

DOI: 10.7511/jslx20240202002

一种改进的功能函数概率密度估计的等效期望法

邹长星, 翁叶耀, 张玄一, 赵衍刚*

(北京工业大学 城市建设学部, 北京 100124)

摘要: 功能函数的概率分布计算是不确定性量化及可靠度设计中的核心问题, 最近提出的等效期望法是解决该问题的有效途径。本文提出了一种改进的等效期望法。针对既有等效期望法中的辅助变量取值对其概率分布有重要影响的问题, 提出了辅助随机变量标准差系数的合理计算公式, 得到了更为精确的辅助函数的概率分布。同时, 针对既有等效期望法中由两个辅助函数的概率分布计算功能函数的概率分布时存在的计算精度问题, 本文仅用一个辅助函数推导了功能函数概率分布的计算公式, 提出了一种由辅助函数到功能函数的概率分布精确理论变换, 使得功能函数概率分布的计算更为精确。最后通过三个算例验证了该方法的有效性和准确性。结果表明, 该方法适用于高维非线性或隐式功能函数的概率分布近似计算。

关键词: 结构安全; 结构可靠度; 功能函数; 随机变量; 概率密度函数

中图分类号: O213.2

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2025)05-0846-06

1 引言

功能函数或模型输出的概率分布的计算是正向不确定性量化^[1]中的核心问题。如在基于可靠性的设计优化^[2]中, 为了降低计算成本, 需要计算功能函数的分位数, 即功能函数的累积分布函数(CDF)的反函数。在敏感性分析^[3]中, 使用 Borgonovo 指数评估敏感性需要模型输出的概率密度函数(PDF)。在实际复杂结构系统的设计中, 工程师希望确定对应于不同失效概率的结构阻力^[4]。此外, 失效概率仅显示功能函数小于或等于零的统计信息。而概率分布作为功能函数统计信息的完备表达为结构安全评估提供了比失效概率更有用的信息。因此, 计算功能函数的概率分布非常重要。

基于概率守恒原理, 文献[5, 6]开发了概率密度演化方法(PDEM)来计算功能函数的 PDF。在该方法中, 需要使用有限差分法求解广义概率密度演化方程, 计算难度和计算工作量均较大。概率变换方法(PTM)提供了实现该过程的替代方法。根据随机变量变换定理, Falsone 等^[7]提出了概率变换方法(PTM), 以获得线性结构响应的 PDF。经

过众多学者的研究, 该方法扩展到解决具有随机参数和非高斯激励的问题。由于利用了线性系统的特征函数和 PDF 之间的关系, PTM 仅适用于线性和特殊非线性系统。受 PDEM 和 PTM 的启发, Chen 等^[8]提出了一种直接概率积分法(DPIM)来计算功能函数的概率分布, 在这种方法中, 功能函数的 PDF 表示为与 Dirac delta 函数相关的概率密度积分, 并采用高斯函数对 Dirac delta 函数进行平滑。然而, 高斯函数中平滑参数的选择对 DPIM 结果有显著影响^[9], 但是目前对最优平滑参数的研究还不够深入。

Cai 等^[10]提出了一种计算功能函数概率分布的等效期望法(EEM)。相比于矩方法, 等效期望法无需计算高阶矩, 避免了计算高阶矩不准确的问题; 相比于概率密度演化方法, 等效期望法无需求解复杂的广义概率密度演化偏微分方程。在该方法中, 当功能函数关于某一随机变量的单调反函数(MIF)可以得到时, 概率分布可以精确地表示为与该变量和 MIF 的分布有关的期望值。而如果这样的 MIF 不存在或不容易获得时, 则通过简单地添加辅助随机变量构造辅助函数来获得 MIF, 并将

收稿日期: 2024-02-02; 修改稿收到日期: 2024-04-21.

基金项目: 国家自然科学基金(52278135)资助项目.

作者简介: 赵衍刚* (1963-), 男, 博士, 教授(E-mail: zhao@kanagawa-u. ac. jp).

引用本文: 邹长星, 翁叶耀, 张玄一, 等. 一种改进的功能函数概率密度估计的等效期望法[J]. 计算力学学报, 2025, 42(5): 846-851, 864.
ZOU Changxing, WENG Yeyao, ZHANG Xuanyi, et al. An improved equivalent expectation method for evaluate probability density of performance functions[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2025, 42(5): 846-851, 864.

功能函数的概率分布表示为与辅助函数分布相关的期望,最后采用 Sobol 序列和点估计方法确定期望值。经研究发现,辅助随机变量标准差的选取对辅助函数概率分布的准确性有较大影响,但该方法并没有给出辅助随机变量标准差的合理取值,同时,该方法构造了两个辅助函数,并把功能函数的 PDF 表示为与辅助函数相关的期望,但在计算过程中采用的变换不是精准的变换,存在较大的计算误差,这限制该方法的计算精度。

因此,本文的主要目的就是在等效期望法(EEM)的基础上,通过对辅助随机变量的进一步研究来确定一个合适的辅助变量标准差,使得计算的辅助函数的概率分布更为精准;同时,仅使用一个辅助函数进行功能函数 PDF 计算公式的推导,而计算过程采用的变换是一个精确的变换,从而提高所提方法的计算精度。

2 等效期望估计的基本原理

一般情况下,功能函数 $Z=G(\mathbf{X})$ 的 CDF 可定义为

$$F_Z(z) = \int_{Z=G(\mathbf{X}) \leq z} \dots \int f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1)$$

其中 $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ 为随机变量构成的向量 $\mathbf{X}=\{X_1, X_2, \dots, X_n\}^T$ 的联合概率密度函数。当随机变量 X_i 与其他输入随机变量 X_j 相关时,可以首先执行正态变换,如 Rosenblatt 变换^[11]、Nataf 变换^[12] 或高阶矩变换^[13,14]。

如果功能函数 $Z=G(\mathbf{X})$ 中存在一个随机变量 X_i ,使得该随机变量对应的反函数的偏导数 $\partial G_i^{-1}(\mathbf{X}_{-i}, Z)/\partial Z > 0$,即功能函数中存在单调反函数(MIF),则功能函数的 CDF 可表示为一个期望。

然而,工程实际中功能函数通常是复杂的、非线性的,甚至是隐式的,功能函数中不存在这样的随机变量使其对应的功能函数的反函数单调,即使存在这样的随机变量,功能函数的单调反函数的计算通常是很困难的。等效期望法中通过添加正态的辅助随机变量 Θ 构造了两个辅助函数,构造的辅助函数为

$$H = \eta(\mathbf{X}, \Theta) = G(\mathbf{X}) + \Theta = Z + \Theta \quad (2)$$

$$K = \kappa(\mathbf{X}, H) = G(\mathbf{X}) - \Theta = Z - \Theta \quad (3)$$

而辅助函数的 MIF 是比较容易获得的, Θ 对应的反函数分别为 $\Theta = H - G(\mathbf{X})$ 和 $\Theta = G(\mathbf{X}) - K$,其单调性可以轻松确定:

$$\partial[H - G(\mathbf{X})]/\partial H = 1 > 0 \quad (4)$$

$$\partial[G(\mathbf{X}) - K]/\partial K = -1 < 0 \quad (5)$$

根据式(4,5),辅助函数 H 和 K 的 PDF 和 CDF 可确定为

$$F_H(h) = E_{\mathbf{X}}\{F_{\Theta}[h - G(\mathbf{X})]\} \quad (6)$$

$$f_H(h) = E_{\mathbf{X}}\{f_{\Theta}[h - G(\mathbf{X})]\} \quad (7)$$

$$F_K(k) = 1 - E_{\mathbf{X}}\{F_{\Theta}[G(\mathbf{X}) - k]\} \quad (8)$$

$$f_K(k) = E_{\mathbf{X}}\{f_{\Theta}[G(\mathbf{X}) - k]\} \quad (9)$$

其中 $F_{\Theta}(\cdot)$ 和 $f_{\Theta}(\cdot)$ 分别为 Θ 的 CDF 和 PDF,假设 Θ 是一个正态分布的随机变量,平均值 $\mu_{\Theta} = 0$,标准偏差 $\sigma_{\Theta} = \sigma_z$,其中 σ_z 是功能函数的标准差。以上等式采用 Sobol 序列来计算期望值,通过计算发现,简单选取 $\sigma_{\Theta} = \sigma_z$ 计算得到的结果并不精准。

根据式(2,3),功能函数 $Z=(H+K)/2$,功能函数 Z 的 PDF 和 CDF 可表示为一个由辅助函数 H 和 K 的联合 PDF 构造的积分,推导得到的最终结果为

$$f_Z(z) = 2 \sum_{i=1}^n \omega_i f_H(2z - k_i) \cdot c[F_H(2z - k_i), \Phi(u_i)] \quad (10)$$

其中 u_i 和 ω_i 分别是 Gauss-Hermite 积分的横坐标和权重, $c(\cdot, \cdot)$ 是一个由 H 和 K 的 CDF 拟合的二元 copula 密度函数, k_i 由变换 $F_K(k_i) = \Phi(u_i)$ 计算得到, Φ 为标准正态分布函数。需要特别说明的是,该变换需要使用式(8)进行计算,但解该方程存在一定的计算困难;另一种方法是根据矩原理,利用辅助函数 K 的前几阶矩的信息构造一个立方正态分布后获得 k_i ,但利用矩方法时高阶矩的计算并不是精确的,且存在一定的范围限制。同时,不管采用何种方法, $F_K(k_i)$ 的计算本身就不是准确的,所以,运用变换 $F_K(k_i) = \Phi(u_i)$ 计算得到的 k_i 的计算结果存在比较大的误差。

3 改进的等效期望法

3.1 辅助随机变量标准差系数的确定

利用 Sobol 序列进行点估计,可以确定 H 的 PDF 和 CDF 为

$$\hat{f}_H(h) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_{\Theta}[h - G(\mathbf{x}_i)] \quad (11)$$

$$\hat{F}_H(h) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_{\Theta}[h - G(\mathbf{x}_i)] \quad (12)$$

式中 N 是采用 Sobol 序列点集的个数, \mathbf{x}_i 为由 Sobol 序列产生的样本点, $G(\mathbf{x}_i)$ 为样本点代入功能函数后计算所得的功能函数值,如果涉及有限元分析则为结构响应。

在等效期望估计方法的研究中,为简单起见,辅助随机变量 $\Theta \sim N(0, \sigma_z)$,然而经过对辅助函数

CDF尾部的计算发现,辅助随机变量标准差的选取对计算辅助函数概率分布的准确性有较大影响。根据式(6,7),辅助函数 H 的 CDF 和 PDF 的计算精度与功能函数值的分布范围有关,为提高计算精度,将辅助随机变量 Θ 的标准偏差修正为 $\sigma_\theta = k\sigma_z$,选取不同的标准差来计算 CDF,并观察其尾部拟合效果,发现标准差系数 k 与功能函数的取值范围及标准差有关,通过大量试算,得到标准差系数 k 的经验计算公式。

$$k = \frac{\max G(\mathbf{x}_i) - \min G(\mathbf{x}_i)}{3.5\sigma_z} \quad (13)$$

式中 $\max G(\mathbf{x}_i)$ 为样本点代入功能函数后计算所得的最大的功能函数值, $\min G(\mathbf{x}_i)$ 为最小的功能函数值。

3.2 功能函数概率分布计算公式的推导

根据式(2),功能函数 Z 可以表示为

$$Z = H - \Theta \quad (14)$$

值得注意的是,在式(14)中,辅助函数 H 与辅助变量 Θ 是存在相关性的,根据功能函数 Z 的 CDF 的定义,可得

$$F_Z(z) = P(H - \Theta \leq z) = \iint_{H-\Theta \leq z} f_{H,\Theta}(h,\Theta) dh d\Theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z+\Theta} f_{H,\Theta}(h,\Theta) dh d\Theta \quad (15)$$

此时,功能函数 Z 的 CDF 实际上为一个变上限积分,对该变上限函数进行求导即可得到功能函数 Z 的 PDF。

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{H,\Theta}(z + \Theta, \Theta) d\Theta \quad (16)$$

根据 Sklar 定理, H 和 Θ 的联合 PDF 可以表示为

$$f_{H,\Theta}(z + \Theta, \Theta) = f_H(z + \Theta) f_\Theta(\Theta) \cdot c[F_H(z + \Theta), F_\Theta(\Theta)] \quad (17)$$

其中 $c(\cdot, \cdot)$ 是一个由 H 和 Θ 的 CDF 拟合的二元 copula 密度函数。在这项研究中,高度稳健的 TLL 方法用于计算二元 copula 密度函数。TLL 方法的详细算法参见文献[15]。功能函数 Z 的 PDF 可重新表示为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_H(z + \Theta) f_\Theta(\Theta) \cdot c[F_H(z + \Theta), F_\Theta(\Theta)] d\Theta \quad (18)$$

注意 $f_\Theta(\Theta)$ 是一个均值为 0,标准差为 $k\sigma_z$ 的正态分布的 PDF,可以轻松地将其转换为一个权重函数 $\exp(-u^2/2)$,使其满足 Gauss-Hermite 型积分公式的使用条件,本研究采用七点 Gauss-Hermite

积分计算功能函数 Z 的 PDF:

$$f_Z(z) = f_H(z + \Theta_i) \cdot c[F_H(z + \Theta_i), \Phi(u_i)] \omega_i \quad (19)$$

其中 u_i 和 ω_i 分别是 Gauss-Hermite 积分的横坐标和权重; $F_\Theta(\Theta_i) = \Phi(u_i)$, 式中 Φ 为标准正态概率分布函数, $F_\Theta(\cdot)$ 也为一正态分布函数,该变换是一个精确的变换,对于每一个 u_i ,都有一精确的 Θ_i 与之对应。相比于等效期望法中的变换 $F_K(k_i) = \Phi(u_i)$,该变换克服了其计算困难且不精确的缺点,使得该方法能够得到一个更为精确的结果。确定 PDF 后,对 PDF 进行积分即可得到功能函数的 CDF:

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^z f_Z(t) dt \quad (20)$$

4 数值算例与研究

4.1 算例 1 强非线性功能函数

为了讨论提出方法在计算强非线性功能函数概率分布时的适用性,本算例研究了一个受白噪声激励的两自由度系统,如图 1 所示。

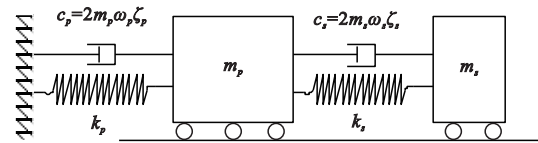


图 1 两自由度系统

Fig. 1 Two degree-of-freedom system

表 1 算例 1 随机变量的统计信息

Tab. 1 Probabilistic information of random variables for Example 1

| 随机变量 | 物理意义 | 概率分布 | 均值 | 变异系数 |
|-----------|--------|------|------|------|
| m_p | 主质量 | 对数正态 | 1 | 0.1 |
| m_s | 从质量 | 对数正态 | 0.01 | 0.1 |
| k_p | 主刚度 | 对数正态 | 1 | 0.2 |
| k_s | 次刚度 | 对数正态 | 0.01 | 0.2 |
| ζ_p | 主阻尼比 | 对数正态 | 0.05 | 0.4 |
| ζ_s | 次阻尼比 | 对数正态 | 0.02 | 0.5 |
| F_s | 次弹簧承载力 | 对数正态 | 20 | 0.1 |
| S_0 | 白噪声的强度 | 对数正态 | 100 | 0.1 |

副弹簧失效可靠性的功能函数可表示为

$$Z = G(\mathbf{X}) =$$

$$F_s - 3k_s \cdot \sqrt{\frac{\pi S_0}{4\zeta_s \omega_s^3} \left[\frac{(\zeta_p \omega_p^3 + \zeta_s \omega_s^3) \omega_p}{4\zeta_a \omega_a^4} \right]} \times \quad (21)$$

$$\sqrt{\frac{\zeta_a \zeta_s}{\zeta_p \zeta_s (4\zeta_a^2 + \theta_s^2) + \gamma \zeta_a^2}}$$

其中 $\gamma = m_s/m_p$ 为质量比, $\omega_a = (\omega_p + \omega_s)/2$ 和 $\zeta_a = (\zeta_p + \zeta_s)/2$ 分别为平均频率和平均阻尼比, $\theta_s =$

$(\omega_p - \omega_s)/\omega_a$ 是一个调谐参数。

根据式(13)计算所得标准差系数 $k=1.9$,图2所示为辅助随机变量的标准差 $\sigma_\theta = 1.9 \sigma_z$ 时辅助函数 H 的 PDF 和对数坐标 CDF。为了进行比较,还使用 10^7 样本的 MCS 获得了辅助函数的概率分布。可以看出,采用本文方法得到的辅助函数的 PDF 和 CDF 与 MCS 结果非常吻合。

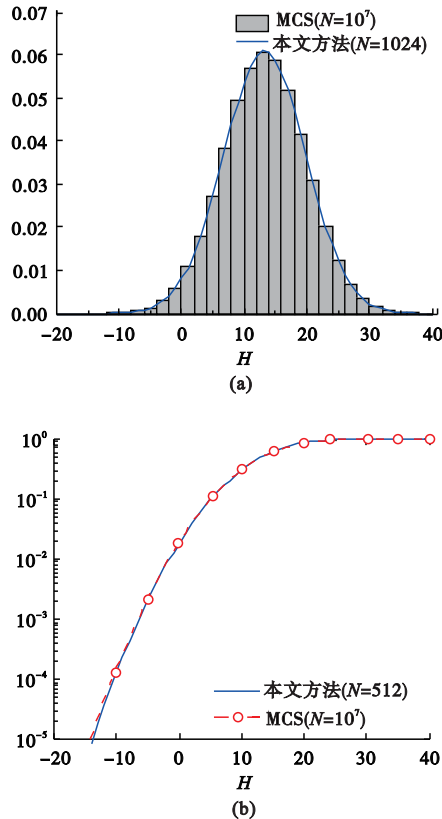


图2 辅助函数的概率分布

Fig. 2 Probability distribution of the auxiliary function

在得到比较精确的辅助函数的概率分布后,即可计算功能函数的概率分布。同时,功能函数的概率分布也可以通过使用和不使用功能函数的 MIF 的等效期望方法得到。图3所示为采用 1024 个 Sobol 点获得的功能函数的 PDF 和对数坐标 CDF。为了进行比较,还使用了 1024 个 Sobol 点的 EEM 以及 10^7 样本的 MCS 获得了功能函数的概率分布。可以看出,(1)采用本文方法得到的功能函数的 PDF 和 CDF 与 MCS 结果基本一致。(2)与 EEM 相比,本文提出的方法能得到更精确的尾部 CDF,具有更高的计算精度和计算效率。(3)对于更高维度的非线性问题,由于该方法只需要得到功能函数的响应值,而与功能函数的维度无关。即使功能函数的维度继续增长,Sobol 序列也能够生成对应的样本点。

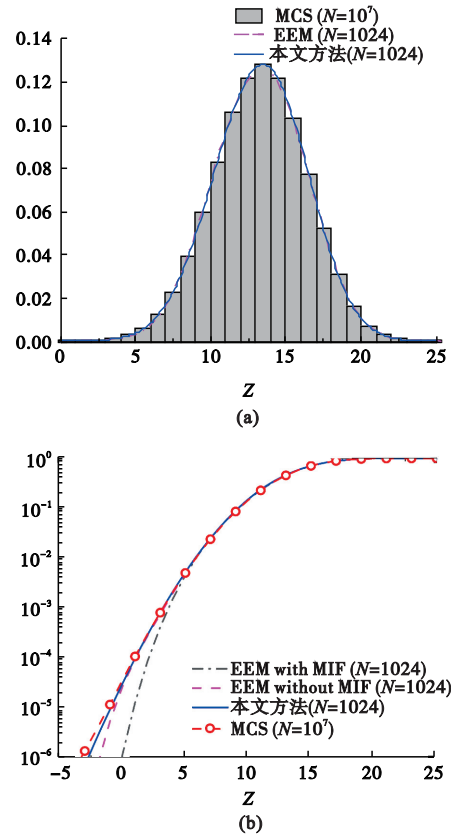


图3 功能函数的概率分布

Fig. 3 Probability distribution of the performance function

4.2 算例2 涉及动态可靠性的隐式功能函数

本算例对非平稳地震动作用下的 10 自由度集中质量非线性框架结构进行研究,如图4所示。结构的几何尺寸为,高度 $h_1=4\text{ m}, h_2=h_3=\dots=h_{10}=3\text{ m}$,立柱截面=500 mm × 500 mm,梁截面的抗弯刚度为 $E_b I \rightarrow \infty$ 。采用瑞利阻尼,即 $C = \zeta_1 \mathbf{M} + \zeta_2 \mathbf{K}$,其中 $\zeta_1 = 0.01\text{ Hz}, \zeta_2 = 0.005\text{ s}$, \mathbf{M} 和 \mathbf{K} 分别为集总质量矩阵和初始刚度矩阵。此外,恢复力采用 Bouc-Wen 模型,

$$F(u, z) = \alpha k u + (1 - \alpha) k z \quad (22)$$

其中 k 为初始刚度, u 为层间位移, z 为滞回位移,满足

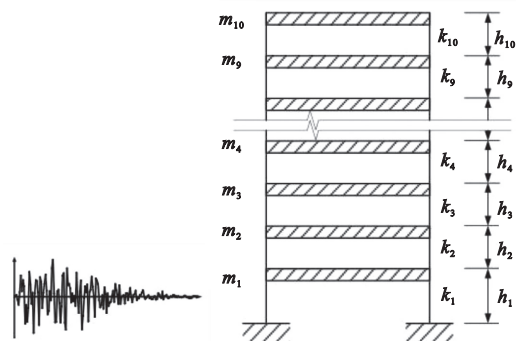


图4 10层非线性框架结构

Fig. 4 10 story nonlinear frame structure

$$\dot{z} = A \dot{u} - \beta \| \dot{u} \| z |^{-1} z - \gamma \dot{u} | z |^r \quad (23)$$

其中参数设置为 $\alpha = 0.01, A = 1.2, \beta = 1.4, \gamma = 0.2, r = 1$ 。

表2 算例2 随机变量的统计信息

Tab.2 Probabilistic information of random variables for Example2

| 随机变量 | 分布类型 | 均值 | 变异系数 |
|--------------------|--------|--------------------|------|
| E_c/Pa | 对数正态分布 | 3×10^{10} | 0.1 |
| $m_1, m_2, m_3/kg$ | 对数正态分布 | 1.2×10^5 | 0.1 |
| m_4/kg | 对数正态分布 | 1.3×10^5 | 0.1 |
| m_5/kg | 对数正态分布 | 1.1×10^5 | 0.1 |
| $m_6, m_7/kg$ | 对数正态分布 | 1.0×10^5 | 0.1 |
| $m_8, m_9/kg$ | 对数正态分布 | 1.1×10^5 | 0.1 |
| m_{10}/kg | 对数正态分布 | 0.5×10^5 | 0.1 |

在本算例中,施加在目标结构上的非平稳地面运动加速度由以下谱密度函数建模:

$$S_N(\omega, t) = |g(t)|^2 S(\omega) \quad (24)$$

其中 $S(\omega)$ 是平稳情况下的双侧功率谱密度函数,并且使用 Clough-Penzien 谱^[16], $g(t)$ 为调制函数:

$$g(t) = \begin{cases} (t/t_1)^2 & (0 \leq t < t_1) \\ 1 & (t_1 \leq t < t_2) \\ \exp[-c(t-t_2)] & (t_2 \leq t < T) \\ 0 & (t \geq T) \end{cases} \quad (25)$$

其中 t_1 和 t_2 分别为地震激励的静止部分的开始时刻和结束时刻, T 为地震激励的持续时间, c 为衰减系数。在该算例中,参数取为 $t_1 = 0.8$ s, $t_2 = 7$ s, $T = 17$ s 和 $c = 0.35$ 。

采用四阶龙格-库塔法对结构进行每时程地震动加速度的确定性动力响应分析。第一层位移的最大绝对值认为是评估该结构可靠性的极值。然后,对该建筑的可靠性进行研究。假设结构破坏定义为结构位移超过允许极限的极值。因此,功能函数为

$$G(\mathbf{X}) = \Delta_{lim} - \Delta(\mathbf{X}) = 0.65 - \max_{0 \leq t \leq T} |Y(\mathbf{X}, t)| \quad (26)$$

计算所得标准差系数 $k = 1.65$, 图5所示为辅助随机变量的标准差 $\sigma_\theta = 1.65 \sigma_z$ 时辅助函数 H 的 PDF 和对数坐标 CDF。为了进行比较,还使用 10^6 样本的 MCS 获得了辅助函数的概率分布。可以看出,采用本文方法得到的辅助函数的 PDF 和 CDF 与 MCS 结果基本一致。

根据表2中随机变量的概率分布信息,可以使用 Sobol 序列产生样本点,对结构进行有限元计算获得结构的动力响应。图6所示为采用1024个

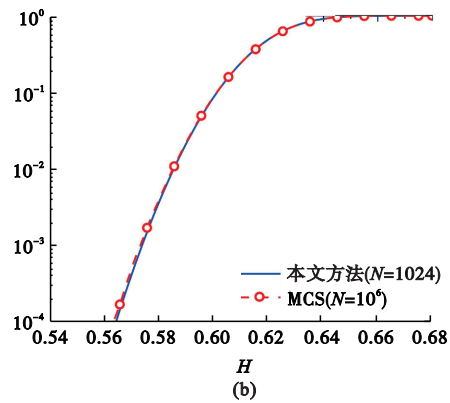
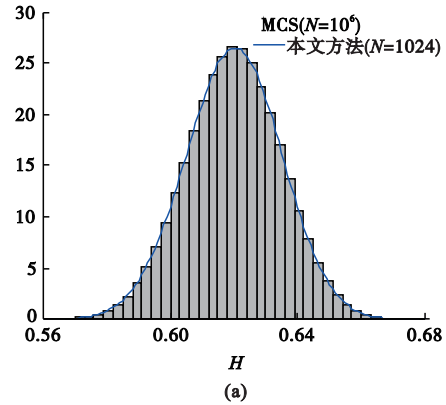


图5 辅助函数的概率分布

Fig.5 Probability distribution of the auxiliary function

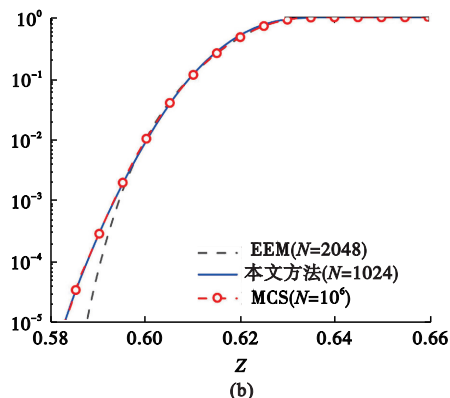
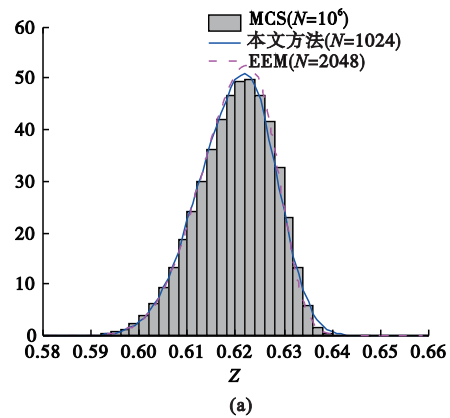


图6 功能函数的概率分布

Fig.6 Probability distribution of the performance function

Sobol 点获得的功能函数的 PDF 和对数坐标 CDF。为了进行比较,还使用了 2048 个 Sobol 点的 EEM 以及 10^6 样本的 MCS 获得了功能函数的概率分布。可以看出,(1)采用本文方法得到的功能函数的 PDF 和 CDF 与 MCS 结果基本一致。(2)与 EEM 相比,本文提出的方法能得到更精确的尾部 CDF,具有更高的计算精度。

5 结 论

本文在等效期望法(EEM)的基础上,针对既有等效期望法中的辅助变量取值影响其概率分布计算结果准确性的问题,提出了标准差系数 k 的经验计算公式,从而确定了辅助随机变量的标准差,使得计算的辅助函数的概率分布与 MCS 结果非常吻合,相比于 EEM 中确定的辅助变量更为精准;同时,仅利用一个辅助函数进行了功能函数概率分布计算公式的推导,计算过程中利用辅助随机变量进行了精确的变换,克服了等效期望法中利用构造的辅助函数进行变换的计算缺点,提高了计算精度和计算效率,得到如下结论。

(1)与 EEM 相比,该方法只需对功能函数进行较少的计算次数即可获得与 MCS 基本一致的结果,该方法在计算功能函数概率分布时有较好的精度和效率;

(2)与 EEM 相比,通过提出的标准差系数经验计算公式,得到了更为恰当的辅助随机变量标准差,同时能够得到比较精确的辅助函数的 PDF 和 CDF。

参考文献(References):

- [1] Wang Z Q, Broccardo M. A novel active learning-based Gaussian process metamodeling strategy for estimating the full probability distribution in forward UQ analysis [J]. *Structural Safety*, 2020, **84**: 101937.
- [2] Dubourg V, Sudret B, Bourinet J M. Reliability-based design optimization using Kriging surrogates and subset simulation[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2011, **44**(5): 673-690.
- [3] Saltelli A. Sensitivity analysis for importance assessment[J]. *Risk Analysis*, 2002, **22**(3): 579-590.
- [4] Zhang X D, Low Y M, Koh C G. Maximum entropy distribution with fractional moments for reliability analysis[J]. *Structural Safety*, 2020, **83**: 101904.
- [5] Li J, Chen J B. Probability density evolution method for dynamic response analysis of structures with uncertain parameters [J]. *Computational Mechanics*, 2004, **34**(5): 400-409.
- [6] Li J. Probability density evolution method: Background, significance and recent developments [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2016, **44**: 111-117.
- [7] Falsone G, Settineri D. Explicit solutions for the response probability density function of linear systems subjected to random static loads [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2013, **33**: 86-94.
- [8] Chen G H, Yang D X. Direct probability integral method for stochastic response analysis of static and dynamic structural systems [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019, **357**: 112612.
- [9] Li X L, Chen G H, Cui H C, et al. Direct probability integral method for static and dynamic reliability analysis of structures with complicated performance functions [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2021, **374**: 113583.
- [10] Cai C H, Zhao Y G, Lu Z H, et al. An equivalent expectation evaluation method for approximating the probability distribution of performance functions [J]. *Structural Safety*, 2022, **95**: 102180.
- [11] Hohenbichler M, Rackwitz R. Non-normal dependent vectors in structural safety [J]. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 1981, **107**(6): 1227-1238.
- [12] Liu P L, Der Kiureghian A. Multivariate distribution models with prescribed marginals and covariances [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1986, **1**(2): 105-112.
- [13] Lu Z H, Cai C H, Zhao Y G. Structural reliability analysis including correlated random variables based on third-moment transformation [J]. *Journal of Structural Engineering*, 2017, **143**(8): 04017067.
- [14] Lu Z H, Cai C H, Zhao Y G, et al. Normalization of correlated random variables in structural reliability analysis using fourth-moment transformation [J]. *Structural Safety*, 2020, **82**: 101888.
- [15] Nagler T. Kdecopula: An R package for the kernel estimation of bivariate copula densities [J]. *Journal of Statistical Software*, 2018, **84**(7): 1-22.
- [16] 赵岩,张亚辉,林家浩.基于虚拟激励法的大跨度桥梁非平稳随机振动分析闭合解[J]. *计算力学学报*, 2024, **41**(1): 202-208. (ZHAO Yan, ZHANG Yahui, LIN Jiahao. Closed solution for non-stationary random vibration analysis of long-span bridge based on pseudo excitation method [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2024, **41**(1): 202-208. (in Chinese))

SPH simulation of non-isothermal complex flow with fluid impacting obstacles

YU Hai-yang^{1,2}, ZHANG Lin^{*1}, ZHOU Yuan³

(1. State Key Laboratory of Mesoscience and Engineering, Institute of Process Engineering,
Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;

2. School of Chemical Engineering, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;

3. Process Engineering Department, Petrochina Petrochemical Research Institute, Beijing 102206, China)

Abstract: The non-isothermal complex flow caused by fluid impacting obstacles is very important to the industrial processes such as nuclear energy utilization. Through coupling various numerical techniques such as the density diffusive term, artificial viscous term, particle shifting technique, a stable and accurate non-isothermal smoothed particle hydrodynamics (SPH) scheme is established, and accurate simulation of non-isothermal complex flow caused by fluid impacting obstacles is realized. Based on the simulation for the non-isothermal flow past a heated cylinder, the non-isothermal dam break past single/multiple obstacles, it is demonstrated that: (1) the developed non-isothermal SPH scheme can not only compute a smooth pressure field and avoid the spurious oscillation of numerical solutions, but also predict accurately the temperature field and the key physical quantities; (2) this SPH scheme can also accurately show the interaction between the heat conduction process and the complex free-surface evolution, and has the capability to simulate non-isothermal complex flows past multiple obstacles.

Key words: SPH; non-isothermal flow; impacting flow; free surface; particle shifting technique

~~~~~  
(上接第 851 页)

## An improved equivalent expectation method for evaluate probability density of performance functions

ZOU Changxing, WENG Yeyao, ZHANG Xuanyi, ZHAO Yangang<sup>\*</sup>

(Faculty of Architecture, Civil Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

**Abstract:** The calculation of the probability distribution of performance functions is a core issue in uncertainty quantification and reliability design, and the recently proposed equivalent expectation method (EEM) is an effective way to solve this problem. This paper proposes an improved EEM. Putting forward an empirical calculation formula for the standard deviation coefficient of auxiliary random variables and obtaining a more accurate probability distribution of the auxiliary function. Meanwhile, aiming at the accuracy issue in calculating the probability distribution of the performance function is proposed, the calculation formula for the PDF of the performance function is derived using only one auxiliary function. In the process of calculating the PDF, proposing an exact theoretical transformation of probability distribution from auxiliary functions to performance functions is proposed, resulting in a more accurate PDF of the performance function. Finally, the effectiveness and accuracy of the method are verified through three numerical examples. The results indicate that this method is suitable for computing the probability distribution of high-dimensional nonlinear or implicit performance functions.

**Key words:** structural safety; structural reliability; performance function; random variable; probability density