

DOI: 10.7511/jslx20240509001

多流体域声传播计算的弱形式无网格方法

游翔宇^{*1,2}, 印建成¹, 姚宇^{1,2}, 李威³

(1. 长沙理工大学 水利与海洋工程学院, 长沙 410114; 2. 水沙科学与水灾害防治湖南省重点实验室, 长沙 410114;
3. 华中科技大学 船舶与海洋工程学院, 武汉 430074)

摘要:多流体域声传播研究在船海工程中具有重要的应用价值,如气液共存的管道声传播分析、海底掩埋物探测等。经典有限元法求解此类问题时存在两个难点。一是中高波数下解存在严重的数值色散误差;二是耦合界面附近必须使用精细网格。这些难点导致有限元法的计算量较大,需人工干预以生成高质量网格。与有限元法相比,弱形式无网格法无需传统意义上的网格划分,其解的色散误差效应更弱,保证了良好的计算精度及效率,但径向基无网格形函数具有不连续性质,导致质点振速连续条件无法在界面上自然满足。因此,本文提出了多流体域声传播计算的无网格伽辽金弱形式,运用罚函数法重构了界面上的质点振速连续条件。数值分析表明,无网格解与参考解相符,且计算精度及效率优于有限元解。

关键词:多流体域声传播;有限元法;弱形式无网格法;罚函数法;计算声学

中图分类号:O242.21

文献标志码:A

文章编号:1007-4708(2025)05-0786-09

1 引言

多流体域声传播问题在船海工程中普遍存在,如气液共存的管道声传播^[1]、海底界面附近的声传播^[2-5]等。基于局部的单元形函数,有限元法通过在多流体域耦合界面处布置节点和单元边,可自然满足界面上的声压与质点振速连续条件。然而有限元法在中高频计算时存在严重的数值色散误差问题,导致需庞大的自由度数来获取可靠结果,计算效率不佳。因此,学者们提出了一系列改进有限元法^[6-8],但未完全解决该问题。此外,由于界面附近的声压梯度变化剧烈,使用有限元法时还需对界面网格进行人工加密和修整,以保证数值解的精度,导致离散复杂模型时前处理工作比较繁琐。

作为有限元法的演进者,弱形式无网格方法在网格划分和计算精度方面有着较大的优势。与有限元法相比,其无需传统意义上的网格划分,对畸形节点分布的适应度高,可用较少的节点数获取高精度解。作为一种弱形式无网格方法,径向点插值法 RPIM(Radial point interpolation method)已应

用于内场声传播分析,展现了比经典有限元法更高的计算精度和效率^[9]。之后,国内学者运用不同类型的弱形式无网格方法分析管道(或消声器)声场^[10,11]和 underwater 声场^[12,13]等,但主要研究单流体域声传播问题,未考虑更复杂的多流体域声传播问题。

有别于有限元形函数,径向基无网格形函数是非局部的,致使形函数在问题域内呈不连续性。这种不连续性会导致声质点振速连续条件在多介质耦合界面上无法自然满足,因而需额外的技术手段施加该连续条件。针对固体力学,为了解决多介质耦合问题,学者们运用了拉格朗日乘法代入连续条件^[14],或者构造了特殊形函数以增强原有形函数^[15]。然而上述手段会引入额外的自由度,或增加无网格形函数构造的复杂度,不利于降低计算成本,但为本文提供了重要的参考价值。到目前为止,多流体域声传播计算的无网格弱形式构造不甚明确,限制了方法的应用范围。因此,本文运用罚函数法重构了界面上的质点振速连续条件,提出适用于无网格法的多流体域声传播计算伽辽金弱形

收稿日期:2024-05-09; 修改稿收到日期:2024-06-11.

基金项目:国家自然科学基金(52171336);湖南省教育厅科学研究项目(23C0135);湖南省自然科学基金(2025JJ60055);海洋工程全国重点实验室(上海交通大学开放基金(2461));长沙市自然科学基金(kq2402005)资助项目.

作者简介:游翔宇*(1992-),男,博士,讲师(E-mail:csust_yxy@csust.edu.cn).

引用本文:游翔宇,印建成,姚宇,等.多流体域声传播计算的弱形式无网格方法[J].计算力学学报,2025,42(5):786-794.

YOU Xiangyu, YIN Jiancheng, YAO Yu, et al. A weak-form meshfree method for two-dimensional acoustic wave propagation in multi-fluids[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2025, 42(5): 786-794.

式。最终的数值结果表明,无网格解与有限元参考解相符,表明提出的弱形式是可靠的,且使用相同节点数时无网格解的计算精度优于有限元解。

2 多流体域声传播计算的控制方程

2.1 弱形式及连续条件

如图1所示,考虑声波在两个流体域间传播($\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$)。虽然这里只给出存在两种介质的情况,但本文推导同样适用于更多介质的情况。考虑频域下的声学控制方程^[16]

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho_1}(\Delta p_1 + k_1^2 p_1) = 0 & (\text{在 } \Omega_1 \text{ 内}) \\ \frac{1}{\rho_2}(\Delta p_2 + k_2^2 p_2) = 0 & (\text{在 } \Omega_2 \text{ 内}) \end{cases} \quad (1)$$

式中 ρ_1 和 ρ_2 分别为流体介质 1 和 2 的密度(密度为常数), k_1 和 k_2 分别为流体域 1 和 2 中的波数。图 1 的迪利克雷边界为声压边界条件 $p = \bar{p}$,纽曼边界条件为质点法向振速条件 $\partial p / \partial n = -i\rho\omega \bar{v}$,其中 n 为边界法向单位矢量, ω 为圆频率。

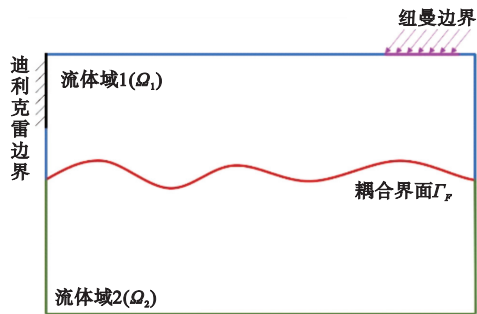


图 1 声波在多流体域中的传播
Fig. 1 Acoustic wave propagation in multi-fluids

质点振速与声压梯度之间关系为

$$\nabla p + i\rho\omega \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

式中 \mathbf{v} 为质点振速。

为了实现两种流体介质的耦合,在耦合界面上声压和质点振速连续条件必须满足

$$p_1 = p_2, v_1 = v_2 \quad (3, 4)$$

有限元法和弱形式无网格方法都建立在控制方程伽辽金弱形式的基础上。将式(1)乘上加权函数 w , 并进行分部积分,可得到相应的弱形式

$$\underbrace{\left(\frac{1}{\rho_1} \int_{\Omega_1} \nabla w \cdot \nabla p_1 \, d\Omega + \frac{1}{\rho_2} \int_{\Omega_2} \nabla w \cdot \nabla p_2 \, d\Omega \right)}_{\text{刚度矩阵K}} - \underbrace{\left(\frac{k_1^2}{\rho_1} \int_{\Omega_1} w \cdot p_1 \, d\Omega + \frac{k_2^2}{\rho_2} \int_{\Omega_2} w \cdot p_2 \, d\Omega \right)}_{\text{质量矩阵M}} -$$

$$\underbrace{\int_{\Gamma_F} w \left(\frac{\nabla p_1}{\rho_1} \cdot \mathbf{n}_{F1} + \frac{\nabla p_2}{\rho_2} \cdot \mathbf{n}_{F2} \right) d\Gamma}_{\text{质点振速连续条件}} - \underbrace{\int_{\Gamma_N} w \left(\frac{\nabla p_1}{\rho_1} \cdot \mathbf{n}_{N1} + \frac{\nabla p_2}{\rho_2} \cdot \mathbf{n}_{N2} \right) d\Gamma}_{\text{纽曼边界条件}} = 0 \quad (5)$$

式中 \mathbf{n}_{N1} 和 \mathbf{n}_{N2} 分别为流体域 1 和 2 的纽曼边界上的外法向单位矢量, \mathbf{n}_{F1} 和 \mathbf{n}_{F2} 分别为流体域 1 和 2 的耦合界面上的外法向单位矢量,且 $\mathbf{n}_{F1} + \mathbf{n}_{F2} = 0$ 。易知,通过在耦合界面上布置流体域 1 和 2 之间的共享节点,可实现声压传递,即声压连续条件(即式(3))可得到满足。

假设有限元形函数为 \mathbf{N} , 径向基形函数为 Φ , 对式(5)的质点振速连续条件进行单独分析。首先考虑有限元离散,由于有限元形函数基于单元而构造(如图2所示),界面上相同位置的节点形函数值在单元 1 和 2 中相等,可得

$$\int_{\Gamma_F} w \left(\frac{\nabla p_1}{\rho_1} \cdot \mathbf{n}_{F1} + \frac{\nabla p_2}{\rho_2} \cdot \mathbf{n}_{F2} \right) d\Gamma = \int_{\Gamma_F} \mathbf{N}^T \left(\frac{\nabla \mathbf{N} p_1}{\rho_1} \cdot \mathbf{n}_{F1} + \frac{\nabla \mathbf{N} p_2}{\rho_2} \cdot \mathbf{n}_{F2} \right) d\Gamma = \int_{\Gamma_F} \mathbf{N}^T (v_2 - v_1) d\Gamma = 0 \quad (6)$$

式中 p_1 和 p_2 分别为流体域 1 和 2 中相关节点上的声压值。由式(6)为零可知,在有限元模型中质点振速连续条件可自然满足。

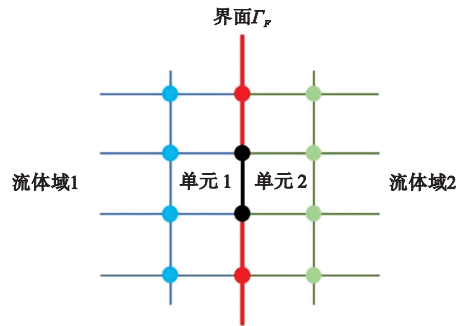


图 2 声波在多流体域中的传播
Fig. 2 Acoustic wave propagation in multi-fluids

考虑无网格离散(如图3所示),无网格形函数基于积分点支撑域内的节点而构造,在问题域内不连续,因而界面上相同位置的节点形函数值在背景网格 1 和 2 中不相等,可得

$$\int_{\Gamma_F} w \left(\frac{\nabla p_1}{\rho_1} \cdot \mathbf{n}_{F1} + \frac{\nabla p_2}{\rho_2} \cdot \mathbf{n}_{F2} \right) d\Gamma = \int_{\Gamma_F} (\Phi^1)^T \frac{\nabla \Phi^1 p_1}{\rho_1} \cdot \mathbf{n}_{F1} + (\Phi^2)^T \frac{\nabla \Phi^2 p_2}{\rho_2} \cdot \mathbf{n}_{F2} d\Gamma = \int_{\Gamma_F} (\Phi^2)^T v_2 - (\Phi^1)^T v_1 d\Gamma \neq 0 \quad (7)$$

式中 Φ^1 和 Φ^2 分别为流体域 1 和 2 在界面上的节

点形函数,在相同节点处并不相等。因此在无网格模型中,质点振速连续条件无法自然满足。此外,流体域1中插值节点的选取不能跨越界面去选择流体域2中的节点,反之亦然。上述规则称为多介质问题中插值节点选取的非侵入规则^[15]。

2.2 罚函数法施加质点振速连续条件

为了使质点振速连续条件能在无网格模型中得到满足,本文提出运用罚函数法将该条件强制代入式(5),替代原有质点振速连续条件,可得到调整后的弱形式

$$\begin{aligned} & \underbrace{\left(\frac{1}{\rho_1} \int_{\Omega_1} \nabla \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla p_1 \, d\Omega + \frac{1}{\rho_2} \int_{\Omega_2} \nabla \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla p_2 \, d\Omega \right)}_{\text{刚度矩阵}\mathbf{K}} - \underbrace{\left(\frac{k_1^2}{\rho_1} \int_{\Omega_1} \boldsymbol{\omega} \cdot p_1 \, d\Omega + \frac{k_2^2}{\rho_2} \int_{\Omega_2} \boldsymbol{\omega} \cdot p_2 \, d\Omega \right)}_{\text{质量矩阵}\mathbf{M}} + \\ & \delta \left(\int_{\Gamma_F} \frac{1}{2} \left(\frac{\nabla p_1 \cdot \mathbf{n}_{F1}}{\rho_1} + \frac{\nabla p_2 \cdot \mathbf{n}_{F2}}{\rho_2} \right) \alpha \left(\frac{\nabla p_1 \cdot \mathbf{n}_{F1}}{\rho_1} + \frac{\nabla p_2 \cdot \mathbf{n}_{F2}}{\rho_2} \right) d\Gamma \right) - \quad (8) \\ & \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{\omega} \left(\frac{\nabla p_1 \cdot \mathbf{n}_{N1}}{\rho_1} + \frac{\nabla p_2 \cdot \mathbf{n}_{N2}}{\rho_2} \right) d\Gamma = 0 \end{aligned}$$

罚函数法施加声质点速度连续条件
纽曼边界条件

式中 $\delta(\cdot)$ 为变分算子, α 为罚系数。基于式(8),代入无网格形函数进行离散后,质点振速连续条件能在耦合界面上得到强制满足。

式(8)可简化为

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_\alpha - \mathbf{M})\mathbf{p} = \mathbf{F} \quad (9)$$

式中 \mathbf{K} 为系统刚度矩阵, \mathbf{K}_α 为与罚函数法相关的附加刚度矩阵, \mathbf{M} 为系统质量矩阵, \mathbf{F} 表示纽曼边界条件。

相比于拉格朗日乘子法和构造特殊形函数法等处理手段,使用罚函数法的优势在于无需引入额外的自由度,在计算成本上具有优势,但罚系数的值需要合理选取,依赖于数值试验和个人经验。罚系数值不能过大,以避免出现数值不稳定现象;罚系数值也不能太小,以保证连续条件能有效施加。参见文献[17],本文罚系数取为 $\alpha = 1e6 \times \max(\mathbf{K}_{ij})$, $\max(\mathbf{K}_{ij})$ 为系统刚度矩阵中最大的元素。

3 弱形式无网格法的基本构造

3.1 基本概念

无网格法的最大优势即是可避免前处理中繁杂的网格划分过程,但使用弱形式无网格法并不是不需要网格^[17]。由于使用了控制方程的积分弱形式,弱形式无网格法需使用一套背景积分网格对式(8)进行数值积分,如图4所示的虚线围成的网格。图4中, h 为节点平均距离,不同颜色的方框表示不同积分点的支撑域,支撑域中的节点用于插值生成形函数, r_{int} 为支撑域的尺度。背景积分网格与

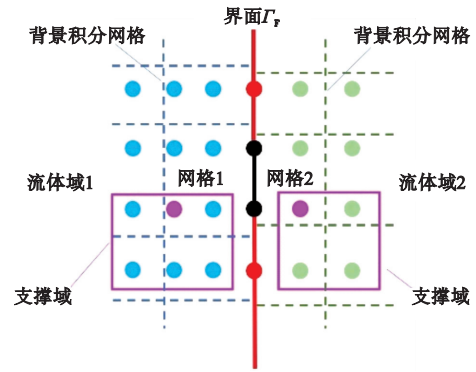


图3 无网格离散示意

Fig. 3 Discretization of meshfree method

有限元网格的最大区别是节点无须与网格顶点绑定,选取插值节点也不受网格边线的限制。因此,弱形式无网格法具有极大的灵活性,其计算精度不易受畸形网格或节点分布的影响。

如图4所示(叉形符号表示积分点),传统插值节点选取方案是依据背景网格积分点的支撑域来选取多套插值节点(圆形符号表示节点),每个积分点处的插值节点不同,导致假定声压函数在背景网格内不连续,易产生数值积分误差。因此,本文在弱形式无网格法的应用中,提出了一种新型的插值节点选取方案^[18]。该方案基于背景网格中心点的支撑域来选取一套插值节点,单个背景网格中所有积分点处使用的插值节点相同。这保证了假定声压函数在背景网格内的连续性,降低了积分误差,提高了计算精度,并且简化了插值节点选取过程。

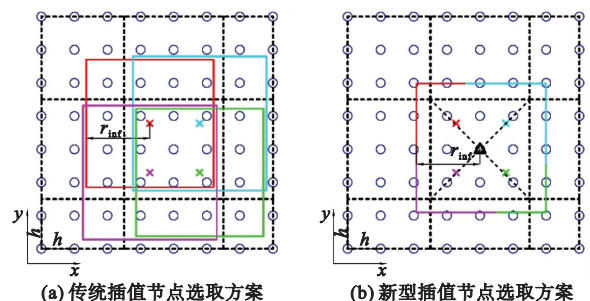


图4 背景积分网格和插值节点选取方案

Fig. 4 Background integration cell and the interpolation node selection scheme

3.2 径向基形函数

本文选用径向基形函数作为插值形函数。之

前推导得到的弱形式同样适用于其他类型的无网格形函数,如最小二乘形函数、再生核形函数等。假设参考点处的假定声压函数可表示为

$$p^h(\mathbf{x}) = \mathbf{R}(\mathbf{x})\mathbf{a} + \mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{b} = \sum_{i=1}^m R_i(\mathbf{x})a_i + \sum_{j=1}^3 P_j(\mathbf{x})b_j \quad (10)$$

式中 m 为参考点支撑域内的节点数量, $R_i(\mathbf{x}) = [r^2 + (\alpha_c h)^2]^q$ 为径向基形函数,其中 $r = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}$ 为参考点到第 i 个节点的距离, $\alpha_c = 2$ 和 $q = 1.03$ 为可调节的参数^[16]; $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = [1 \ x \ y]^T$ 为补充的线性多项式基函数,以满足分片测试; a_i 和 b_j 为对应基函数的待定系数。

将支撑域内的所有节点参数代入式(10),可得

$$\mathbf{p} = \mathbf{R}_M \mathbf{a} + \mathbf{P}_M \mathbf{b} \quad (11)$$

式中

$$\mathbf{R}_M = \begin{bmatrix} R_1(r_1) & R_2(r_1) & \cdots & R_m(r_1) \\ R_1(r_2) & R_2(r_2) & \cdots & R_m(r_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1(r_m) & R_2(r_m) & \cdots & R_m(r_m) \end{bmatrix}_{(m \times m)} \quad (12)$$

$$\mathbf{P}_M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix}_{(m \times 3)} \quad (13)$$

为了保证解的唯一性,须额外增加一个约束条件,其表达式为

$$\mathbf{P}_M^T \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (14)$$

联立式(10,11,14),可得

$$p^h(\mathbf{x}) = [\mathbf{R}(\mathbf{x}) \ \mathbf{P}(\mathbf{x})] \begin{bmatrix} \mathbf{R}_M & \mathbf{P}_M \\ \mathbf{P}_M^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}) \ \mathbf{M}(\mathbf{x})] \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (15)$$

式中 $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x})$ 为径向基形函数, $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ 为多项式基形函数,不参与系统矩阵构成。从式(10,15)可知,本文使用的径向基形函数可产出任意阶的连续导数,因此可在中高频下获取更光滑的波动数值解。这是径向点插值法求解声学问题的一大优势,是其高精度的来源。

4 数值算例

4.1 气液共存的管道声传播

如图5所示,假设管道内部分充空气、部分充水,其最左边有初始声压 $p_0 = 1 \text{ Pa}$,其余边为刚性

壁面。管最右端布置了吸收声波的完美匹配层 PML(Perfectly matched layer),用于吸收外传声波。此处使用的 PML 厚度为 5 m,吸收函数为二次多项式函数,节点层数至少为 7 层,以保证在考虑频段内具备合适的声吸收效果^[19]。空气的密度和声速分别为 $\rho_1 = 1.225 \text{ kg/m}^3$ 和 $c_1 = 340 \text{ m/s}$,水的密度和声速分别为 $\rho_2 = 1000 \text{ kg/m}^3$ 和 $c_2 = 1500 \text{ m/s}$ 。将问题域离散为 15435 个均匀分布的节点,平均节点间距 $h = 0.1 \text{ m}$,分别运用双线性 FEM 和 RPIM 无网格法计算管道内的声传播。为了验证 RPIM 计算结果的准确性,使用商业软件 COMSOL 的结果作为参考解(使用拉格朗日二次单元,5993481 个均匀分布的节点)。

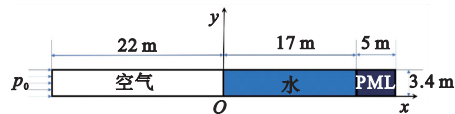


图5 气液共存的管道尺寸

Fig.5 Geometry of the tube filled with air and water

当计算频率为 100 Hz, 250 Hz 和 400 Hz 时,分析管道内的声传播,将管道纵向中心线上的声压实部绘制于图6。可知 RPIM 声压解在不同流体域的耦合界面处(即 $x = 0 \text{ m}$)是连续的,表明弱形式(8)产出的数值结果能满足声压连续条件。此外,随着计算频率的增高,双线性 FEM 解在幅值和相位上逐渐偏离了参考解,而 RPIM 解相对保持了与参考解的一致性。这表明在较高计算频率下,RPIM 拥有更高的计算精度。

运用 RPIM 获取不同流体介质在耦合界面中点处(0, 1.7)的质点振速。从图7可知,在不同流体域的耦合界面处,RPIM 质点振速解是连续的,表明弱形式(8)产出的数值结果能满足质点振速连续条件,符合声传播的物理规律,验证了相关公式推导的正确性。

接下来分析 RPIM 和双线性 FEM 在声学计算中的收敛性质,选用全局 L^1 误差算子对声压数值解的误差进行评判。如图8所示,横坐标为使用的节点数,纵坐标为声压数值解与参考解之间的相对误差。可知在使用相同节点数时,RPIM 的数值误差小于 FEM,表明 RPIM 拥有更佳的误差控制能力。并且随着节点数的增加,RPIM 的数值误差逐渐减少,收敛于参考解。

最后分析 RPIM 和 FEM 在声学计算中的计算效率。如图9所示,横轴为运用直接求解器求解

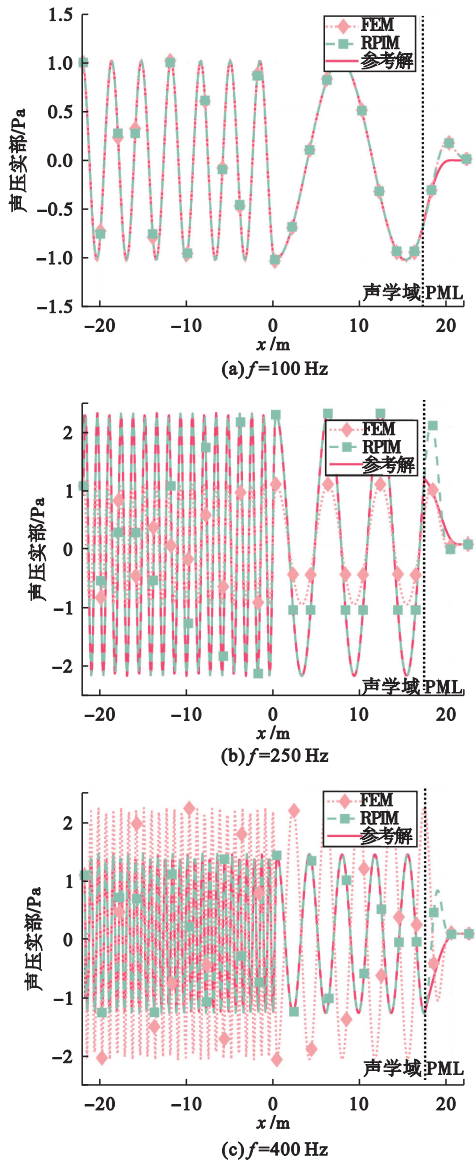


图6 不同频率下管道纵向中心线上的声压实部
Fig. 6 Real parts of acoustic pressure along the center line of the tube under the different frequencies

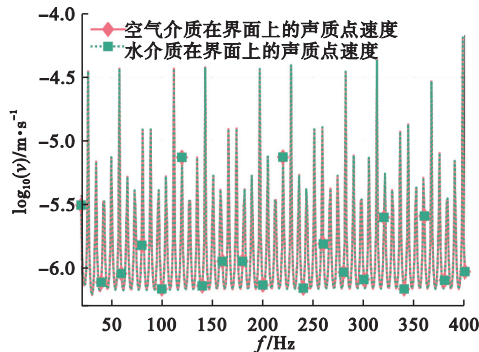


图7 一系列频率下不同流体介质在耦合界面上的质点振速
Fig. 7 Acoustic particle velocities upon the interface of air and water for a series of frequencies

线性系统方程组消耗的 CPU 计算时间(重复计算 50 次后取平均值),纵轴为声压数值解与参考解之间的相对误差,所用的多组节点数与上述收敛性质

对比中的多组节点数相同。可知 RPIM 的计算效率曲线位于 FEM 的计算效率曲线之下,表明当计算时间相同时,RPIM 可求出相对误差更低的数值解,其计算效率相对 FEM 更高。

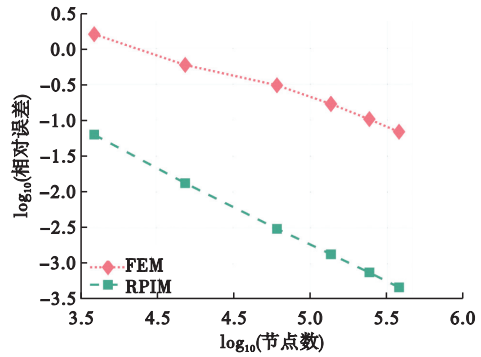


图8 $f=250$ Hz 时 RPIM 和 FEM 数值解的收敛性质
Fig. 8 Convergence property of the numerical solutions of RPIM and FEM at $f=250$ Hz

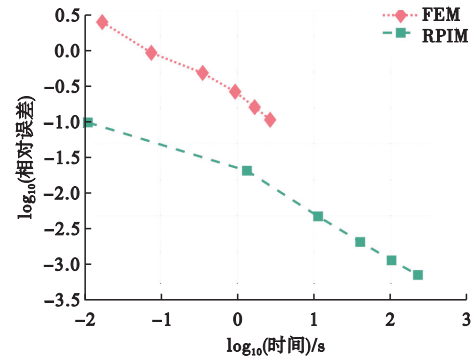


图9 $f=250$ Hz 时 RPIM 和 FEM 的计算效率对比
Fig. 9 Comparison of the computational efficiency of RPIM and FEM at $f=250$ Hz

4.2 存在气泡的管道声传播

如图 10 所示,充水管内存在许多圆形气泡,其最左边有初始声压 $p_0 = 1$ Pa,其余边假设为刚性壁面,管最右端布置了吸收声波的完美匹配层。此处使用的 PML 厚度为 0.1 m,吸收函数为二次多项式函数,节点层数至少为 7 层,以保证在考虑频段内具备合适的声吸收效果^[19]。空气的密度和声速分别为 $\rho_1 = 1.225 \text{ kg/m}^3$ 和 $c_1 = 340 \text{ m/s}$,水的密度和声速分别为 $\rho_2 = 1000 \text{ kg/m}^3$ 和 $c_2 = 1500 \text{ m/s}$ 。将问题域离散为 9215 个节点,平均节点间距为 $h = 0.005 \text{ m}$,分别运用 FEM 和 RPIM

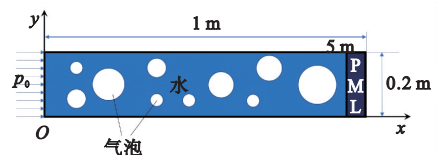


图10 存在气泡的管道尺寸
Fig. 10 Tube filled with air bubbles

计算管道内的声传播。为了验证 RPIM 方法的计算结果,使用 98287 个节点离散问题域,并将此套节点的 FEM 解作为参考解。

当计算频率为 21500 Hz 和 39500 Hz 时,将 FEM 和 RPIM 计算得到的声压云图绘制于图 11 和图 12 上方位置,在下方位置绘制管道纵向中心线上的声压实部,并与参考解对比。可知随着计算频率的增高(21500 Hz 和 39500 Hz),FEM 解在幅值和相位上都偏离了参考解。作为对比,在各个计算频率下,RPIM 解总体上与参考解相符,表明当使用相同节点分布时,在较高的计算频率下,RPIM 解的精度远高于 FEM 解的精度。因此,相对于 FEM,RPIM 对计算频率变化的敏感度更低。

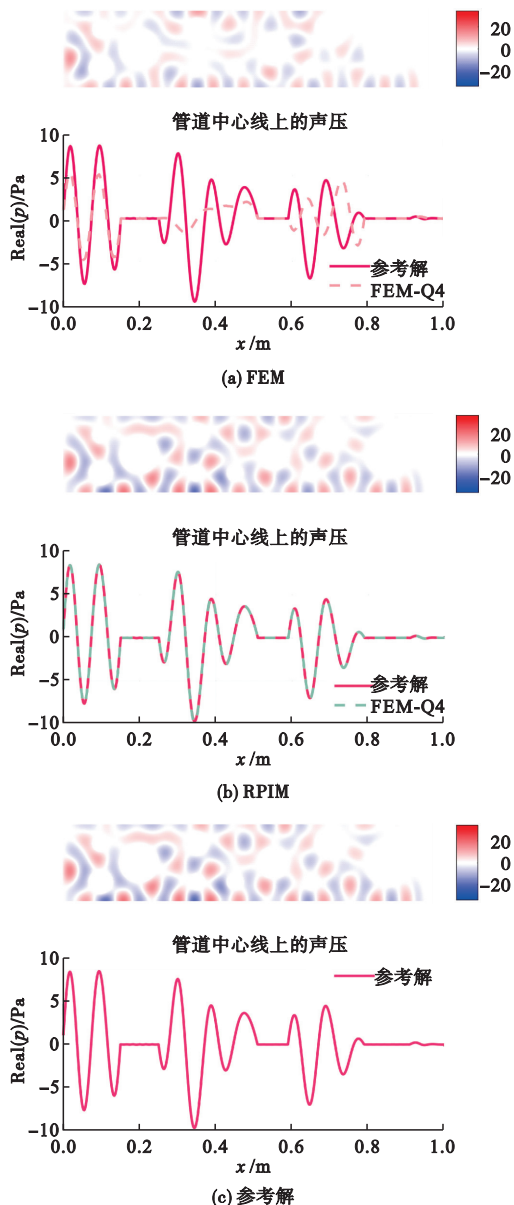


图 11 $f=21500$ Hz 时不同数值方法计算得到的管道内声压分布
Fig. 11 Acoustic pressure obtained by the different numerical methods at $f=21500$ Hz

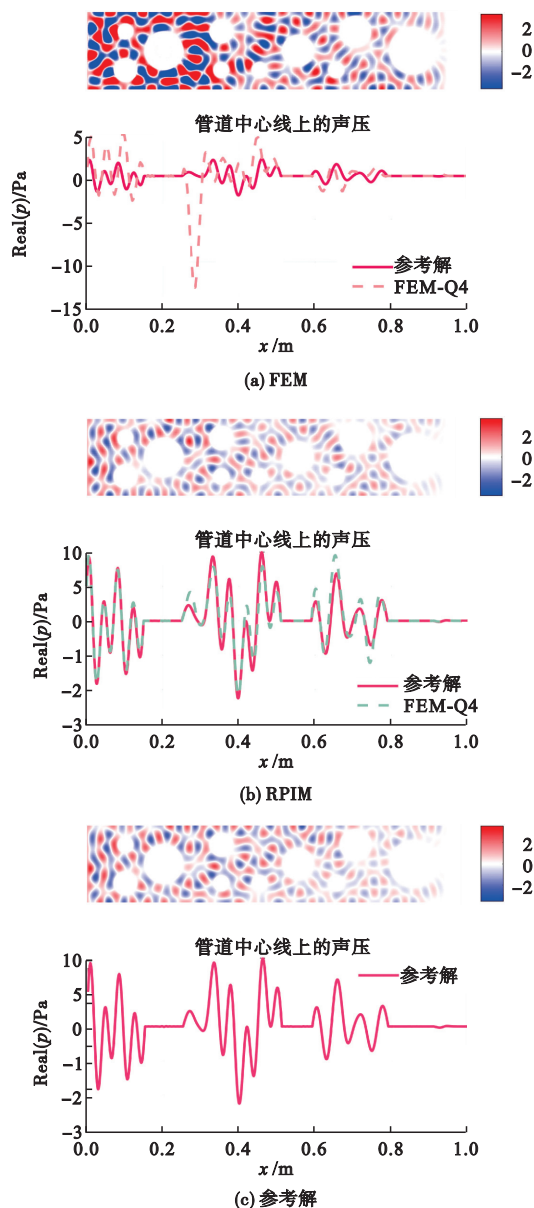


图 12 $f=39500$ Hz 时不同数值方法计算得到的管道内声压分布
Fig. 12 Acoustic pressure obtained by the different numerical methods at $f=39500$ Hz

4.3 平面波入射下海底掩埋物的声散射

如图 13 所示,考虑平面波照射下部分掩埋于海底的刚性圆柱壳声散射。整个问题域的尺寸为 $50\text{ m} \times 50\text{ m}$,海水和泥沙各占一半的区域,外部围绕着完美匹配层,圆柱壳直径为 2 m ,埋深为 1 m 。此处使用的 PML 厚度为 2.5 m ,吸收函数为二次多项式函数,节点层数至少为 7 层,以保证在考虑频段内具备合适的声吸收效果^[19]。本文使用了流体介质假设来模拟海底泥沙,并通过声波衰减系数模拟泥沙对声波的衰减效应。通常来说,泥沙中的剪切波速(横波)远小于压缩波速(纵波),其性质类似于流体介质,所以该假设在很多情况下是合理的^[5]。水的密度和声速分别为 $\rho_1=1000\text{ kg/m}^3$ 和

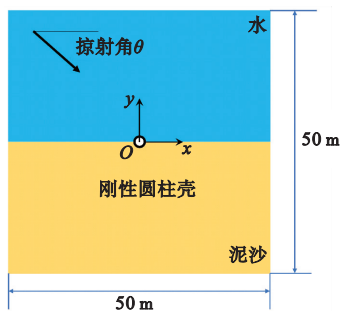
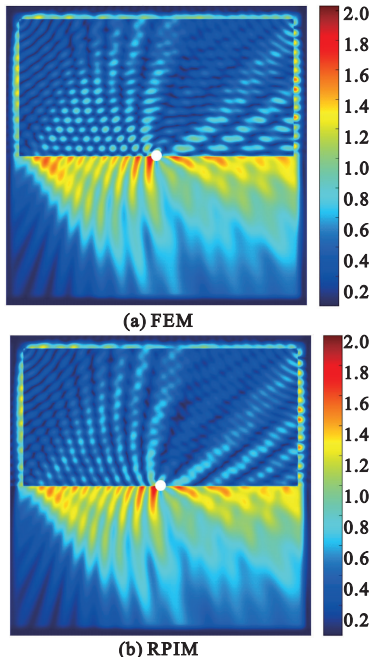
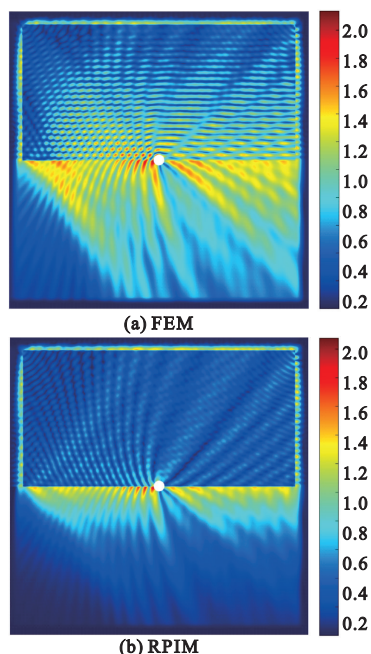


图 13 部分掩埋于海底的刚性圆柱壳

Fig. 13 Rigid cylinder shell partially buried in sand

图 14 $f=500$ Hz 时问题域内的混叠声压场Fig. 14 Absolute values of scattering pressure and transmission pressure fields at $f=500$ Hz图 15 $f=800$ Hz 时问题域内的混叠声压场Fig. 15 Absolute values of scattering pressure and transmission pressure fields at $f=800$ Hz

$c_1 = 1500$ m/s, 泥沙的密度和声速分别为 $\rho_2 = 1800$ kg/m³ 和 $c_2 = 1600$ m/s, 泥沙对声波的衰减系数为 $\alpha = 0.5$ dB/ λ ^[5,16]。将问题域离散为 80192 个节点, 平均节点间距 $h = 0.195$ m, 分别运用 FEM 和 RPIM 计算平面波照射下刚性壳的声散射。

当入射单位平面波的掠射角为 60° 时, 计算图 13 所示区域内的声压分布, 并将总声压场减去入射背景声压场以得到海底界面和掩埋物造成的混叠声压场。由图 14 和图 15 可知, 当计算频率为 500 Hz 时, FEM 解与 RPIM 解总体相符; 但当计算频率提高至 800 Hz, FEM 解表现出明显的数值色散现象, 其根源在于数值波速大于真实波速, 导致计算波数小于真实波数。由于泥沙对声波的衰减程度应随频率增加而增大, 因此泥沙区域中的声穿透距离应该随频率的增高而逐渐减小。然而由图可知, 上述规律对 FEM 解不成立, 800 Hz 时泥沙区域中的 FEM 声压解反而穿透至更深的位置, 出现了反常的物理现象, 这表明实际计算中的计算波数小于真实波数, 符合之前对 FEM 解数值色散现象的解释。

5 结 论

本文运用罚函数法重构了多流体耦合所需的质点振速连续条件, 提出了适用于弱形式无网格方法的二维多流体域声传播计算伽辽金弱形式, 拓展了无网格方法在多介质耦合声传播计算中的应用范围。基于提出的弱形式, 使用径向点插值无网格方法 (RPIM) 计算了一些声学算例。数值结果表明, RPIM 解与参考解相符, 验证了提出弱形式的可靠性。此外, 当使用相同自由度时, RPIM 解的精度更高, 表明 RPIM 可在计算内存和存储消耗上优于 FEM, 且 RPIM 的计算效率可优于 FEM。

参考文献 (References):

- [1] 张荣欣, 秦国良, 许丽娜. 管道声传播问题的一种高精度数值模拟[J]. 振动与冲击, 2010, 29(8): 115-119, 246. (ZHANG Rongxin, QIN Guoliang, XU Lina. High-accuracy numerical simulation of acoustic propagation problem in pipe[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2010, 29(8): 115-119, 246. (in Chinese))
- [2] 张培珍, 李秀坤, 王 斌, 等. 掩埋目标声散射特性及其实验[J]. 声学学报, 2018, 43(6): 934-942. (ZHANG Peizhen, LI Xiukun, WANG Bin, et al. Acoustic scattering experiments and characteristics of

- targets buried in sediment[J]. *Acta Acustica*, 2018, **43**(6):934-942. (in Chinese))
- [3] 李嘉旺,李威.水下掩埋物目标强度仿真分析[J].海洋工程装备与技术,2020,7(2):114-119. (LI Jiawang, LI Wei. Numerical simulation and analysis of target strength of underwater buried objects[J]. *Ocean Engineering Equipment and Technology*, 2020, **7**(2):114-119. (in Chinese))
- [4] 于福建,王斌,张培珍.起伏海底掩埋目标声散射特性数值仿真[J].水下无人系统学报,2018,26(6):533-536. (YU Fujian, WANG Bin, ZHANG Peizhen. Numerical simulation on acoustic scattering characteristics of targets buried in fluctuating seabed[J]. *Journal of Unmanned Undersea Systems*, 2018, **26**(6):533-536. (in Chinese))
- [5] Jensen F B, Kuperman W A, Porter M B, et al. *Computational Ocean Acoustics*[M]. New York: Springer, 2011.
- [6] Magoulès F, Zhang H Y. Three-dimensional dispersion analysis and stabilized finite element methods for acoustics[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018, **335**:563-583.
- [7] Zhou T, Chazot J D, Perrey-Debain E, et al. Partition of unity finite element method for the modelling of acoustic black hole wedges[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2020, **475**:115266.
- [8] Chai Y B, You X Y, Li W, et al. Application of the edge-based gradient smoothing technique to acoustic radiation and acoustic scattering from rigid and elastic structures in two dimensions[J]. *Computers & Structures*, 2018, **203**:43-58.
- [9] Wenterodt C, von Estorff O. Optimized meshfree methods for acoustics[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, **200**(25-28):2223-2236.
- [10] 刘风景,方春慧.三维全局弱式无网格方法计算膨胀腔消声器声学模态[J].噪声与振动控制,2019,39(4):239-243. (LIU Fengjing, FANG Chunhui. Acoustic mode analysis of expansion chamber silencers by using 3D global weak-form mesh-free method[J]. *Noise and Vibration Control*, 2019, **39**(4):239-243. (in Chinese))
- [11] 赵辉,左继强,刘成洋,等.全局弱式无网格方法求解消声器横向模态[J].噪声与振动控制,2018,38(3):36-41. (ZHAO Hui, ZUO Jiqiang, LIU Chengyang, et al. Transverse mode analysis of silencers by using global weak-form mesh-free method[J]. *Noise and Vibration Control*, 2018, **38**(3):36-41. (in Chinese))
- [12] 桂强,孙磊,游翔宇,等.二维水下声辐射问题的改进径向基点插值法研究[J].计算力学学报,2024,41(2):344-351. (GUI Qiang, SUN Lei, YOU Xiangyu, et al. A modified radial point interpolation method for the analysis of underwater acoustic radiation problems[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2024, **41**(2):344-351. (in Chinese))
- [13] 吴绍维,柯磊,韩国文.一种预报水下声辐射的无网格弱式径向点插值方法[J].振动与冲击,2023,42(4):145-155. (WU Shaowei, KE Lei, HAN Guowen. A meshless weak radial point interpolation method for predicting underwater acoustic radiation[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2023, **42**(4):145-155. (in Chinese))
- [14] Chai Y B, Bathe K J. Transient wave propagation in inhomogeneous media with enriched overlapping triangular elements[J]. *Computers & Structures*, 2020, **237**:106273.
- [15] Krongauz Y, Belytschko T. EFG approximation with discontinuous derivatives[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1998, **41**(7):1215-1233.
- [16] Zampolli M, Tesi A, Jensen F B, et al. A computationally efficient finite element model with perfectly matched layers applied to scattering from axially symmetric objects[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2007, **122**(3):1472.
- [17] Liu G R. *Meshfree Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*[M]. CRC press, 2009.
- [18] You X Y, Gui Q, Zhang Q F, et al. Meshfree simulations of acoustic problems by a radial point interpolation method[J]. *Ocean Engineering*, 2020, **218**:108202.
- [19] Heikkola E, Rossi T, Toivanen J. Fast direct solution of the Helmholtz equation with a perfectly matched layer or an absorbing boundary condition[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, **57**(14):2007-2025.

A weak-form meshfree method for two-dimensional acoustic wave propagation in multi-fluids

YOU Xiangyu^{*1,2}, YIN Jiancheng¹, YAO Yu^{1,2}, LI Wei³

(1. School of Hydraulic and Ocean Engineering, Changsha University of Science & Technology, Changsha 410114, China; 2. Key Laboratory of Water-Sediment Sciences and Water Disaster Prevention of Hunan Province, Changsha 410114, China; 3. School of Naval Architecture and Ocean Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: Research on acoustic propagation in multiple fluids has important application values in naval architecture and ocean engineering, such as sound propagation in pipelines filled with water and air, and the detection of buried objects. There are two difficulties in solving such problems with the use of the classical finite element method: one is the serious numerical dispersion error in the finite element solutions under medium and high wave numbers; the other is the need to use refined mesh grids to discretize the fluids near the coupling interface. These difficulties lead to a large computational cost for the finite element method, and the manual intervention to generate refined grids. Compared with the finite element method, the weak-form meshfree method does not require traditional grids, and the dispersion error effect in its solution is much weaker, ensuring good computational accuracy and efficiency. However, the meshfree shape functions are usually discontinuous in the problem domain, resulting in the inability of the continuity condition of the acoustic particle velocity to be naturally satisfied on the interface. Therefore, this paper uses the penalty function method to reconstruct the continuity condition of the acoustic particle velocity on the interface, and proposes a Galerkin weak form suitable for meshfree methods for sound propagation in multiple fluids. Numerical analysis shows that the meshfree solutions is consistent with the reference solutions, and the computational accuracy and efficiency of the meshfree method can be higher than the finite element solutions.

Key words: acoustic propagation in multi-fluids; finite element method; weak-form meshfree method; penalty function method; computational acoustics

(上接第 743 页)

Efficient and high fidelity modeling method for battery pack collision with equivalent contact

NI Yang, LI Gang^{*}, ZENG Yan

(State Key Laboratory of Structural Analysis, Optimization and CAE Software for Industrial Equipment, Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: The power battery pack of an electric vehicle is a complex system, whose efficient and high fidelity modeling is an urgent need for solving collision problems. This paper firstly proposes a hybrid reduced order battery pack model, with fine modeling in the central region and centralized mass in other parts through a simple connection contact. Compared with the refined full model, the maximum stress error is relatively small, and the computational efficiency is improved by about 3.5 times. Then, to consider the effect of the boundary further, a centroid module structural model with equivalent contact is proposed. Compared with the hybrid reduced order model, the collision displacement and the maximum stress of the centroid module structure model are much closer to those of the fine full model. Finally, an impact response analysis is conducted on the centroid module structural model and the fine full model, by comparing the behaviors of the collision center point and the impact object. It is found that both models have the similar trend in the response curves with small errors, which verifies the feasibility of the proposed model.

Key words: power battery pack; hybrid reduced order simplified model; centroid module structural model; bottom collision