_{ki}^2\mu_{k,i} \end{cases} \quad (13)$$

通过逐段求和, 可得曲线段式(7)的积分因子, 即

$$\begin{cases} P_{jka} = \frac{12}{b} \sum_{i=1}^n \frac{I_{jka,i}}{\beta_{ki}^3} \\ P_{jkb} = \frac{12}{b^3} \sum_{i=1}^n \frac{I_{jkb,i}}{\beta_{ki}}, j = 1, 2, 3 \\ P_{kc} = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^n \frac{I_{1kb,i}}{\beta_{ki}} \end{cases} \quad (14)$$

### 2.1.2 渐缩段折线段积分因子

设铰链渐缩段第  $s$  段为  $y = f_s(x)$  的折线, 其斜率小于 0, 折线两端点坐标分别为  $(x_s, y_s)$ 、 $(x_{s+1}, y_{s+1})$ ,  $x_s < x_{s+1}$ ; 与曲线段第  $i$  段计算方法相同, 将折线端点坐标值代入式(9)~式(13), 改变公式下标得折线段与  $h_s(x)$  有关的积分因子  $I_{jsa}$ 、 $I_{jsb}$  值, 由式(7)可得

$$P_{jsa} = \frac{12}{b} \frac{I_{jsa}}{\beta_s^3}; P_{jsb} = \frac{12}{b^3} \frac{I_{jsb}}{\beta_s}; P_{sc} = \frac{I_{1sb}}{b\beta_s}, j = 1, 2, 3 \quad (15)$$

式中, 变量  $P_{jsa}$ 、 $P_{jsb}$ 、 $P_{sc}$  分别表示式(7)中计算折线段, 即第  $s$  段涉及的截面参数与所处位置有关的积分因子;  $\beta_s$  表示式(10)中将  $\beta_{ki}$  下标  $ki$  改写为  $s$  形成的计

算式。

2.1.3 渐缩段平直段积分因子

设铰链渐缩段第  $m$  段为厚度  $h_m$  的等截面直梁,

即  $y = \frac{1}{2} h_m, x_m < x < x_{m+1}$ , 由式(7)可得

$$\begin{cases} P_{jma} = \frac{12(x_{m+1}^j - x_m^j)}{j b h_m^3} \\ P_{jmb} = \frac{12(x_{m+1}^j - x_m^j)}{j b^3 h_m}, j = 1, 2, 3 \\ P_{mc} = \frac{x_{m+1} - x_m}{b h_m} \end{cases} \quad (16)$$

式中, 变量  $P_{jma}$ 、 $P_{jmb}$ 、 $P_{mc}$  分别表示式(7)中计算平直段, 即第  $m$  段涉及的截面参数与所处位置有关的积分因子。

综上, 将每个分段计算出的积分因子相加, 代入式(5)可得渐缩段在局部坐标系下的柔度矩阵。

2.2 柔性铰链渐扩段柔度矩阵

图4为柔性铰链渐扩段示意图。由图4可知, 柔性铰链渐扩段可由一段对应的渐缩段曲线通过对称平移得到。设渐缩段为  $y = g(x)$ , 经由与  $x = L_2$  对称且向左平移  $L_2$ , 得到的柔性铰链渐扩段表达式为

$$y = g(L_2 - x) \quad (17)$$

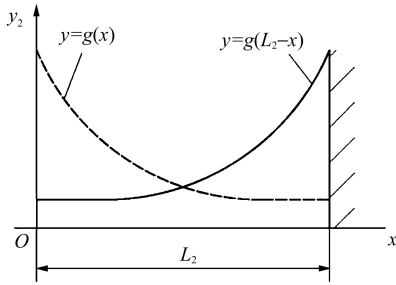


图4 柔性铰链渐扩段示意图

Fig. 4 Schematic diagram for the expanded section of the flexure hinge

$y = g(x)$  柔度可由式(5)得到, 记为  $C_g^{(2)}$ ; 由式(7)、式(17)可得渐扩段积分因子  $P'$  与其对应的渐缩段积分因子  $P$  的关系, 即

$$\begin{cases} P'_{1a} = P_{1a}; P'_{1b} = P_{1b}; P'_c = P_c \\ P'_{2a} = L_2 P_{1a} - P_{2a}; P'_{2b} = L_2 P_{1b} - P_{2b} \\ P'_{3a} = L_2^2 P_{1a} - 2L_2 P_{2a} + P_{3a} \\ P'_{3b} = L_2^2 P_{1b} - 2L_2 P_{2b} + P_{3b} \end{cases} \quad (18)$$

将式(18)代入式(5), 可得渐扩段与其对应的渐缩段在局部坐标系下的柔度关系式, 即

$$C^{(2)} = T C_g^{(2)} T^T \quad (19)$$

式中,  $C_g^{(2)}$  为渐扩段对应的渐缩段在局部坐标系下的柔度矩阵;  $T$  为柔性铰链渐扩段与其对应的渐缩段的柔度映射矩阵,  $T \in R^{6 \times 6}$ , 其非零元素分别为

$$\begin{cases} T_{11} = T_{44} = T_{55} = T_{66} = 1 \\ T_{22} = T_{33} = -1; T_{26} = T_{35} = -L_2 \end{cases} \quad (20)$$

将式(19)代入式(3)整理得, 柔性铰链柔度矩阵为

$$C = C^{(1)} + Q C_g^{(2)} Q^T \quad (21)$$

式中,  $Q$  为渐扩段的柔度传递矩阵,  $Q = J T$ , 其非零元素为

$$\begin{cases} Q_{11} = Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = 1 \\ Q_{22} = Q_{33} = -1; Q_{26} = Q_{35} = -(L_1 + L_2) \end{cases} \quad (22)$$

由式(21)可见, 先求得渐缩段和与渐扩段对应的渐缩段在局部坐标系下的柔度矩阵, 再通过矩阵运算即可求得柔性铰链柔度矩阵。

因此, 可将柔性铰链视为渐缩段和渐扩段的串联组合, 其中, 渐扩段由与其对应的渐缩段对称平移得到。统一求得渐缩段的柔度矩阵, 再通过矩阵变换即可求得柔性铰链柔度矩阵, 采用直线段逼近曲线弧段的方法简化了计算。

3 柔性铰链回转精度模型

理想的铰链应可以绕其回转中心自由旋转, 而柔性铰链在外力作用下产生弹性变形, 易使铰链回转中心产生漂移, 影响铰链的回转精度。通常选取其几何中心  $D$  点的线位移来表征铰链的回转精度, 即求铰链自由端在载荷  $F$  作用下  $D$  点的线位移。设  $D$  的位移  $\zeta_D = [\Delta_{Dx}, \Delta_{Dy}, \Delta_{Dz}]^T$ , 回转精度柔度矩阵为  $C'_D$ , 则有

$$\zeta_D = C'_D F \quad (23)$$

式中,  $C'_D$  为柔度矩阵,  $C'_D \in R^{3 \times 5}$ , 其非零元素为  $C'_{26}, C'_{35}, C'_{ii}, i = 1, 2, 3$ 。

如图5所示, 设柔性铰链几何中心偏离渐缩段与渐扩段交点  $O_2$  的距离为  $L_d$ 。若  $L_1 > L_2$ ,  $L_D = L_1 - L_d$ ; 若  $L_1 = L_2$ ,  $L_D = L_1$ ; 若  $L_1 < L_2$ ,  $L_D = L_1 + L_d$ 。根据卡氏第二定理, 为了求得  $\zeta_D$ , 在  $D$  点处施加一组零值附加力  $F_D = [F_{Dx}, F_{Dy}, F_{Dz}]^T$ 。当  $L_D \leq x \leq L_2$  时, 铰链  $x$  截面内力分量为  $F(x) = -F_x - F_{Dx}$ ,  $F(y) = -F_y - F_{Dy}$ ,  $F(z) = -F_z - F_{Dz}$ ,  $M(y) = M_y - x F_z - (x - L_D) F_{Dz}$ ,  $M(z) = M_z - x F_y - (x - L_D) F_{Dy}$ 。设单元应变能为  $U$ , 由卡氏第二定理, 有

$$\Delta_{Dx} = \frac{\partial U}{\partial F_{Dx}}, \Delta_{Dy} = \frac{\partial U}{\partial F_{Dy}}, \Delta_{Dz} = \frac{\partial U}{\partial F_{Dz}} \quad (24)$$

当铰链渐缩段与渐扩段长度相等时, 铰链几何中心位于  $O_2$  处, 即  $L_D = L_1 = L_2$ , 记式(3)中第二项  $C_p^{(2)} = J C^{(2)} J^T$ , 由式(24)可得

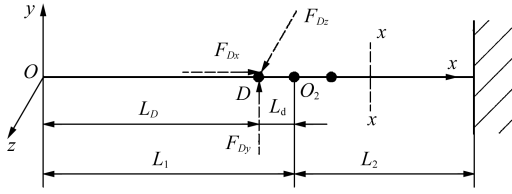


图5 对柔性铰链几何中心施加的附加力

Fig. 5 Apply additional force to the geometric center of the flexure hinge

$$\begin{cases} C'_{11} = C_{p,11}^{(2)} \\ C'_{22} = C_{p,22}^{(2)} + L_D C_{p,26}^{(2)}; C'_{26} = C_{p,26}^{(2)} + L_D C_{p,66}^{(2)} \\ C'_{33} = C_{p,33}^{(2)} + L_D C_{p,35}^{(2)}; C'_{35} = C_{p,35}^{(2)} + L_D C_{p,55}^{(2)} \end{cases} \quad (25)$$

当铰链长度  $L_1 > L_2$  时, 铰链几何中心位于渐缩段上, 即  $L_D = L_1 - L_d$ , 记  $C_{pd}^{(1)}$  为  $x \in [L_D, L_1]$  时渐缩段的柔度矩阵, 由式(24)可得

$$\begin{cases} C'_{11} = C_{p,11}^{(2)} + C_{pd,11}^{(1)} \\ C'_{22} = C_{p,22}^{(2)} + L_D C_{p,26}^{(2)} + C_{pd,22}^{(1)} + L_D C_{pd,26}^{(1)} \\ C'_{26} = C_{p,26}^{(2)} + L_D C_{p,66}^{(2)} + C_{pd,26}^{(1)} + L_D C_{pd,66}^{(1)} \\ C'_{33} = C_{p,33}^{(2)} + L_D C_{p,35}^{(2)} + C_{pd,33}^{(1)} + L_D C_{pd,35}^{(1)} \\ C'_{35} = C_{p,35}^{(2)} + L_D C_{p,55}^{(2)} + C_{pd,35}^{(1)} + L_D C_{pd,55}^{(1)} \end{cases} \quad (26)$$

当铰链长度  $L_1 < L_2$  时, 铰链几何中心位于渐扩段上, 即  $L_D = L_1 + L_d$ , 设  $C_{gd}^{(2)}$  为渐扩段对应的对称平移渐缩段在局部坐标系  $O_2x_2y_2z_2$  下、 $x \in [L_d, L_2]$  时的柔度矩阵。由式(19)得, 局部坐标系下该渐扩段的柔度矩阵为

$$C_d^{(2)} = T_d C_{gd}^{(2)} T_d^T \quad (27)$$

式中,  $T_d$  为该柔性铰链渐扩段与其对应对称平移渐缩段的柔度映射矩阵,  $T_d \in R^{6 \times 6}$ , 其非零元素分别为

$$\begin{cases} T_{d,11} = T_{d,44} = T_{d,55} = T_{d,66} = 1 \\ T_{d,22} = T_{d,33} = -1; T_{d,26} = T_{d,35} = -L_d \end{cases} \quad (28)$$

记  $C_{pd}^{(2)} = J C_d^{(2)} J^T$ , 由式(24)可得

$$\begin{cases} C'_{11} = C_{p,11}^{(2)} - C_{pd,11}^{(2)} \\ C'_{22} = C_{p,22}^{(2)} + L_D C_{p,26}^{(2)} - C_{pd,22}^{(2)} - L_D C_{pd,26}^{(2)} \\ C'_{26} = C_{p,26}^{(2)} + L_D C_{p,66}^{(2)} - C_{pd,26}^{(2)} - L_D C_{pd,66}^{(2)} \\ C'_{33} = C_{p,33}^{(2)} + L_D C_{p,35}^{(2)} - C_{pd,33}^{(2)} - L_D C_{pd,35}^{(2)} \\ C'_{35} = C_{p,35}^{(2)} + L_D C_{p,55}^{(2)} - C_{pd,35}^{(2)} - L_D C_{pd,55}^{(2)} \end{cases} \quad (29)$$

式(25)、式(26)、式(29)给出柔性铰链回转中心的柔度。定义以铰链自由端的柔度与相应回转中心柔度比值的大小来衡量铰链自由端位移相同时保持转动中心能力的高低, 则铰链各项柔度精度比为

$$\eta_{ij} = \frac{C_{ij}}{C'_{ij}}, \quad \eta_{66} = -\frac{C_{66}}{C'_{26}} \quad (30)$$

式(30)中的  $\eta_{ij}$ 、 $\eta_{66}$  值越大, 柔性铰链回转精度性能越高。

#### 4 柔度与回转精度算例验证

为了验证上述模型的正确性, 分别选取悬链线、圆锥曲线和混合柔性铰链进行算例计算, 并与文献公式和有限元法计算结果进行比较。将悬链线形柔性铰链的切口厚度  $c$ 、渐缩段切口长度  $L_1$  和铰链最薄处厚度  $t$  代入悬链线标准方程, 通过 Matlab vpsolve 函数求解超越方程:  $a = x(0)$ , 得悬链线常数  $a$ ; 由式(2)得悬链线切口曲线方程。图6(a)为椭圆形、圆弧形、抛物线形与双曲线形柔性铰链渐缩段几何参数图。其中, 铰链切口厚度  $c = \frac{h_0 - t}{2}$ ; 直椭圆长半轴  $a_{ep} = L_1$ ; 直椭圆的短半轴  $b_{ep} = c$ ;  $R$  为圆弧半径; 圆心角  $\theta_m = \arcsin \frac{L_1}{R}$ 。则  $x$  轴上方渐缩段圆锥曲线参数方程为

$$\begin{cases} y_{ep}(x) = b_{ep} + \frac{t}{2} - b_{ep} \sqrt{1 - \frac{(x - L_1)^2}{a_{ep}^2}} \\ y_{cr}(x) = R + \frac{t}{2} - R \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R} - \sin \theta_m\right)^2} \\ y_{pb}(x) = \frac{t}{2} + c \left(1 - \frac{x}{L_1}\right)^2 \\ y_{hy}(x) = \frac{1}{2} \sqrt{t^2 + 4c(c+t) \left(1 - \frac{x}{L_1}\right)^2} \end{cases} \quad (31)$$

式中,  $0 \leq x \leq L_1$ ; 下标 ep、cr、pb、hy 分别表示椭圆、圆弧、抛物线、双曲线; 若椭圆为深切形, 则将式(31)中第1个式子的  $b_{ep}$  改成  $a_{ep}$ ,  $a_{ep}$  改成  $b_{ep}$ , 深切椭圆短半轴  $b_{ep} = L_1$ , 长半轴  $a_{ep} = c$ 。

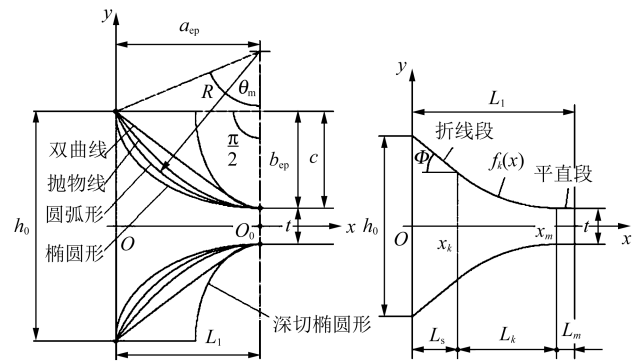


图6 柔性铰链渐缩段参数

Fig. 6 Parameter diagram for the tapered section of flexure hinges

选取柔性铰链材料为 65Mn 钢, 弹性模量  $E = 200$  GPa, 泊松比  $\nu = 0.3$ 。圆锥曲线柔性铰链渐缩段几何参数如表 1 所示。其中, 序号 1 为深切椭圆形参数。选用表 1 参数  $c$ 、 $L_1$ 、 $t$ 、 $b$  设计悬链线形柔性铰链, 序号 2 至 3 对应的悬链线常数  $a$  分别为 4.049 0、6.317 5。将上述数学模型在 Matlab 软件中编程计算, 得到深切椭圆形、抛物线形、双曲线形铰链柔度与回转精度值, 与文献[11]<sup>955106</sup> 给出的理论计算公式进

行比较, 悬链线、悬链线圆弧混合型计算值与有限元法进行比较。图6(b)所示为混合柔性铰链渐缩段, 选取的几何参数如表2所示。

表1 柔性铰链渐缩段几何参数

**Tab. 1 Geometric parameters of the tapered section of flexure hinges**

序号	$h_0/\text{mm}$	$b/\text{mm}$	$t/\text{mm}$	$L_1/\text{mm}$	$c/\text{mm}$	$R/\text{mm}$
1	18.178	5.0	0.5	6.313	8.839	
2	8.0	10.0	1.0	5.0	3.5	5.321
3	11.5	15.0	1.5	7.5	5.0	8.125

表2 混合柔性铰链渐缩段几何参数

**Tab. 2 Geometric parameters of the tapered section of hybrid flexure hinges**

类型	$a_{ep}/\text{mm}$	$b_{ep}/\text{mm}$	$\Phi/(\circ)$	$L_s/\text{mm}$	$L_k/\text{mm}$	$t/\text{mm}$
$SE_p$	8.839	6.315	30	2.102	2.406	0.5
类型	$R/\text{mm}$	$\theta_m/(\circ)$	$\theta$	$L_k/\text{mm}$	$L_m/\text{mm}$	$t/\text{mm}$
$C_rL$	5.211	50.276	$[0, \theta_m]$	4.008	0.5	0.5

表2中,  $SE_p$ 表示折线段与椭圆段串联;  $C_rL$ 表示圆弧段与平直段串联。选择 $SE_p-LC_r$ (渐扩段为 $LC_r$ )左右非对称形柔性铰链参数, 分别用本文计算式与有限元法计算。有限元模型如图7所示。采用Solid186单元, 在 $SE_p$ 端面中间点建立关键点, 与端面创建MPC约束, 施加单位载荷, 在 $LC_r$ 端面施加约束。

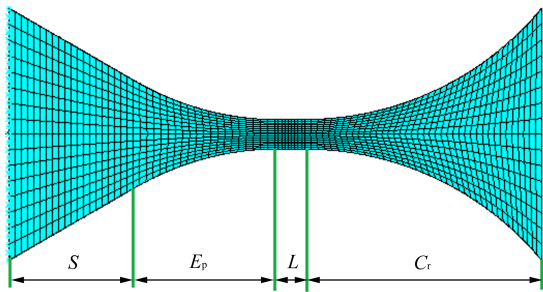


图7  $SE_p-LC_r$ 柔性铰链有限元模型

Fig. 7 Finite element model of  $SE_p-LC_r$  type flexure hinge

随机选择表1中序号3的参数, 得到 $C_{66}$ 本文公式与文献[8]<sup>137</sup>圆弧形、文献[10]<sup>095103</sup>椭圆形、文献

[11]<sup>055106</sup>抛物线形、双曲线形中理论计算公式相对误差 $e_r$ 与分割段数 $n$ 的关系, 如图8所示。由图8可见, 随着分割段数 $n$ 的增大, 相对误差不断减小, 逐渐趋近于理论计算值。其中, 当 $n = 50$ 时, 双曲线形的 $e_r$ 为-0.31%, 椭圆形为-0.06%, 圆弧形为-0.08%, 抛物线形为-0.11%。

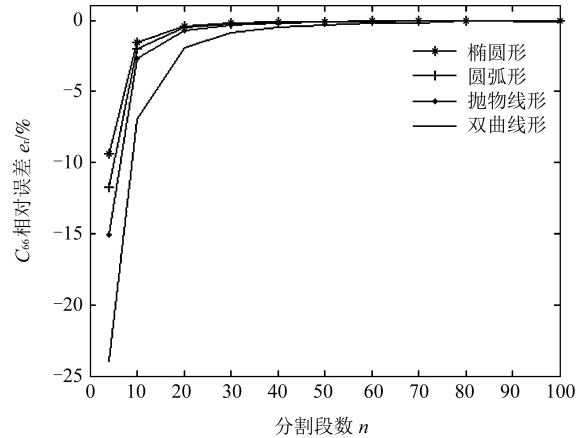


图8  $C_{66}$ 相对误差 $e_r$ 与分割段数 $n$ 的关系

Fig. 8 Relation between the relative error and the number of segments

选取分割段数 $n = 50$ , 上述铰链柔度计算结果分别如表3、表4所示。表中,  $1_{ep}(L)$ 中“1”表示表1中序号1参数计算结果; 下标表示曲线类型; “L”表示本文方法计算结果; “T”表示文献[11]<sup>055106</sup>中理论系列计算式计算结果; “F”表示有限元法计算结果。铰链回转精度计算结果如表5所示。从表3可见, 本文方法计算柔度与文献理论公式的相对误差大多小于0.5%, 最大约为3.8%。从表4可见, 本文方法与有限元计算的相对误差大多小于6%, 最大约为8%。从表5可见, 本文方法计算回转精度与理论计算式和有限元法的相对误差大多小于6%, 最大约为8.5%。上述结果说明, 当分割段数 $n$ 较大时, 本文方法与文献理论计算式、有限元法计算结果吻合较好, 验证了计算式的正确性。

表3 圆锥曲线柔性铰链柔度计算结果

Tab. 3 Calculation results of flexibility of conic curve flexure hinges

	$C_{11}/(\text{m}\cdot\text{N}^{-1})$	$C_{22}/(\text{m}\cdot\text{N}^{-1})$	$C_{26}/\text{N}^{-1}$	$C_{33}/(\text{m}\cdot\text{N}^{-1})$	$C_{35}/\text{N}^{-1}$	$C_{44}/[\text{rad}(\text{N}\cdot\text{m})^{-1}]$	$C_{55}/[\text{rad}(\text{N}\cdot\text{m})^{-1}]$	$C_{66}/[\text{rad}(\text{N}\cdot\text{m})^{-1}]$
$1_{ep}(L)$	$7.783\ 0\times 10^{-9}$	$6.838\ 3\times 10^{-6}$	$-1.063\ 4\times 10^{-3}$	$1.888\ 9\times 10^{-7}$	$-2.358\ 3\times 10^{-5}$	$1.182\ 1\times 10^{-1}$	$3.735\ 9\times 10^{-3}$	$1.680\ 8\times 10^{-1}$
$1_{ep}(T)$	$7.789\ 6\times 10^{-9}$	$6.857\ 1\times 10^{-6}$	$-1.064\ 2\times 10^{-3}$	$1.890\ 5\times 10^{-7}$	$-2.360\ 3\times 10^{-5}$	$1.185\ 6\times 10^{-1}$	$3.739\ 0\times 10^{-3}$	$1.685\ 8\times 10^{-1}$
$e_r/\%$	-0.084	-0.274	-0.300	-0.087	-0.084	-0.295	-0.084	-0.300
$2_{hy}(L)$	$1.743\ 2\times 10^{-9}$	$1.975\ 3\times 10^{-7}$	$-3.737\ 4\times 10^{-5}$	$1.147\ 5\times 10^{-8}$	$-1.045\ 9\times 10^{-5}$	$5.286\ 6\times 10^{-3}$	$2.091\ 9\times 10^{-4}$	$7.474\ 7\times 10^{-3}$
$2_{hy}(T)$	$1.744\ 1\times 10^{-9}$	$1.981\ 7\times 10^{-7}$	$-3.750\ 0\times 10^{-5}$	$1.148\ 0\times 10^{-8}$	$-1.046\ 5\times 10^{-5}$	$5.304\ 1\times 10^{-3}$	$2.092\ 9\times 10^{-4}$	$7.500\ 0\times 10^{-3}$
$e_r/\%$	-0.050	-0.322	-0.337	-0.047	-0.050	-0.329	-0.050	-0.337
$3_{pb}(L)$	$1.550\ 4\times 10^{-9}$	$2.426\ 5\times 10^{-7}$	$-3.031\ 8\times 10^{-5}$	$1.019\ 8\times 10^{-8}$	$-6.201\ 7\times 10^{-7}$	$2.838\ 1\times 10^{-3}$	$8.268\ 9\times 10^{-5}$	$4.042\ 4\times 10^{-3}$
$3_{pb}(T)$	$1.550\ 9\times 10^{-9}$	$2.429\ 1\times 10^{-7}$	$-3.035\ 2\times 10^{-5}$	$9.825\ 3\times 10^{-9}$	$-6.203\ 4\times 10^{-7}$	$2.841\ 2\times 10^{-3}$	$8.271\ 2\times 10^{-5}$	$4.046\ 9\times 10^{-3}$
$e_r/\%$	-0.028	-0.108	-0.111	3.788	-0.028	-0.110	-0.028	-0.111

表4 悬链线形和混合型柔性铰链柔度计算结果

Tab. 4 Calculation results of flexibility of catenary and hybrid flexure hinges

	$C_{11}/(\text{m}\cdot\text{N}^{-1})$	$C_{22}/(\text{m}\cdot\text{N}^{-1})$	$C_{26}/\text{N}^{-1}$	$C_{33}/(\text{m}\cdot\text{N}^{-1})$	$C_{35}/\text{N}^{-1}$	$C_{55}/[\text{rad}(\text{N}\cdot\text{m})^{-1}]$	$C_{66}/[\text{rad}(\text{N}\cdot\text{m})^{-1}]$
$2_{ca}(L)$	$2.3549\times 10^{-9}$	$3.7519\times 10^{-7}$	$-7.0263\times 10^{-5}$	$1.5481\times 10^{-8}$	$-1.4129\times 10^{-6}$	$2.8259\times 10^{-4}$	$1.4053\times 10^{-2}$
$2_{ca}(F)$	$2.4791\times 10^{-9}$	$3.7859\times 10^{-7}$	$-7.1118\times 10^{-5}$	$1.6445\times 10^{-8}$	$-1.5101\times 10^{-6}$	$2.8068\times 10^{-4}$	$1.4464\times 10^{-2}$
$e_f/\%$	5.274	0.906	1.217	6.227	6.879	-0.674	2.844
$3_{ca}(L)$	$1.5936\times 10^{-9}$	$2.5556\times 10^{-7}$	$-3.1855\times 10^{-5}$	$1.0489\times 10^{-8}$	$-6.3744\times 10^{-7}$	$8.4992\times 10^{-5}$	$4.2473\times 10^{-3}$
$3_{ca}(F)$	$1.6764\times 10^{-9}$	$2.5713\times 10^{-7}$	$-3.2156\times 10^{-5}$	$1.1076\times 10^{-8}$	$-6.8817\times 10^{-7}$	$8.4344\times 10^{-5}$	$4.3538\times 10^{-3}$
$e_f/\%$	5.196	0.614	0.945	5.596	7.958	-0.764	2.507
$2_{ca}-2_{cr}(L)$	$2.4464\times 10^{-9}$	$4.1622\times 10^{-7}$	$-7.6343\times 10^{-5}$	$1.6373\times 10^{-8}$	$-1.4941\times 10^{-6}$	$2.9356\times 10^{-4}$	$1.4973\times 10^{-2}$
$2_{ca}-2_{cr}(F)$	$2.5666\times 10^{-9}$	$4.1637\times 10^{-7}$	$-7.6638\times 10^{-5}$	$1.7207\times 10^{-8}$	$-1.6137\times 10^{-6}$	$2.8994\times 10^{-4}$	$1.5285\times 10^{-2}$
$e_f/\%$	4.913	0.036	0.386	5.094	8.005	-1.233	4.672
$SE_p-LC_r(L)$	$8.5153\times 10^{-9}$	$5.3290\times 10^{-6}$	$-1.0658\times 10^{-3}$	$1.3043\times 10^{-7}$	$-1.9280\times 10^{-5}$	$4.0873\times 10^{-3}$	$2.2239\times 10^{-1}$
$SE_p-LC_r(F)$	$8.6057\times 10^{-9}$	$5.1777\times 10^{-6}$	$-1.0353\times 10^{-3}$	$1.3645\times 10^{-7}$	$-2.0064\times 10^{-5}$	$4.1816\times 10^{-3}$	$2.1635\times 10^{-1}$
$e_f/\%$	-1.061	2.840	2.857	-4.618	-4.069	-2.306	2.717

注：下标ca表示悬链线。

表5 柔性铰链回转精度计算结果

Tab. 5 Calculation results of the rotation accuracy of flexure hinges

	$C'_{11}/(\text{m}\cdot\text{N}^{-1})$	$C'_{22}/(\text{m}\cdot\text{N}^{-1})$	$C'_{26}/\text{N}^{-1}$	$C'_{33}/(\text{m}\cdot\text{N}^{-1})$	$C'_{35}/\text{N}^{-1}$
$1_{ep}(L)$	$3.8915\times 10^{-9}$	$4.0167\times 10^{-7}$	$-5.2477\times 10^{-5}$	$3.8403\times 10^{-8}$	$-2.9134\times 10^{-6}$
$1_{ep}(T)$	$3.8948\times 10^{-9}$	$4.0182\times 10^{-7}$	$-5.2609\times 10^{-5}$	$3.8438\times 10^{-8}$	$-2.9158\times 10^{-6}$
$e_f/\%$	-0.084	-0.037	-0.250	-0.091	-0.085
$2_{hy}(L)$	$5.9592\times 10^{-10}$	$1.1255\times 10^{-8}$	$-9.9503\times 10^{-7}$	$2.7163\times 10^{-9}$	$-7.6877\times 10^{-8}$
$2_{hy}(T)$	$5.9766\times 10^{-10}$	$1.1328\times 10^{-8}$	$-1.0033\times 10^{-6}$	$2.7220\times 10^{-9}$	$-7.6923\times 10^{-8}$
$e_f/\%$	-0.291	-0.646	-0.829	-0.210	-0.060
$3_{pb}(L)$	$7.7405\times 10^{-10}$	$2.5938\times 10^{-8}$	$-2.4437\times 10^{-6}$	$3.5322\times 10^{-9}$	$-1.0172\times 10^{-7}$
$3_{pb}(T)$	$7.7543\times 10^{-10}$	$2.6069\times 10^{-8}$	$-2.4575\times 10^{-6}$	$3.3502\times 10^{-9}$	$-1.0184\times 10^{-7}$
$e_f/\%$	-0.177	-0.503	-0.562	5.434	-0.118
$2_{ca}(L)$	$1.1774\times 10^{-9}$	$4.0934\times 10^{-8}$	$-5.7992\times 10^{-6}$	$5.3672\times 10^{-9}$	$-2.3181\times 10^{-7}$
$2_{ca}(F)$	$1.2777\times 10^{-9}$	$4.1529\times 10^{-8}$	$-5.9819\times 10^{-6}$	$5.6449\times 10^{-9}$	$-2.2022\times 10^{-7}$
$e_f/\%$	8.519	1.454	3.150	5.168	-5.000
$3_{ca}(L)$	$7.9680\times 10^{-10}$	$2.8429\times 10^{-8}$	$-2.6808\times 10^{-6}$	$3.6459\times 10^{-9}$	$-1.0558\times 10^{-7}$
$3_{ca}(F)$	$8.5984\times 10^{-10}$	$2.8745\times 10^{-8}$	$-2.7548\times 10^{-6}$	$3.8067\times 10^{-9}$	$-1.0033\times 10^{-7}$
$e_f/\%$	7.911	1.111	2.760	4.410	4.972
$2_{ca}-2_{cr}(L)$	$1.2689\times 10^{-9}$	$5.1562\times 10^{-8}$	$-7.2770\times 10^{-6}$	$5.8531\times 10^{-9}$	$-2.5808\times 10^{-7}$
$2_{ca}-2_{cr}(F)$	$1.3286\times 10^{-9}$	$5.1850\times 10^{-8}$	$-7.4086\times 10^{-6}$	$6.0663\times 10^{-9}$	$-2.4136\times 10^{-7}$
$e_f/\%$	4.705	0.559	1.808	3.643	-6.479
$SE_p-LC_r(L)$	$4.7577\times 10^{-9}$	$6.9224\times 10^{-7}$	$-1.1628\times 10^{-4}$	$3.7535\times 10^{-8}$	$-3.3783\times 10^{-6}$
$SE_p-LC_r(F)$	$4.8798\times 10^{-9}$	$6.7297\times 10^{-7}$	$-1.1280\times 10^{-4}$	$3.8975\times 10^{-8}$	$-3.4641\times 10^{-6}$
$e_f/\%$	-2.566	2.783	2.989	-3.836	-2.538

## 5 结构参数对悬链线柔性铰链的影响分析

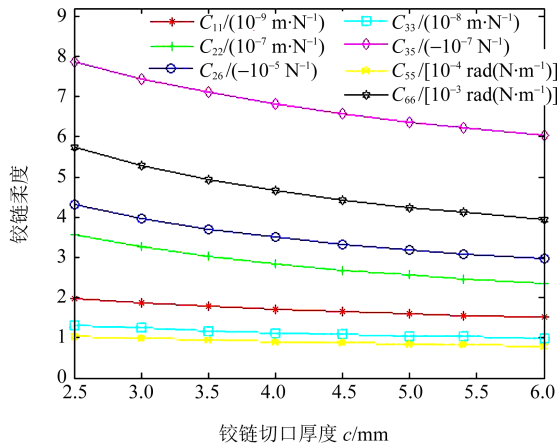
### 5.1 结构参数对柔度的影响

从柔度计算公式可以看出，悬链线形柔性铰链柔度与铰链切口厚度 $c$ 、渐缩段长度 $L_1$ 、最薄处厚度

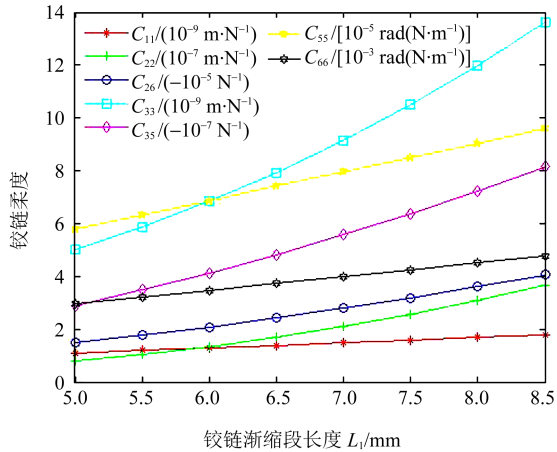
$t$ 和铰链宽度 $b$ 有关。选取表1中序号3参数，合理改变任意一项参数而其他参数不变，求得任一参数对柔度的影响，如图9所示。

从图9可见，悬链线形柔性铰链各柔度项随任意参数变化的趋势相似，但变化速率不同；各柔度项

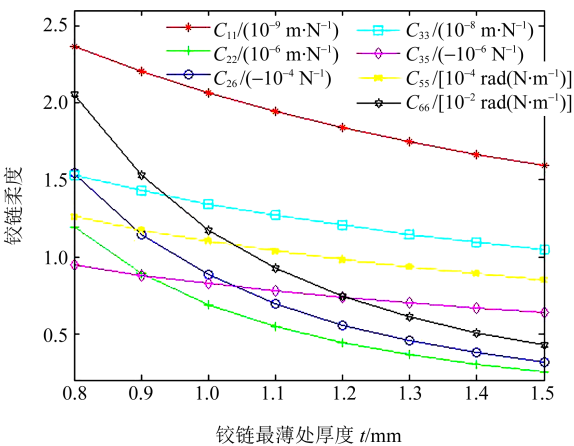
都随参数  $c$ 、 $t$ 、 $b$  的增大而减小, 随参数  $L_1$  的增大而增大; 各柔度项对参数  $t$  的变化最敏感, 对参数  $c$  的变化敏感性最弱。由图 9(a) 可知, 参数  $c$  对  $C_{11}$ 、 $C_{33}$ 、 $C_{55}$  的影响很小, 对  $C_{22}$ 、 $C_{26}$ 、 $C_{35}$ 、 $C_{66}$  的影响相对较大; 由图 9(b) 可知, 参数  $L_1$  的变化对  $C_{11}$ 、 $C_{26}$ 、 $C_{66}$  的影响较小, 对其他项的影响较大, 对  $C_{33}$  的影响最大。由图 9(c)、图 9(d) 可知, 铰链参数  $t$  和  $b$  的增加对各柔度项的影响都较大; 其中, 参数  $t$  的变化对  $C_{22}$ 、 $C_{26}$ 、 $C_{66}$  的影响较其他项大, 参数的  $b$  变化对  $C_{33}$ 、 $C_{35}$ 、 $C_{55}$  的影响较其他项大。



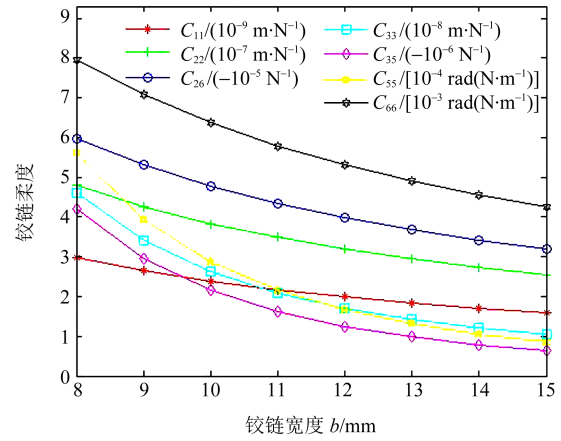
(a) 切口厚度对柔度的影响



(b) 渐缩段长度对柔度的影响



(c) 铰链最薄处厚度对柔度的影响



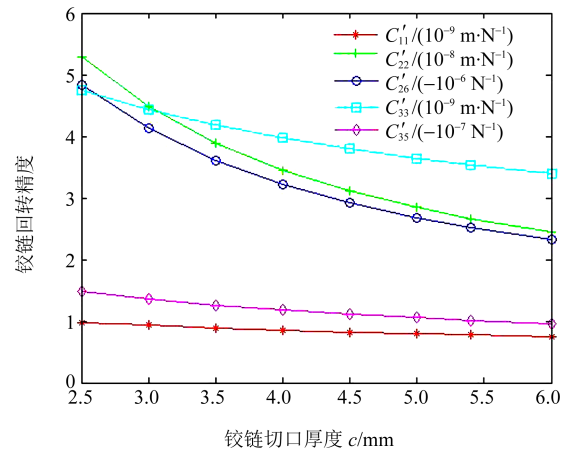
(d) 铰链宽度对柔度的影响

图 9 结构参数对柔度的影响

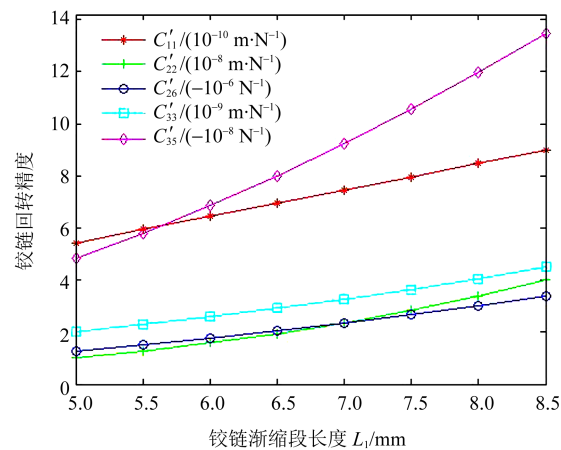
Fig. 9 Influence of structural parameters on the compliance

### 5.2 结构参数对回转精度的影响

从回转精度计算公式可知, 悬链线形柔性铰链回转精度与切口厚度  $c$ 、渐缩段长度  $L_1$ 、最薄处厚度  $t$  和铰链宽度  $b$  有关。同理, 选取表 1 序号 3 参数, 合理变动任一项参数而其他参数不变, 求得结构参数对回转精度的影响, 如图 10 所示。



(a) 切口厚度对回转精度的影响



(b) 渐缩段长度对回转精度的影响

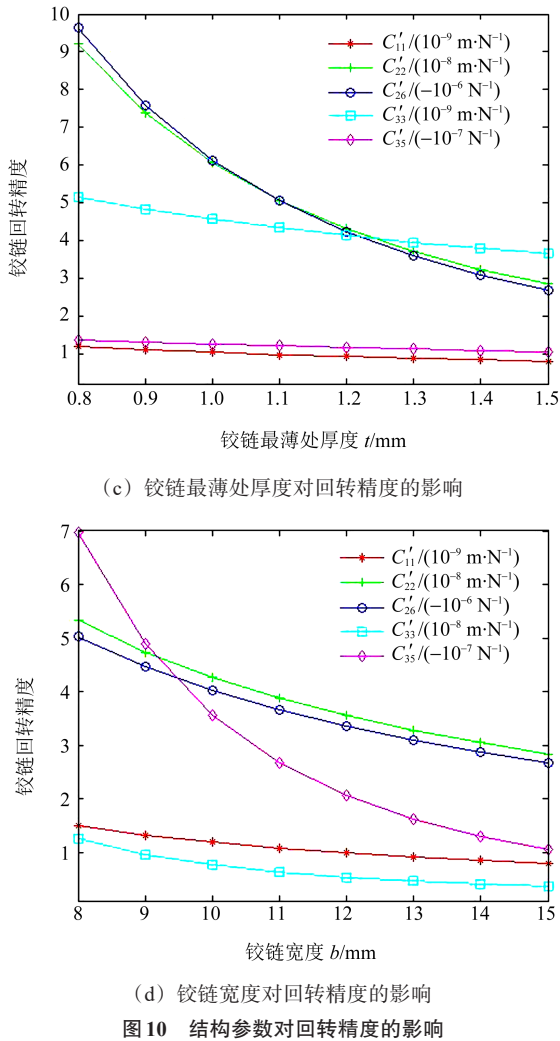


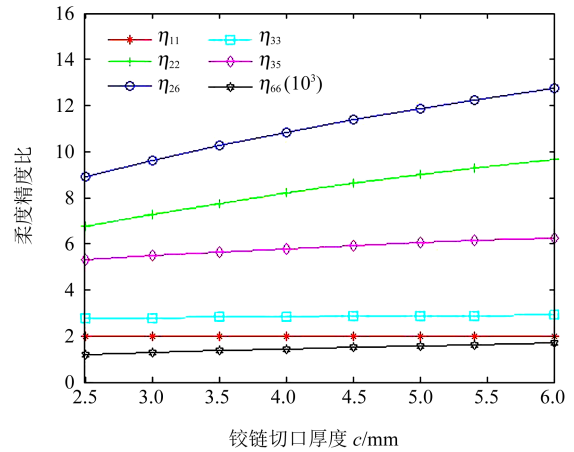
图 10 结构参数对回转精度的影响

从图 10 可见，悬链线柔性铰链各回转精度柔度项随任意参数变化的趋势相似，但变化速率不同；各项都随参数  $c$ 、 $t$ 、 $b$  的增大而减小，随  $L_1$  的增大而增大，变化趋势与柔度项相似。由图 10(a) 可知，参数  $c$  变化对  $C'_{22}$ 、 $C'_{26}$  的影响较大， $C'_{33}$  次之，对  $C'_{11}$ 、 $C'_{35}$  的影响较小。由图 10(b) 可知，参数  $L_1$  变化对各柔度项的影响都较大，对  $C'_{35}$  的影响最大，其余项变化趋势相近。由图 10(c) 可知，参数  $t$  变化对  $C'_{22}$ 、 $C'_{26}$  的影响较大，对其余项的影响较小。由图 10(d) 可知，参数  $b$  变化对  $C'_{35}$  的影响最大， $C'_{22}$ 、 $C'_{26}$  次之，对  $C'_{11}$ 、 $C'_{33}$  的影响较小。回转精度柔度项增大意味着柔性铰链回转精度降低。由图 9、图 10 可知，改变参数在增大铰链柔度的同时会降低回转精度。

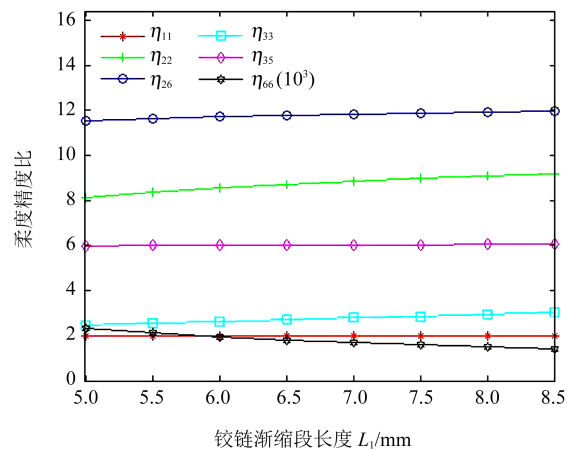
### 5.3 结构参数对柔度精度比的影响

从上述分析可见，悬链线柔性铰链自由端柔度和回转精度成负相关，提高柔度的同时会使回转精度降低。综合考虑柔度和回转精度，基于式(30)分析铰链结构参数变化对回转精度性能的影响，结果如图 11 所示。

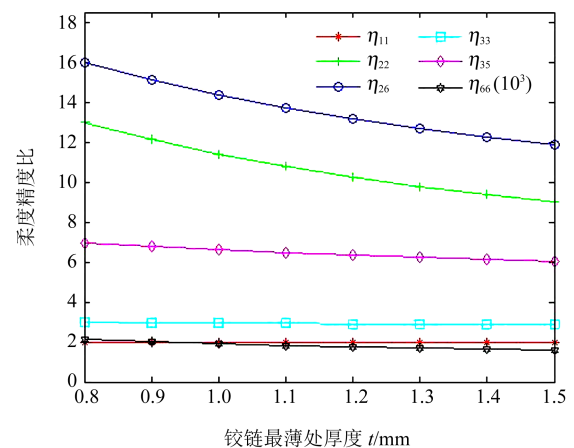
从图 11 可见，悬链线柔性铰链柔度精度比  $\eta_{11} = 2.0$ ，不随铰链参数变化。从图 11(a) 可知，随着参数  $c$  增大， $\eta_{22}$ 、 $\eta_{26}$  增大较显著。从图 11(c) 可知，随着参数  $t$  增大， $\eta_{22}$ 、 $\eta_{26}$  的减小较其他项显著。从图 11(b)、图 11(d) 可知，参数  $L_1$  和  $b$  变化对各柔度精度比的影响均较小，参数  $b$  的变化对除  $\eta_{33}$  外的其余项都不产生影响。



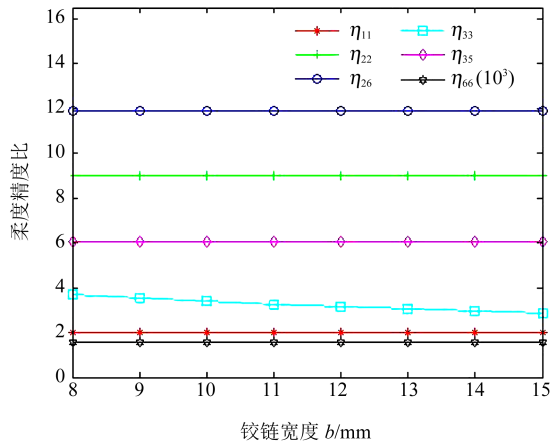
(a) 切口厚度对柔度精度比的影响



(b) 渐缩段切口长度对柔度精度比的影响



(c) 铰链最薄处厚度对柔度精度比的影响



(d) 铰链宽度对柔度精度比的影响

图 11 结构参数对柔度精度比的影响

Fig. 11 Influence of structural parameters on the compliance-rotation accuracy ratio

综上所述, 为了提高悬链线柔性铰链的柔度, 应以减小铰链最薄处厚度为主要手段, 此时虽然会降低回转精度, 但柔度精度比是提升的; 其次是减小铰链宽度, 此时柔度精度比基本保持不变; 而减小铰链切口厚度对柔度提升不明显, 同时还会降低柔度精度比; 增加铰链渐缩段长度, 对重要柔度项  $C_{26}$ 、 $C_{66}$  提升不明显, 且不提升柔度精度比。

### 6 悬链线圆锥曲线及其混合铰链比较分析

选取表 1 中序号 2 参数, 计算相同结构参数下的悬链线、圆锥曲线、悬链线与圆锥曲线混合柔性铰链弯曲柔度  $C_{66}$  的值, 结果如图 12 所示, 弯曲柔度精度比  $\eta_{66}$  的值如图 13 所示。图中, Hy 表示双曲线形柔性铰链; CaCr 表示悬链线与圆弧形混合柔性铰链, 其中, 渐缩段为 Ca 段。

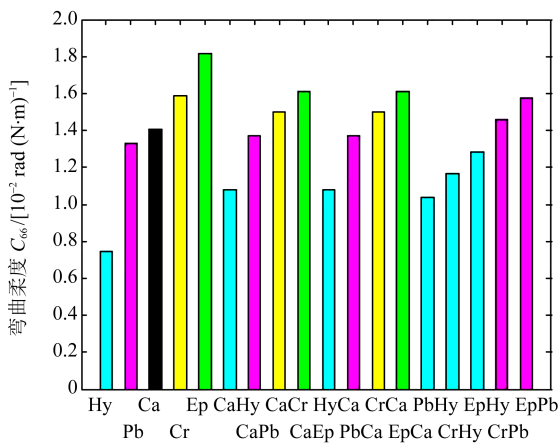


图 12 柔性铰链弯曲柔度

Fig. 12 Bending compliance of flexure hinges

由图 12、图 13 可知, 在相同结构参数下, Hy、Pb、Ca、Cr 和 Ep 的弯曲柔度依次递增, 弯曲柔度精

度比依次递减, 其转动能力和回转精度不能兼顾。Ca 弯曲柔度比 Pb 提升 5.5%, 而柔度精度比降低 4.1%, 综合考虑  $C_{66}$  和  $\eta_{66}$ , Ca 介于 Pb 和 Cr 之间, 悬链线丰富了柔性铰链切口形状的选择。渐缩段为悬链线、渐扩段为圆锥曲线的混合柔性铰链——CaHy、CaPb、CaCr、CaEp 的  $C_{66}$  递增,  $\eta_{66}$  依次递减; 几何对称的 HyCa、PbCa、CrCa、EpCa 的  $C_{66}$  依次递增且大小与相互对称的铰链相同,  $\eta_{66}$  也依次递增; 几何对称的混合柔性铰链弯曲柔度相等, 但柔度精度比不等。其中, 针对  $\eta_{66}$  值, CaHy 大于 HyCa, CaPb 大于 PbCa, CrCa 大于 CaCr, EpCa 大于 CaEp。Hy、Pb-Hy、CaHy、CrHy、EpHy 的  $C_{66}$  和  $\eta_{66}$  依次递增, Pb、CaPb、CrPb、EpPb 的  $C_{66}$  和  $\eta_{66}$  依次递增, Ca、CrCa、EpCa 的  $C_{66}$  和  $\eta_{66}$  依次递增; 比较 Ep 和 EpHy, EpHy 的  $C_{66}$  值较 Ep 降低了 29.4%, 但  $\eta_{66}$  值提升了 217.7%。选择柔度大的为渐缩段、柔度小的为渐扩段组成混合铰链, 可兼顾柔度和回转精度, 且渐扩段和渐缩段的柔度差距越大, 铰链的柔度精度比越高。

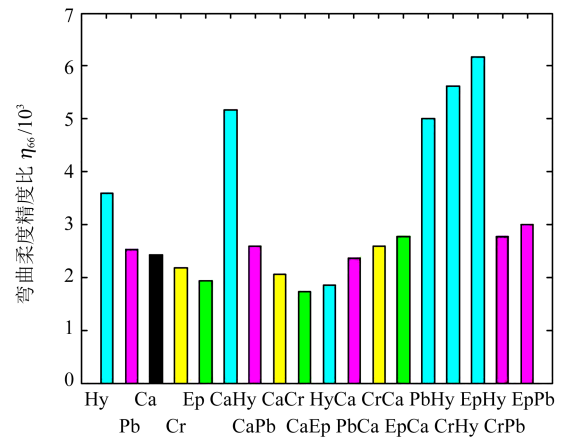


图 13 柔性铰链弯曲柔度精度比

Fig. 13 Bending compliance-rotation accuracy ratio of the flexure hinges

### 7 结论

设计了一种新型悬链线柔性铰链。将铰链视为渐缩段与渐扩段的组合, 将渐缩段分割为若干弧段, 并用直线逼近弧段; 基于卡氏第二定理, 统一求取渐缩段柔度, 再由矩阵运算, 建立铰链柔度和回转精度计算模型, 通过算例验证了计算式的正确性; 分析了结构参数对悬链线柔性铰链柔度和回转精度的影响, 比较了相同结构参数下悬链线、圆锥曲线及其混合铰链的弯曲柔度和柔度精度比。得出以下结论:

1) 新型悬链线形柔性铰链难以通过传统方法求得全部柔度和回转精度项的解析解。本文通过分割

铰链渐缩段,用直线段逼近弧段,统一求取渐缩段柔度;再由矩阵变换建立了通用的柔度和回转精度模型。通过具体算例与文献[11]<sup>055106</sup>计算式和有限元计算比较,当曲线段分割段数较大时,计算结果吻合较好,验证了计算式的正确性,提出的通用计算模型极大简化了柔性铰链柔度和回转精度的计算过程。

2) 分析了不同结构参数对悬链柔性铰链柔度、回转精度和柔度精度比的影响。单一参数对柔度和回转精度的影响成负相关,提升柔度的同时回转精度降低。减小铰链最小厚度对柔度提升最敏感,其次是减小铰链宽度,而减小铰链切口厚度和增加铰链渐缩段长度对重要柔度和回转精度的提升不明显。

3) 分析了相同结构参数下悬链线、圆锥曲线及其混合铰链的弯曲柔度和柔度精度比。双曲线形、抛物线形、悬链线形、圆弧形和椭圆形柔性铰链弯曲柔度依次递增,柔度精度比依次递减,悬链线形介于抛物线形和圆弧形之间。选择柔度大的为渐缩段、柔度小的为渐扩段的组合可兼顾柔度和回转精度,柔度悬殊越大,越有利于提升柔度精度比。

本文设计丰富了铰链切口曲线的选择,计算方法可为新型柔性铰链的高效设计与分析应用提供参考。

#### 参 考 文 献

- [1] 于靖军,郝广波,陈贵敏,等. 柔性机构及其应用研究进展[J]. 机械工程学报,2015,51(13):53-68.  
YU Jingjun, HAO Guangbo, CHEN Guimin, et al. State-of-art of compliant mechanisms and their applications [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(13): 53-68.
- [2] 杨满芝,景钢,郭卫,等. 精密对称驱动二级微动放大系统设计及性能[J]. 兵工学报,2022,43(6):1456-1465.  
YANG Manzhi, JING Gang, GUO Wei, et al. Design and performance of precision symmetric two-stage micro-drive amplification system [J]. Acta Armamentarii, 2022, 43(6): 1456-1465.
- [3] 虞启凯,韩江义,杨红鑫,等. 一种基于柔性铰链微旋转平台设计与仿真[J]. 机床与液压,2020,48(8):127-131.  
YU Qikai, HAN Jiangyi, YANG Hongxin, et al. Design and simulation of a new type of micro rotating platform based on flexure hinge [J]. Machine Tool & Hydraulics, 2020, 48(8): 127-131.
- [4] 姜世洲,杜言鲁,王惠林,等. 柔性铰链结构特性对快速反射镜性能影响分析[J]. 应用光学,2022,43(4):626-634.  
JIANG Shizhou, DU Yanlu, WANG Huilin, et al. Impact analysis of flexure hinge structural characteristics on performance of fast steering mirror [J]. Journal of Applied Optics, 2022, 43(4): 626-634.
- [5] 李立建,马爱霞,姚建涛,等. 柔性并联六维力传感器力映射解析研究[J]. 机械工程学报,2017,53(7):30-38.  
LI Lijian, MA Aixia, YAO Jiantao, et al. Force mapping analytical research of flexure parallel six-axis force/torque sensor [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017, 53(7): 30-38.
- [6] 孟巧玲,沈志家,陈忠哲,等. 基于柔性铰链的仿生外骨骼机械手设计研究[J]. 中国生物医学工程学报,2020,39(5):557-565.  
MENG Qiaoling, SHEN Zhijia, CHEN Zhongzhe, et al. Design and research of bionic hand exoskeleton based on flexible hinge [J]. Chinese Journal of Biomedical Engineering, 2020, 39(5): 557-565.
- [7] PAROS J M, WEISBORD L. How to design flexure hinges [J]. Machine Design, 1965, 37(27): 151-156.
- [8] 吴鹰飞,周兆英. 柔性铰链的设计计算[J]. 工程力学,2002(6):136-140.  
WU Yingfei, ZHOU Zhaoying. Design of flexure hinges [J]. Engineering Mechanics, 2002(6): 136-140.
- [9] SMITH S T, BADAMI V G, DALE J S, et al. Elliptical flexure hinges [J]. Review of Scientific Instruments, 1997, 68(3): 1474-1483.
- [10] CHEN G M, SHAO X D, HUANG X B. A new generalized model for elliptical arc flexure hinges [J]. Review of Scientific Instruments, 2008, 79(9): 095103.
- [11] CHEN G M, LIU X Y, GAO H W, et al. A generalized model for conic flexure hinges [J]. Review of Scientific Instruments, 2009, 80(5): 055106.
- [12] 李成,何涛,陈明亮,等. 摆线柔性铰链的设计计算与性能分析[J]. 机械设计与研究,2020,36(2):12-15.  
LI Cheng, HE Tao, CHEN Mingliang, et al. Design calculation and performance analysis of cycloidal flexible hinges [J]. Machine Design & Research, 2020, 36(2): 12-15.
- [13] 刘敏,张宪民. 基于类V型柔性铰链的微位移放大机构[J]. 光学精密工程,2017,25(4):467-476.  
LIU Min, ZHANG Xianmin. Micro-displacement amplifier based on quasi-V-shaped flexure hinge [J]. Optics and Precision Engineering, 2017, 25(4): 467-476.
- [14] 黄朝,孔建益,鲜小东,等. 广义圆锥倒角V型柔性铰链设计与分析[J]. 武汉科技大学学报,2021,44(3):196-206.  
HUANG Zhao, KONG Jianyi, XIAN Xiaodong, et al. Design and analysis of generalized conic-chamfered V-shaped flexure hinges [J]. Journal of Wuhan University of Science and Technology, 2021, 44(3): 196-206.
- [15] 李立建,姚建涛,郭飞,等. 混合型柔性铰链构型设计与柔度建模[J]. 机械工程学报,2022,58(21):78-91.  
LI Lijian, YAO Jiantao, GUO Fei, et al. Configuration design and compliance modeling of hybrid flexure hinges [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2022, 58(21): 78-91.
- [16] LOBONTIU N, PAINE J S N, O' MALLEY E, et al. Parabolic and hyperbolic flexure hinges: flexibility, motion precision and stress characterization based on compliance closed-form equations [J]. Precision Engineering, 2002, 26(2): 183-192.
- [17] 刘小院. 基于柔性铰链通用模型的柔性位移放大机构建模方法研究[D]. 西安:西安电子科技大学,2014:9-16.

- LIU Xiaoyuan. Modeling of compliant displacement amplifier based on a generalized model for conic flexure hinges[D]. Xi'an: Xidian University, 2014: 9-16.
- [18] CHEN G M, HOWELL L L. Two general solutions of torsional compliance for variable rectangular cross-section hinges in compliant mechanisms[J]. Precision Engineering, 2009, 33(3): 268-274.
- [19] 李立建, 张丹. 椭圆型柔性铰链闭式扭转柔度研究[J]. 北京交通大学学报, 2018, 42(3): 134-140.
- LI Lijian, ZHANG Dan. Research on closed-form torsional compliance of elliptical flexure hinges[J]. Journal of Beijing Jiaotong University, 2018, 42(3): 134-140.
- [20] 王传礼, 李成, 何涛, 等. 椭圆导角混合柔性铰链的设计计算与性能分析[J]. 中国机械工程, 2021, 32(9): 1017-1026.
- WANG Chuanli, LI Cheng, HE Tao, et al. Design calculation and performance analysis of elliptical corner-filletted hybrid flexure hinges [J]. China Mechanical Engineering, 2021, 32(9): 1017-1026.
- [21] 倪迎雪, 伞晓刚, 高世杰, 等. 新型混合柔性铰链柔度研究[J]. 红外与激光工程, 2016, 45(10): 226-231.
- NI Yingxue, SAN Xiaogang, GAO Shijie, et al. Research on flexibility of the novel hybrid flexure hinge[J]. Infrared and Laser Engineering, 2016, 45(10): 226-231.
- [22] 张伟, 杨立保, 李清雅, 等. 直圆抛物线复合铰链柔度研究[J]. 红外与激光工程, 2018, 47(11): 258-264.
- ZHANG Wei, YANG Libao, LI Qingya, et al. Research on compliance of compound circular-parabolic hinges[J]. Infrared and Laser Engineering, 2018, 47(11): 258-264.

## Design and analysis of catenary and conical section hybrid flexure hinges

XIE Zuqiang CHEN Guiqing

(School of Mechanical and Intelligent Manufacturing, Fujian Chuanzheng Communications College, Fuzhou 350007, China)

**Abstract:** [Objective] Existing research on flexible hinges corresponds to complex expressions for flexibility and rotational accuracy calculations. To address this issue, a new type of catenary flexure hinge was designed, and a method for establishing the hinge's compliance and rotational accuracy model by approximating arc segments with straight-line segments was proposed. [Methods] Firstly, by defining the flexure hinge as a series combination of tapered and expanded sections, the curve in the tapered segment was divided into several arc segments, and the curve segments were approximated with straight segments. Based on the Castigliano's second theorem, a method by calculating the flexibility of the tapered section and then establishing the hinge flexibility and rotational accuracy model through matrix operations was established. Secondly, using specific examples, the derived formula, literature formulas, and the finite element method were employed for calculations. When the curve segment was finely divided, the calculation results align well, thereby verifying the formula's correctness. Thirdly, the influence of structural parameters on the flexibility, rotation accuracy, and flexibility-accuracy ratio of catenary flexure hinges was analyzed. Finally, the bending flexibility and flexibility-accuracy ratio of the catenary, conic, and their hybrid hinges were analyzed with the same structural parameters. [Results] The results show that a single parameter has a negative correlation with flexibility and rotation accuracy of the catenary hinge, and reducing the minimum thickness is the best way to improve flexibility. Under the same structural parameters, the flexibility and flexibility-accuracy ratio of the catenary hinge is between parabolic and circular shapes. Choosing a hybrid hinge with a section of high flexibility for the tapered section and a section of low flexibility for the expanded section allows for a balance between flexibility and motion accuracy. The greater the difference in flexibility, the better the flexibility-accuracy ratio.

**Key words:** Catenary flexure hinge; Hybrid flexure hinge; Tapered section; Linear approximation; Flexibility modeling

(编辑: 刘甲)