计 算 机 研 究 与 发 展
Journal of Computer Research and Development
https://crad.ict.ac.cn
62(10): 2595−2610, 2025

参考点引导和多策略协同的高维多目标萤火虫算法

赵 嘉[1,2,3] 胡秋敏[1,2,3] 肖人彬[4] 潘正祥[5] 吕 莉[1,2,3] 王 晖[1,2,3] 樊棠怀[1,2,3]

[1](江西水利电力大学信息工程学院 南昌 330099)

[2](江西省水利大数据智能处理与预警技术工程研究中心(江西水利电力大学) 南昌 330099)

[3](南昌市智慧城市物联感知与协同计算重点实验室(江西水利电力大学) 南昌 330099)

[4](华中科技大学人工智能与自动化学院 武汉 430074)

[5](南京信息工程大学人工智能学院 南京 210044)

(zhaojia@nit.edu.cn)

Many-Objective Firefly Algorithm Based on Reference Point Guidance and Multiple Cooperative Strategies

Zhao Jia[1,2,3], Hu Qiumin[1,2,3], Xiao Renbin[4], Pan Jeng-Shyang[5], Lü Li[1,2,3], Wang Hui[1,2,3], and Fan Tanghuai[1,2,3]

[1](*School of Information Engineering*, *Jiangxi University of Water Resource and Electric Power*, *Nanchang* 330099)

[2](*Jiangxi Province Engineering Research Center for Intelligent Processing and Early Warning Technology of Water Conservancy Big Data* (*Jiangxi University of Water Resource and Electric Power*), *Nanchang* 330099)

[3](*Nanchang Key Laboratory of IoT Perception and Collaborative Computing for Smart City* (*Jiangxi University of Water Resource and Electric Power*), *Nanchang* 330099)

[4](*School of Artificial Intelligence and Automation*, *Huazhong University of Science and Technology*, *Wuhan* 430074)

[5](*School of Artificial Intelligence*, *Nanjing University of Information Science and Technology*, *Nanjing* 210044)

Abstract Aiming at the problems of Pareto dominance failure, weak optimization ability, and slow convergence speed of multi-objective firefly algorithm in solving many-objective optimization problems, we propose a many-objective firefly algorithm based on reference point guidance and multiple cooperative strategies (MaOFA-RR). This algorithm presets a set of uniformly distributed reference points in the objective space. By examining the distance relationship between fireflies and reference points, it distinguishes between guide fireflies and ordinary fireflies to replace Pareto dominance, thereby increasing selection pressure. Three evolutionary strategies are employed to update the positions of the fireflies: guide fireflies explore the local space, while ordinary fireflies learn from guide fireflies or explore the global space based on a distance threshold, enhancing the algorithm's optimization capability and convergence speed. Finally, the algorithm ingeniously integrates the idea of opposition-based learning. In the process of opposition-based learning, for each firefly in the population, its opposite position is calculated in the solution space. By adding these opposite solutions to the original population, the algorithm effectively expands the scope of population search, significantly improving the possibility of discovering better solutions. We conduct comprehensive experiments by comparing MaOFA-RR with eight recent many-objective evolutionary algorithms. The experimental results show that MaOFA-RR exhibits efficient performance in handing many-objective optimization problems.

Key words firefly algorithm; many-objective optimization; reference point; convergence; diversity

摘 要 针对多目标萤火虫算法在解决高维多目标优化问题时存在Pareto支配失效、寻优能力弱和收敛速

收稿日期: 2024-01-12; **修回日期**: 2025-04-22

基金项目: 国家自然科学基金项目(62466037, 62463021)

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (62466037, 62463021).

度慢的问题,提出了参考点引导和多策略协同的高维多目标萤火虫算法(many-objective firefly algorithm based on reference point guidance and multiple cooperative strategies, MaOFA-RR). 该算法在目标空间中预设一组均匀分布的参考点,通过萤火虫与参考点之间的距离关系,划分出引导萤火虫和普通萤火虫,以取代Pareto支配,增大选择压力;使用3种进化策略对萤火虫进行位置更新,引导萤火虫对局部空间进行探索,普通萤火虫根据距离阈值分别向引导萤火虫学习或对全局空间进行探索,提升算法的寻优能力和收敛速度;最后,算法融合反向学习思想,扩大种群搜索范围,提高发掘更优解的可能. 将MaOFA-RR与8种新近高维多目标进化算法进行比较,实验结果表明,MaOFA-RR在处理高维多目标优化问题时具有高效的性能.

关键词 萤火虫算法;高维多目标优化;参考点;收敛性;多样性

中图法分类号 TP391

DOI: 10.7544/issn1000-1239.202440019 **CSTR:** 32373.14.issn1000-1239.202440019

多目标优化存在于各个现实领域,其多个目标之间相互矛盾,往往难以同时达到最优. 一般当求解问题中所含目标3个以上时,称为高维多目标优化问题(many-objective optimization problems, MaOPs)[1]. 由于此类问题涉及的矛盾目标个数较多,例如在高精度医疗设备的开发中,需要平衡设备的性能、成本、安全性和患者舒适度等目标,进而导致优化难度成倍增加. 因此,如何更优地求解MaOPs成为亟待解决的问题之一.

目前,国内外研究人员为解决MaOPs中的相关难题,提出了多种高维多目标进化算法(many-objective evolutionary algorithms, MaOEAs)[2-3],主要包括:1)基于分解的MaOEAs,该方法将一个复杂的问题转化成一系列子问题进行求解[4]. 如:Dong等人[5]提出的基于动态资源分配分解的高维多目标进化算法(many-objective evolutionary algorithm based on decomposition with dynamic resource allocation, MaOEA/D-DRA);Li等人[6]提出的一种基于分解和2部分更新策略的多目标优化自适应权重算法MOEA/DMS(a novel adaptive weight algorithm based on decomposition and two-part update strategy for many-objective optimization). 此类算法易于结合其他优化方法,但权值或目标给定的次序较为敏感,很难同时优化规则[7]和不规则[8]问题. 2)基于指标的MaOEAs,该方法利用性能评价指标判别候选解的优劣,从而协助算法搜索. 如:Yuan等人[9]提出的基于指标的父代指导进化算法(indicator-based evolutionary algorithm with parental guidance, IEAPG);Liang等人[10]提出的基于指标和边界保护策略的高维多目标进化算法(indicator-based many-objective evolutionary algorithm with boundary protection, MaOEA-IBP). 此类算法易于实施且具有较好的通用性,但难以通过构建真实的Pareto前沿评估个体质量,种群的多样性较差. 3)基于松弛支配关系的MaOEAs,该方法通过扩大解的支配区域来增加支配选择的压力. 如:Zhu等人[11]提出的一种基于广义Pareto支配的高维多目标进化算法(many-objective evolutionary algorithm based on generalized Pareto dominance, MultiGPO);He等人[12]提出的一种基于分解和网格Pareto优势的高维多目标优化进化算法(evolutionary algorithm based on decomposition and grid-based Pareto dominance for many-objective optimization, MOEA/DG). 此类算法依赖参数的设定,不可避免地会随不同问题的需要而调整支配定义的松弛程度.

近年来,群体智能算法(swarm intelligence algorithm, SIA)[13-14]与新型进化机制相结合的MaOEAs通过克服单个算法的固有局限性,进一步提升了算法的探索与开发能力,在高维多目标优化领域广受关注. 如:Yang等人[15]提出的基于竞争机制的高维多目标粒子群优化算法(multi/many-objective particle swarm optimization algorithm based on competition mechanism, CMaPSO);Ye等人[16]提出的一种改进的双档案人工蜂群高维多目标优化算法(an improved two-archive artificial bee colony algorithm for many-objective optimization, MaOABC-TA)等.

萤火虫算法(firefly algorithm, FA)[17]作为一种模拟萤火虫生物习性的群体智能算法,最早由Yang提出,后将其应用到多目标优化问题,提出了多目标萤火虫算法(multi-objective firefly algorithm, MOFA)[18]. MOFA具有局部搜索能力强、结构简单等优点,但同时也存在易于早熟和收敛性能差等不足[19-20]. 特别地当面对高维多目标优化问题时,非支配解的急剧增长将带来Pareto支配失效[21]的问题,使得萤火虫无法选择合适的策略进化,进而导致算法的寻优能力下降和收敛速度变慢. 基于此,本文提出了参考点引

导和多策略协同的高维多目标萤火虫算法(many-objective firefly algorithm based on reference point guidance and multiple cooperative strategies, MaOFA-RR). MaOFA-RR具有如下特点：

1)算法通过预设一组均匀分布的参考点，将归一化后的萤火虫解集根据距离关联到对应参考点，一方面使用参考点取代Pareto支配，增大算法的选择压力；另一方面通过参考点将萤火虫划分为引导萤火虫和普通萤火虫，为后续萤火虫选择进化策略奠定基础；

2)摒弃了传统多目标萤火虫算法采用的全吸引模型，引导萤火虫采用高斯变异的进化策略进行学习，普通萤火虫则根据设定的距离阈值选择向引导萤火虫学习或采用柯西变异的进化策略进行学习，在加强算法寻优能力的同时提高算法的收敛速度；

3)萤火虫种群经位置更新后引入反向学习策略，结合生成的反向解集，扩大算法的搜索空间，提高发掘更优解的可能.

1 相关工作

1.1 高维多目标优化问题

一个拥有n维决策变量、m维目标的多目标优化问题，其数学模型通常具有一般性，以最小化问题为例，具体定义为

$$\begin{cases}\min \boldsymbol{y}=F(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),f_2(\boldsymbol{x}),\cdots,f_m(\boldsymbol{x})),\\ \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in \boldsymbol{X}\subset\mathbb{R}^n,\\ \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_m)\in \boldsymbol{Y}\subset\mathbb{R}^m,\end{cases}\tag{1}$$

其中：$\boldsymbol{x}$为决策向量；$\boldsymbol{X}$为n维决策空间；$\boldsymbol{y}$为目标向量；$\boldsymbol{Y}$为m维目标空间. 当目标维数大于等于4时，称其为高维多目标优化问题.

$$\begin{cases}\forall i\in\{1,2,\cdots,m\}:f_i(\boldsymbol{x}_a)\leqslant f_i(\boldsymbol{x}_b),\\ \exists j\in\{1,2,\cdots,m\}:f_j(\boldsymbol{x}_a)<f_j(\boldsymbol{x}_b).\end{cases}\tag{2}$$

对于决策空间中任意2个决策向量$\boldsymbol{x}_a$, $\boldsymbol{x}_b\in\boldsymbol{X}$，当且仅当满足式(2)时，称$\boldsymbol{x}_a$Pareto支配$\boldsymbol{x}_b$，记为$\boldsymbol{x}_a\prec\boldsymbol{x}_b$. 在此基础上，引出Pareto支配[22]的2个相关定义.

定义1. Pareto最优解集(pareto-optimal set, PS).

若决策空间中有一任意向量$\boldsymbol{x}^*\in\boldsymbol{X}$，且不存在$\boldsymbol{x}$使得$\boldsymbol{x}\prec\boldsymbol{x}^*$，则称$\boldsymbol{x}^*$为非支配解个体，种群中所有非支配解个体组成的集合称为Pareto最优解集.

定义2. Pareto最优前沿(pareto-optimal front, PF).

由非支配解个体构成的Pareto最优解集，在目标空间映射形成的投影称为Pareto最优前沿.

1.2 多目标萤火虫算法

多目标萤火虫算法源于现实中萤火虫的自然行为，其2个核心要素分别为亮度和吸引力. 亮度可分为萤火虫自身的荧光亮度和相对亮度. 荧光亮度与目标函数值有关，表示一开始萤火虫所处位置的优劣，而相对亮度是由萤火虫经过位置更新后对自身亮度的更新. 吸引力决定了萤火虫的移动方向，其大小会随着2只萤火虫的距离增大而减小. 相对亮度和吸引力的公式分别定义为

$$I=I_0\mathrm{e}^{-\gamma r_{ij}^2},\tag{3}$$

$$\beta_{ij}=\beta_0\mathrm{e}^{-\gamma r_{ij}^2},\tag{4}$$

其中：γ为光强吸收系数，一般$\gamma\in[0.01, 100]$；I_0和β_0分别为萤火虫自身的荧光亮度和最大吸引力；r_{ij}为萤火虫i和萤火虫j之间的欧氏距离.

对于种群中任意一只萤火虫i，其位置更新公式可分为2种情况：萤火虫i受萤火虫j支配；萤火虫i作为非支配解个体，不受任何支配. 根据这2种情况，对应的位置更新公式分别定义为

$$s_i(t+1)=s_i(t)+\beta_{ij}(s_j(t)-s_i(t))+\alpha\boldsymbol{\varepsilon}_i,\tag{5}$$

$$s_i(t+1)=g^*+\alpha\boldsymbol{\varepsilon}_i,\tag{6}$$

其中：$s_i(t)$和$s_j(t)$分别为萤火虫i和萤火虫j在第t次迭代时的空间位置；α为步长因子，取值为[0, 1]范围内的随机数；$\boldsymbol{\varepsilon}_i$为遵循高斯分布、均匀分布或其他分布的随机向量；$g^*$是将多目标函数以随机加权和的方式转换为单目标函数而得到的一个最佳值. 其加权方式定义为

$$\psi(s)=\sum_{k=1}^{K}w_kf_k,\tag{7}$$

$$\sum_{k=1}^{K}w_k=1,\quad w_k=\frac{p_k}{K},$$

其中：p_k为取值在[0, 1]内服从均匀分布的随机数；K为目标函数个数；权重w_k为(0, 1)内的随机数.

发展至今，萤火虫算法已吸引了众多学者的关注和研究. 这些研究主要可分为3个方面. 1)对算法参数的优化，如：Yu等人[23]提出的一种引导步长设置策略的萤火虫算法WSSFA(wise step strategy for firefly algorithm)，该算法考虑了萤火虫的个体最佳位置和全局最佳位置的信息，通过两者的绝对距离来控制步长因子；Gandomi等人[24]提出一种混沌萤火虫(firefly algorithm with chaos, CFA)算法，该算法在萤火虫算法基础上引入混沌概念，使用12个不同的混沌图调整光吸收系数和吸引力系数，以达到更快的速

度进行整体搜索. 2)对算法位置更新公式的改进, 如: Lyu 等人[25]提出的一种基于补偿因子和精英学习的多目标萤火虫算法(multi-objective firefly algorithm based on compensation factor and elite learning, CFMOFA), 该算法在萤火虫位置更新公式中引入补偿因子进行迭代学习, 不仅克服了种群约束, 还扩大了种群的搜索范围; 陈娟等人[26]提出的一种基于动态反向学习和莱维飞行的双搜索模式萤火虫算法(a double search mode firefly algorithm based on dynamic reverse learning and Levy flight, MOFA-LR), 该算法在位置更新公式中加入反向解和莱维飞行形成不同的搜索模式, 以改善算法的收敛性和分布性. 3)对算法运行机制的设计, 如: Zhao 等人[27]提出的具有自适应区域划分的多目标萤火虫算法(multi-objective firefly algorithm with adaptive region division, MOFA-ARD), 该算法利用收敛指数, 将种群分为 3 个区域进行分区学习, 提高了算法的探索与开发能力; Zhou 等人[28]提出的一种精确的部分吸引萤火虫算法(an accurate partially attracted firefly algorithm, PaFA), 该算法采用部分吸引模型取代全吸引模型, 从而降低萤火虫的移动频率.

1.3 参考点生成及目标值归一化

Das 等人[29]提出的标准边界交叉方法被广泛应用于目标空间中参考点的生成, 通过设定目标维数和区间划分数, 以获取一组均匀分布的参考点. 图 1 通过代数方法展示了目标维数 $M=3$ 和区间划分数 $p=4$ 时生成参考点的示意图. 此外, 图 2 通过几何方法直观地展示了参考点在超平面上的分布及其划分方式. 从图 2(a)中可以看出, 参考点均匀分布在由 f_1, f_2, f_3 组成的 3 维空间中. 进一步地, 从图 2(b)中可以

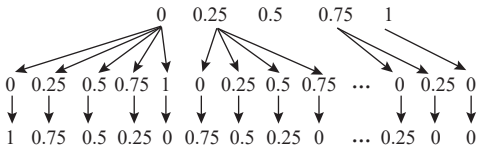
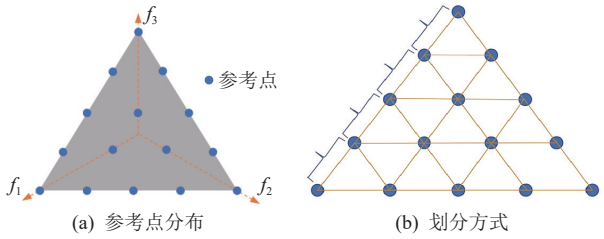


Fig. 1 Schematic diagram of reference point generation

图 1 参考点生成示意图



(a) 参考点分布 (b) 划分方式

Fig. 2 Distribution of reference points on the hyperplane and their division methods

图 2 参考点在超平面上的分布及其划分方式

看出, 将这些参考点映射到一个 2 维平面上, 以形成一个等边三角形, 通过设定的区间划分数, 确保每个参考点在空间中的位置唯一, 增强了算法在解空间中的探索能力.

通过区间划分数对每一目标维数进行等量划分, 可以找到每一目标维数满足式(8)的所有组合, 其中参考点的个数 H 由式(9)计算得到. 为避免当目标维数过多时造成参考点的个数大量增加, 将参考点分成内外 2 层[30], 同时设置内外 2 层的区间划分数分别为 p_1 和 p_2, 则参考点的个数可由式(10)计算得到.

$$s_i \in \left\{\frac{0}{p}, \frac{1}{p}, \cdots, \frac{p}{p}\right\}, \quad \sum_{i=1}^{M} s_i = 1, \tag{8}$$

$$H = \mathrm{C}_{M+p-1}^{M-1}, \tag{9}$$

$$H = \mathrm{C}_{M+p_1-1}^{p_1} + \mathrm{C}_{M+p_2-1}^{p_2}. \tag{10}$$

为使不同量纲或范围的值能够进行对比, 采用文献 [30] 中的自适应标准化对目标值进行转换, 具体转换为

$$f_j^n(x) = \frac{f_j(x) - z_j^{\min}}{a_j - z_j^{\min}}, \quad \sum_{j=1}^{M} f_j^n = 1, \tag{11}$$

其中: $j \in \{1,2,\cdots,M\}$; 理想点 $z_j^{\min}$ 为解集 S_t 中所有个体在目标 j 上的最小值; a_j 为第 j 维目标与线性超平面之间的截距, 其计算首先需要构建 M 维线性超平面. 具体定义为

$$z_i^{\mathrm{ep}} = \underset{x \in S_t}{\operatorname{argmin}} \left(\max_{j=1}^{M} \frac{f_j(x) - z_j^{\min}}{w_j^i} \right), \quad i = 1,2,\cdots,M, \tag{12}$$

$$w_j^i = \begin{cases} 10^{-6}, & j \neq i, \\ 1, & j = i. \end{cases}$$

其中: z_i^{ep} 为解集 S_t 在目标 i 上的极值点. 通过计算每一维目标上的极值点 $\{z_1^{\mathrm{ep}}, z_2^{\mathrm{ep}}, \cdots, z_M^{\mathrm{ep}}\}$, 即可构成 M 维的线性超平面.

2 参考点引导和多策略协同的高维 MOFA

2.1 基于参考点的萤火虫划分策略

由前文分析可知, 萤火虫的移动方向很大程度上取决于非支配解的空间位置. 但随着目标维数的增加, 目标函数之间的相关性增强, 非支配解的数量呈指数级增长[31], 造成 Pareto 支配失效, 进而使得 MOFA 无法有效选择合适的进化方式, 导致算法的整体性能下降. 由于参考点能够增加选择压力和维持解集多样性[32], 在进化算法中可以较好地用于引导或选择最优种群个体. 因此, 本文尊崇在保证一定

收敛性的情况下更倾向于满足多样性的选择，将参考点作用于目标解集. 一方面使用参考点取代了Pareto支配，避免使用Pareto支配出现难以评估而失效的问题，增大了算法的选择压力；另一方面通过参考点将萤火虫划分为引导萤火虫和普通萤火虫2种，为后续针对不同萤火虫的进化奠定基础. 其中，引导萤火虫用于引导种群进化和局部搜索，普通萤火虫则使其向引导萤火虫方向学习或用于全局探索，两者协同进化，有助于提升算法的寻优能力.

萤火虫划分策略中，首先根据前文生成参考点及完成解集成员目标值归一化，同时将参考点与原点连接，构建一系列的参考线；其次，在归一化目标空间中，将每个成员关联到与其垂直距离最近的参考线中；最后，将每个成员到对应参考线的距离作为收敛性度量指标，并依据该指标将距离关联参考线最近的成员进行标记. 其中被标记成员对应的萤火虫称为引导萤火虫，其余则称为普通萤火虫.

图3展示了在2维目标空间中部分参考点与关联解集的空间位置. 从图3中可以看出，不同的参考点所关联的萤火虫个数(参考点边上的数字)也各不相同，如果单纯的以距离来选择引导萤火虫，那么萤火虫e和萤火虫f被选择的概率会高于萤火虫b，最终导致整体多样性变差. 通过萤火虫划分策略，只选择距离每条参考线最近的萤火虫作为引导萤火虫，既保证被选择萤火虫的收敛性，又兼顾整体分布的多样性. 根据以上分析，可以得出，该策略首先根据距离选择了收敛性最好的萤火虫，以保证种群收敛；其次根据参考点选择了分布较稀疏的萤火虫，以维持种群多样性.

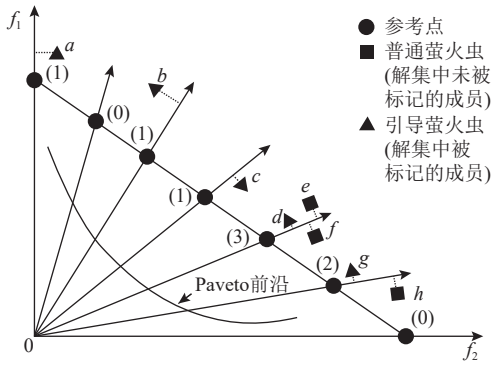


Fig. 3 Partial reference points and the spatial location of associated solution set

图3 部分参考点与关联解集的空间位置

2.2 自适应进化策略

MOFA采用全吸引模型对萤火虫进行整体维度更新，即每一轮迭代每个萤火虫都要运动多次. 但在高维目标空间中，萤火虫过多的运动将极大地增加计算开销. 更严重的是，由于Pareto支配失效，萤火虫未能选用合适的进化方式进行运动，使得萤火虫在迭代过程中出现聚集现象，导致算法的寻优能力下降和种群收敛速度变慢，甚至出现停滞问题. 因此，本文摒弃了传统MOFA采用的全吸引模型，并根据萤火虫划分的结果和距离阈值提出了相应的自适应进化策略.

由萤火虫划分策略可知，引导萤火虫因其携带了优良的种群信息，可以引导种群进化，但随着迭代次数的增加，引导萤火虫也易陷入局部最优，不利于算法的整体搜索；普通萤火虫因其携带的信息对种群进化不会有太大的贡献，此时应该让其向引导萤火虫方向探索，以加快算法收敛. 需注意的是，普通萤火虫向引导萤火虫移动的过程中会受吸引力的影响，而吸引力的大小又取决于2个萤火虫之间的距离，若距离过大，引导萤火虫则无法有效发挥引导作用.

通过上述分析可知，虽然只将萤火虫分为引导萤火虫和普通萤火虫2种，其进化策略可分为3类. 对于引导萤火虫，采用高斯变异[33]对其局部范围内产生随机扰动，使得能够探索更优的区域，提升算法的局部搜索能力，因此该进化策略为局部搜索. 对于普通萤火虫，计算与其关联在同一参考点内所有萤火虫垂直距离的平均值，将该值作为选择进化策略的阈值. 若普通萤火虫对应的垂直距离小于设定阈值，则使其向关联在同一参考点内的引导萤火虫学习；若普通萤火虫对应的垂直距离大于设定阈值，则利用柯西变异[34]产生的较大步长，帮助其扩大搜索范围，提升算法的全局搜索能力. 因此这2类进化策略分别为定向靠近和全局跨越. 3类进化策略定义如下：

定义1. 引导萤火虫的局部搜索.

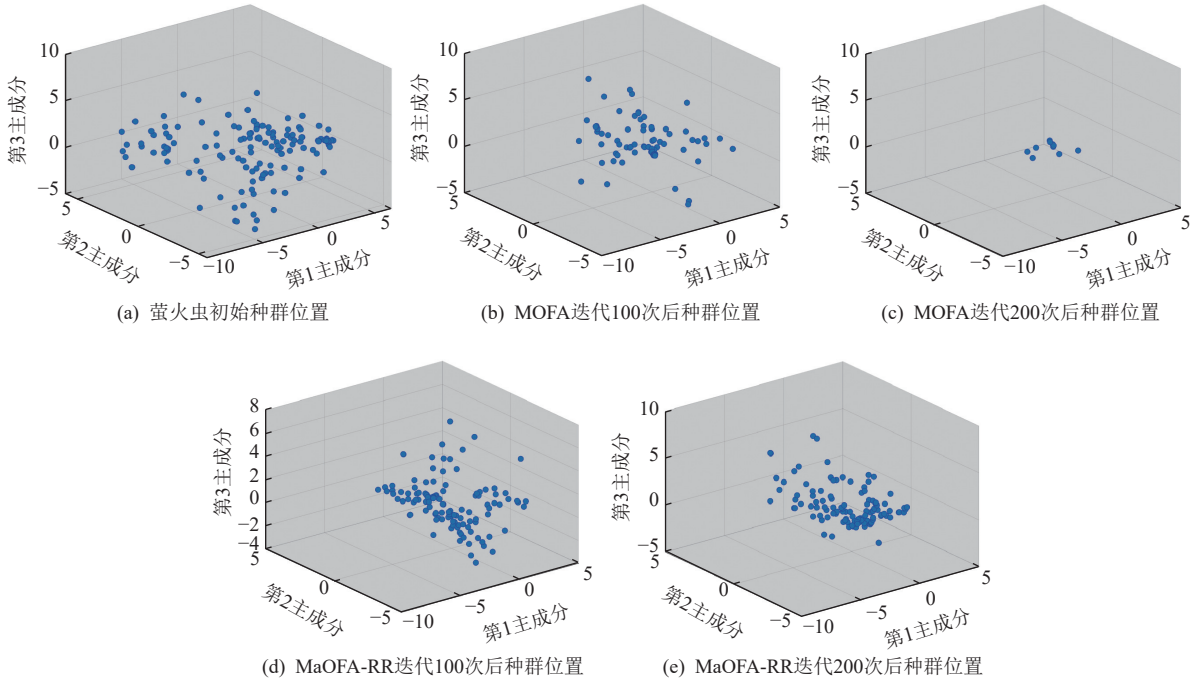
$$x_p(t+1)=x_p(t)+\lambda Gaussian\left(\mu,\sigma^2\right). \tag{13}$$

定义2. 普通萤火虫的定向靠近和全局跨越.

$$x_i(t+1)=\begin{cases}x_i(t)+\beta_{ip}\left(x_p(t)-x_i(t)\right)+\alpha\varepsilon_i, & D_i\leqslant D_{\text{avg}},\\ x_i(t)+\lambda Cauchy\left(\mu,\sigma^2\right), & D_i>D_{\text{avg}},\end{cases} \tag{14}$$

其中：i和p分别为普通萤火虫和引导萤火虫；λ为权重系数；μ为均值；σ^2为方差；β_{ip}为普通萤火虫i与引导萤火虫p之间的吸引力；D_i和D_{avg}分别为普通萤火虫i到对应参考点的垂直距离和距离阈值.

图4展示了15目标DTLZ6测试函数下MOFA与MaOFA-RR迭代100次和200次时的种群位置. 可



(a) 萤火虫初始种群位置 (b) MOFA迭代100次后种群位置 (c) MOFA迭代200次后种群位置

(d) MaOFA-RR迭代100次后种群位置 (e) MaOFA-RR迭代200次后种群位置

Fig. 4 Population position of the two algorithms after 100 and 200 iterations under the 15-objective DTLZ6 test function

图 4 2 种算法在 15 目标 DTLZ6 测试函数下迭代 100 和 200 次后的种群位置

以看出, 在相同初始种群下, 随着迭代次数的增加, MOFA 由于存在 Pareto 支配失效的问题, 使得萤火虫无法选择合适的进化方式, 导致种群出现聚集现象; 而 MaOFA-RR 使用参考点策略取代了 Pareto 支配, 并在此基础上提出相应的进化策略, 从而能较好地维持种群多样性.

2.3 反向学习策略

反向学习(opposition-based learning, OBL)是由 Tizhoosh[35] 在 2006 年提出. 其主要思想是通过当前解与反向解之间相互竞争和相互补充的方式, 从中选择较优的解参与种群进化. 通过引入反向学习策略, 生成当代萤火虫解集对应的反向解集, 从当代解集和反向解集中选择较优的N个解参与进化, 在一定程度上扩大了算法的搜索空间, 有助于维护种群的多样性和收敛性. 其中反向解的定义为

$$x_j^* = k(x_{\max} + x_{\min}) - x_j,\ \ j = 1,2,\cdots,N, \tag{15}$$

其中: $x_j \in [x_{\min}, x_{\max}]$ 为当代萤火虫解集上的一个候选解; $x_{\min}$ 和 $x_{\max}$ 分别为当代萤火虫解集中的最小值和最大值, 其值随迭代次数的改变而改变; k 为(0, 1)内的一个随机数.

2.4 算法流程

算法 1. 参考点引导和多策略协同的高维 MOFA.

输入: 决策变量 $D_e \in [a,b]$, 目标维数 M, 种群规模 N, 最大迭代次数 $Maxit$, 光吸收系数 γ, 最大吸引力 β, 步长因子 α;

输出: Pareto 最优解集.

① 随机初始化萤火虫种群, 生成规模为N的初始种群, 设置迭代次数$t = 0$;

② 生成 1 组均匀分布的参考点;

③ 当$t < Maxit$时, 重复步骤④~⑨;

④ 对解集中每个萤火虫的目标函数值进行归一化, 并将归一化后的萤火虫关联到对应的参考点上;

⑤ 根据萤火虫到对应参考点的距离, 划分出引导萤火虫和普通萤火虫;

⑥ 对萤火虫进行遍历, 引导萤火虫按照式(13)进行位置更新, 普通萤火虫根据自身到对应参考点的距离与对应的阈值进行比较, 并按照式(14)进行位置更新;

⑦ 通过反向学习, 利用位置更新过的萤火虫解集生成反向解集, 从 2 个解集中选出最优的N个解作为下一轮迭代的候选解集并存入外部档案;

⑧ 通过外部档案的更新与维护, 若外部档案中解的数量超出其规模, 则利用 NSGA-Ⅲ 的小生境保留淘汰多余的解;

⑨ $t = t + 1$, 直至满足算法终止条件.

2.5 时间复杂度分析

假设所求问题的种群规模为N, 目标维数为M,

参考点个数为H，其中N和H大小相等. 传统的 MOFA 采用全吸引模型对萤火虫种群进行更新，故理论上其时间复杂度为 $O(MN^2)$，然而在实际运行过程中，随着目标维数的增加，算法会出现 Pareto 支配失效和种群聚集等问题，使得 MOFA 需要更多的迭代次数进行寻优，同时萤火虫过多的运动也将极大增加计算开销，导致算法实际运行时间较预期更长. 对于 MaOFA-RR，在参考点相关操作阶段，设理想点识别、目标值转换、极值点识别和截距计算的时间分别为 t_1, t_2, t_3, t_4，因此该阶段的复杂度为 $T_1=O(N(t_1+t_2+t_3)+t_4)=O(2MN+M^2N+M^3)$；在萤火虫划分策略阶段，设解集成员与参考点关联和萤火虫划分的时间分别为 t_5 和 t_6，因此该阶段的时间复杂度为 $T_2=O(N(t_5+t_6))=O(MNH+N)$；在进化策略阶段，设普通萤火虫的个数为 K，萤火虫种群位置更新的时间为 t_7，因此该阶段的时间复杂度为 $T_3=O(Nt_7)=O(NK)$；在外部档案维护阶段，其时间复杂度为 $T_4=O(LH)$[30]. 综上，MaOFA-RR 的总时间复杂度为 $O(MNH)$. 比较可知，MaOFA-RR 与 MOFA 的时间复杂度处于同一量级，但 MaOFA-RR 的时间复杂度主要来源于解集关联与档案维护，在种群进化过程中萤火虫不需要发生过多的运动，同时能够选择合适的进化策略进行位置更新，具备更优的收敛性.

3 实验仿真及分析

为测试 MaOFA-RR 算法在处理高维多目标优化问题的性能，本节将 MaOFA-RR 与 8 种高维多目标进化算法进行对比分析，对比算法包括：NSGA-Ⅲ[30]，RPEA[36]，MaOEAIGD[37]，DEAGNG[38]，hpaEA[39]，PREA[40]，RVEAiGNG[41]，DCNSGA-Ⅲ[42]. 需要说明的是，本节未将 MOFA 作为对比算法，是因为传统的 MOFA 主要用于处理低维问题，在高维场景中表现的效果不佳，其次是因为 MOFA 在搜索策略等方面存在一定的局限性，使得算法在高维场景中运行时间过长，无法达到预期效果.

3.1 测试函数

为验证 MaOFA-RR 算法在高维多目标情况下，处理具有不同特征问题时的能力，采用目标维数和决策变量维数可自定义的测试函数 DTLZ1~DTLZ7 进行测试. 实验中，测试函数的目标维数 M 分别设置为 5, 8, 10, 15, 20；决策变量维数由 $M+k-1$ 决定，对于 DTLZ1 和 DTLZ7 测试函数，k 分别设置为 5 和 20，其余测试函数 k 设置为 10.

3.2 实验设置

1）参考点个数及种群规模. 由于 MaOFA-RR，NSGA-Ⅲ，RPEA，DEAGNG，hpaEA，PREA，DCNSGA-Ⅲ算法中的种群规模与参考点个数相关，因此本文对不同目标维数下的参考点个数和种群规模进行统一设置. 具体如表 1 所示.

Table 1 The Number of Reference Point and Population Sizes

表 1 参考点个数及种群规模

目标维数	区间划分数	参考点个数	种群规模
5	(6, 0)	210	210
8	(3, 2)	156	156
10	(3, 2)	275	275
15	(2, 1)	135	135
20	(2, 1)	230	230

2）算法参数设置. 本节所有参与仿真实验的算法均采用统一配置模拟二进制交叉和多项式变异参数，其他实验参数按照对应算法的原文献推荐值进行设置. 其中，交叉和变异的分布指数均设置为 20，交叉和突变的概率分别设置为 1.0 和 $1/D_e$（D_e为决策变量维数）. MaOFA-RR 算法中，步长因子 α 设置为 0.25，最大吸引力 β_0 设置为 1，光强吸收系数 γ 设置为 1，外部档案规模与种群规模一致.

3）运行次数及终止条件. 本节所有算法均在 PlatEMO[43] 平台上独立运行 30 次，记录评价指标的均值和标准差作为最终对比结果. 算法在目标维数为 5, 8, 10, 15, 20 时对应的终止迭代次数分别为 600, 750, 1 000, 1 500, 1800.

3.3 评价指标

本文选用反转世代距离（inverted generational distance, IGD）[44] 和超体积（hypervolume, HV）[45] 作为评价指标. IGD 指标作为一个综合性能指标，获得的值越小，表明算法的收敛性和多样性越好. HV 指标同样能够综合评价算法的性能，并且无需提供真实的 Pareto 前沿，更有利于求解高维多目标问题或实际应用中难以找到 Pareto 前沿的问题，该值越大，表明算法的收敛性和多样性越好.

3.4 实验结果分析

表 2 和表 3 分别给出了 MaOFA-RR 与 8 种对比算法在 DTLZ1~DTLZ7 测试函数上的 HV 与 IGD 的均值和方差. 采用显著性水平为 5% 的 Wilcoxon 秩和检验[46] 对测试的 9 种算法进行性能对比.

根据表 2，本文算法 MaOFA-RR 在测试函数

Table 2 Experimental Results of HV for MaOFA-RR and Eight Algorithms with Different Objective Dimensions and Test Functions

表 2 MaOFA-RR 与 8 种算法在不同目标维数和测试函数下 HV 的实验结果

函数	M	MaOFA-RR（本文）	NSGA-Ⅲ	RPEA	MaOEAIGD	DEAGNG	hpaEA	PREA	RVEAiGNG	DCNSGA-Ⅲ
DTLZ1	5	**0.979 8(1.59E−4)**	0.979 7(1.82E−4)≈	0.812 4(5.00E−2)−	0.541 9(4.00E−1)−	0.704 2(1.83E−1)−	0.978 5(1.28E−3)≈	0.979 0(2.45E−4)≈	0.978 4(4.70E−4)≈	0.978 4(9.51E−4)≈
	8	**0.997 7(6.62E−5)**	0.987 1(4.90E−2)≈	0.813 5(7.80E−2)−	0.404 7(3.58E−1)−	0.493 5(7.43E−2)−	0.934 3(1.62E−1)−	0.997 4(2.01E−4)≈	0.995 3(7.56E−4)≈	0.996 9(1.34E−3)≈
	10	**0.999 7(1.75E−5)**	0.995 6(1.73E−2)≈	0.879 1(3.85E−2)−	0.825 2(3.45E−1)−	0.700 1(9.22E−2)−	0.999 3(7.81E−4)≈	0.999 4(1.09E−4)≈	0.999 0(2.24E−4)≈	0.997 1(1.08E−2)≈
	15	**0.999 9(9.09E−6)**	0.998 5(4.57E−3)≈	0.833 2(6.53E−2)−	0.545 0(4.17E−1)−	0.760 0(1.01E−1)−	0.986 7(5.53E−2)−	0.665 1(3.35E−1)−	0.996 3(1.76E−3)≈	0.999 2(1.63E−3)≈
	20	**0.999 9(1.83E−7)**	0.999 4(6.10E−4)≈	0.896 3(4.28E−2)−	0.681 1(3.73E−1)−	0.953 0(2.71E−2)−	0.999 6(1.93E−4)≈	0.296 2(3.05E−1)−	0.998 3(2.01E−3)≈	0.999 2(1.26E−3)≈
DTLZ2	5	0.812 2(2.23E−3)	0.812 0(3.77E−4)≈	0.757 9(1.29E−2)−	0.812 8(4.68E−4)≈	0.752 6(9.40E−3)−	**0.816 6(6.14E−4)≈**	0.808 8(1.22E−3)−	0.806 7(1.28E−3)−	0.812 5(3.83E−4)≈
	8	**0.925 4(4.54E−4)**	0.918 1(1.97E−2)−	0.871 4(6.53E−3)−	0.918 8(4.29E−3)−	0.788 3(3.16E−2)−	0.911 4(1.66E−2)−	0.922 5(2.08e3)≈	0.922 7(1.49E−3)≈	0.923 6(3.55E−4)≈
	10	**0.970 6(2.27E−4)**	0.966 6(1.04E−2)−	0.938 5(3.31E−3)−	0.968 3(9.41E−4)−	0.899 1(9.25E−3)−	0.950 8(1.28E−2)−	0.966 2(6.51E−4)−	0.967 4(7.17E−4)−	0.967 0(1.07E−2)−
	15	**0.990 8(1.09E−4)**	0.982 0(1.15E−2)−	0.939 3(7.52E−3)−	0.546 8(1.58E−1)−	0.874 4(4.73E−2)−	0.888 1(2.77E−2)−	0.967 3(3.49E−3)−	0.977 6(1.93E−3)−	0.980 0(1.21E−2)−
	20	**0.999 8(1.13E−5)**	0.997 8(2.28E−3)≈	0.975 2(3.27E−3)−	0.533 0(1.67E−1)−	0.574 9(5.33E−2)−	0.911 7(2.37E−2)−	0.983 9(5.11E−3)−	0.939 0(1.68E−2)−	0.993 2(2.34E−3)≈
DTLZ3	5	0.771 9(1.47E−1)	0.804 6(6.32E−3)+	0.658 0(4.43E−2)−	0(0)−	0.517 9(1.02E−1)−	0.803 4(1.14E−2)+	0.805 8(3.01E−3)+	**0.806 8(2.64E−3)+**	0.805 0(5.63E−3)+
	8	**0.917 6(1.08E−2)**	0.671 1(3.71E−1)−	0.628 2(6.68E−2)−	0(0)−	0.551 7(8.07E−2)−	0(0)−	0.917 0(4.65E−3)≈	0.917 0(5.40E−3)≈	0.730 9(3.22E−1)−
	10	**0.970 4(1.23E−3)**	0.864 8(2.45E−1)−	0.709 0(4.49E−2)−	0.000 2(1.07E−3)−	0.644 3(7.36E−2)−	0(0)−	0.966 3(1.34d-3)−	0.955 2(6.24E−3)−	0.841 2(2.94E−1)−
	15	**0.990 3(6.14E−4)**	0.614 1(4.16E−1)−	0.612 8(6.08E−2)−	0.002 9(1.56E−2)−	0.697 6(8.29E−2)−	0(0)−	0(0)−	0.234 4(1.16E−1)−	0.311 1(4.07E−1)−
	20	**0.999 8(1.12E−5)**	0.963 2(2.76E−2)−	0.671 4(6.82E−2)−	0.017 7(3.25E−2)−	0.950 2(1.96E−2)−	0(0)−	0(0)−	0.251 9(1.64E−1)−	0.883 9(2.11E−1)−
DTLZ4	5	**0.812 6(7.73E−4)**	0.808 4(2.11E−2)−	0.709 4(9.16E−2)−	0.809 6(1.81E−2)−	0.767 3(4.96E−3)−	0.783 8(4.82E−2)−	0.790 3(3.75E−2)−	0.807 3(1.30E−3)−	0.798 2(4.32E−2)−
	8	**0.926 6(6.76E−4)**	0.904 2(3.96E−2)−	0.843 9(7.02E−2)−	0.916 1(1.72E−2)−	0.870 4(8.55E−3)−	0.898 8(2.04E−2)−	0.909 4(3.16E−2)−	0.924 3(7.55E−3)≈	0.907 9(3.31E−2)−
	10	**0.971 1(2.56E−4)**	0.964 4(1.41E−2)−	0.953 1(1.89E−3)−	0.970 6(2.06E−4)≈	0.936 7(3.52E−3)−	0.966 2(3.69E−3)−	0.970 7(2.92E−3)≈	0.970 7(9.52E−4)≈	0.969 6(1.85E−4)−
	15	**0.990 9(1.33E−4)**	0.978 9(1.10E−2)−	0.966 1(2.58E−3)−	0.985 5(5.22E−3)−	0.976 2(2.88E−3)−	0.976 0(7.89E−3)−	0.987 7(1.84E−3)−	0.983 9(2.10E−3)−	0.983 5(7.38E−3)−
	20	**0.999 8(1.37E−5)**	0.999 3(9.43E−4)≈	0.991 6(8.71E−4)≈	0.998 6(4.04E−4)≈	0.996 0(5.42E−4)≈	0.996 3(1.66E−3)≈	0.998 3(5.60E−5)≈	0.997 7(2.54E−4)≈	0.991 5(6.75E−3)≈
DTLZ5	5	**0.118 6(2.24E−3)**	0.110 1(6.76E−3)≈	0.112 5(3.02E−3)≈	0.094 4(1.78E−2)−	0.071 9(1.92E−2)−	0.066 3(2.08E−2)−	0.107 5(3.72E−3)−	0.064 1(1.84E−2)−	0.112 5(6.08E−3)≈
	8	**0.095 7(1.15E−3)**	0.090 6(4.01E−3)≈	0.094 5(2.13E−3)≈	0.092 1(1.73E−4)≈	0.069 5(3.16E−2)−	0.008 4(1.54E−2)−	0.090 5(3.10E−4)≈	0.023 7(2.78E−2)−	0.090 1(2.86E−3)≈
	10	**0.094 0(7.44E−4)**	0.088 4(3.66E−3)−	0.093 9(2.01E−3)≈	0.091 6(2.74E−4)≈	0.062 8(3.38E−2)−	0.005 6(1.09E−2)−	0.090 7(2.72E−4)≈	0.013 4(2.47E−2)−	0.088 2(3.05E−3)−
	15	**0.091 7(5.64E−4)**	0.090 1(9.65E−4)≈	0.077 6(1.96E−2)−	0.081 9(2.78E−2)−	0.076 6(3.07E−2)−	3.88E−5(1.73E−4)−	0.090 7(2.38E−4)≈	0.000 3(6.89E−4)−	0.090 5(6.00E−4)≈
	20	0.091 0(3.20E−4)	0.089 3(1.29E−3)−	0.088 0(4.54E−3)−	**0.091 4(2.17E−4)≈**	0.083 6(2.32E−2)−	0.005 3(1.56E−2)−	0.090 7(1.87E−4)≈	0.008 6(2.41E−2)−	0.090 1(7.53E−4)≈

表 2（续）

函数	M	MaOFA-RR（本文）	NSGA-Ⅲ	RPEA	MaOEAIGD	DEAGNG	hpaEA	PREA	RVEAiGNG	DCNSGA-Ⅲ
	5	**0.115 4(2.52E−3)**	0.102 3(8.66E−3)−	0.105 0(4.14E−3)−	0.090 3(2.46E−2)−	0.019 0(2.72E−2)−	0.050 1(3.53E−2)−	0.094 7(5.31E−3)−	0.100 8(1.44E−2)−	0.101 2(9.00E−3)−
	8	**0.097 4(1.47E−3)**	0.054 6(4.38E−2)−	0.094 2(2.08E−3)≈	0.073 0(3.56E−2)−	0.019 8(3.28E−2)−	0(0)−	0.090 8(2.33E−4)≈	0.088 3(6.77E−3)−	0.045 5(4.66E−2)−
DTLZ6	10	**0.094 4(8.46E−4)**	0.057 6(4.46E−2)−	0.093 8(2.52E−3)≈	0.070 3(3.94E−2)−	0.048 7(4.47E−2)−	0(0)−	0.090 8(2.57E−4)≈	0.086 3(1.64E−2)−	0.037 7(4.50E−2)−
	15	**0.092 1(4.13E−4)**	0.066 6(4.09E−2)−	0.087 7(1.70E−2)−	0.072 2(3.70E−2)−	0.091 0(2.22E−4)≈	0(0)−	0.059 1(4.45E−2)−	0.086 4(1.64E−2)−	0.081 8(2.79E−2)−
	20	**0.091 5(3.00E−4)**	0.090 9(1.23E−4)≈	0.087 5(1.70E−2)−	0.091 4(9.37E−5)≈	0.091 1(4.31E−4)≈	0(0)−	0.068 1(4.03E−2)−	0.084 2(2.32E−2)−	0.090 9(1.83E−4)≈
	5	0.262 7(2.55E−3)	0.255 5(3.60E−3)−	0.213 7(2.54E−3)−	0.184 2(4.00E−3)−	0.263 8(4.14E−3)≈	0.264 5(3.11E−3)≈	0.265 5(3.45E−3)≈	**0.269 5(2.63E−3)≈**	0.260 6(2.51E−3)≈
	8	0.202 0(2.12E−3)	0.201 0(3.19E−3)≈	**0.205 2(4.05E−3)≈**	0.094 9(3.26E−2)−	0.202 4(9.13E−3)≈	0.194 7(3.47E−3)−	0.186 6(1.58E−3)−	0.183 7(1.57E−2)−	0.196 3(2.78E−3)−
DTLZ7	10	0.193 8(2.76E−3)	0.179 8(8.81E−3)−	**0.194 3(6.93E−3)≈**	0.056 0(2.66E−2)−	0.174 2(7.43E−3)−	0.177 8(4.18E−3)−	0.153 5(5.46E−3)−	0.155 1(5.26E−3)−	0.178 9(6.01E−3)−
	15	**0.147 3(2.05E−3)**	0.133 9(1.28E−2)−	0.125 8(5.77E−3)−	0.005 9(9.75E−3)−	0.139 9(5.57E−3)−	0.146 9(1.15E−2)≈	0.067 1(1.36E−2)−	0.075 5(2.37E−2)−	0.146 1(7.14E−3)≈
	20	0.136 1(1.11E−3)	0.140 5(6.04E−3)+	0.116 3(3.99E−3)−	0.000 3(6.32E−4)−	0.135 7(4.28E−3)≈	0.141 1(2.77E−3)+	0.000 5(1.22E−3)−	0.022 8(1.81E−2)−	**0.142 8(4.83E−3)+**
+/−/≈			2/20/13	0/27/8	0/28/7	0/29/6	2/26/7	1/20/14	1/23/11	2/17/16

注：表中数值表示收敛性和多样性均值（方差）；黑体数值表示最佳测试结果. HV 指标能够综合评价算法的收敛性和多样性，该值越大表明算法的收敛性和多样性越好；“+”“−”“≈”分别表示参与对比的 8 种算法在 HV 指标上优于、劣于和无明显优劣于本文算法 MaOFA-RR.

Table 3　Experimental Results of IGD for MaOFA-RR and Eight Algorithms with Different Objective Dimensions and Test Functions

表 3　MaOFA-RR 与 8 种算法在不同目标维数和测试函数下 IGD 的实验结果

函数	M	MaOFA-RR（本文）	NSGA-Ⅲ	RPEA	MaOEAIGD	DEAGNG	hpaEA	PREA	RVEAiGNG	DCNSGA-Ⅲ
	5	0.052 7(7.02E−5)	0.052 7(3.62E−5)≈	0.173 5(3.22E−2)−	0.304 9(2.79E−1)−	0.177 9(7.36E−2)−	0.052 9(1.37E−3)≈	0.055 8(5.64E−4)≈	**0.051 3(5.27E−4)≈**	0.053 6(7.46E−4)≈
	8	**0.099 8(1.25E−3)**	0.107 3(2.94E−2)−	0.257 6(4.39E−2)−	0.384 8(2.35E−1)−	0.309 4(2.95E−2)−	0.131 2(7.68E−2)−	0.109 6(1.33E−3)−	0.100 0(1.30E−3)≈	0.100 9(1.02E−2)≈
DTLZ1	10	**0.101 5(1.24E−3)**	0.118 4(2.68E−2)−	0.245 7(3.64E−2)−	0.185 9(1.91E−1)−	0.253 3(2.08E−2)−	0.112 1(6.25E−3)−	0.130 1(2.42E−3)−	0.111 4(2.82E−3)−	0.115 8(2.53E−2)−
	15	0.193 2(6.97E−3)	0.185 7(1.70E−2)+	0.284 6(3.23E−2)−	0.408 7(3.88E−1)−	0.255 1(2.20E−2)−	0.173 0(1.49E−2)+	0.303 1(1.12E−1)−	**0.153 2(1.14E−2)+**	0.186 1(1.15E−2)+
	20	0.189 4(3.76E−3)	0.190 3(8.34E−3)−	0.301 8(3.37E−2)−	0.317 7(1.78E−1)−	0.237 0(1.37E−2)−	0.215 0(5.88E−3)−	0.719 1(4.18E−1)−	**0.179 0(2.43E−2)+**	0.205 9(1.41E−2)−
	5	0.165 2(5.53E−4)	0.165 3(7.08E−6)≈	0.266 9(2.38E−2)−	0.168 9(6.93E−4)≈	0.163 9(2.56E−3)≈	**0.159 5(5.57E−4)+**	0.172 5(1.15E−3)−	0.167 9(8.17E−4)≈	0.165 1(7.61E−6)≈
	8	**0.325 5(1.99E−3)**	0.326 6(4.06E−2)≈	0.404 7(1.31E−2)−	0.347 4(1.18E−2)−	0.377 8(3.45E−2)−	0.340 5(2.11E−2)−	0.359 8(1.69E−3)−	0.351 4(1.37E−3)−	0.325 6(1.26E−4)≈
DTLZ2	10	0.424 8(2.55E−3)	0.428 1(2.64E−2)≈	0.435 3(7.88E−3)−	0.440 2(5.36E−3)−	**0.393 7(5.83E−3)+**	0.428 1(1.70E−2)≈	0.413 1(1.37E−3)+	0.403 0(2.79E−3)+	0.427 8(3.15E−2)≈
	15	0.627 6(6.24E−4)	0.635 9(1.82E−2)−	0.603 7(5.87E−3)+	0.928 9(9.80E−2)−	0.703 6(7.49E−2)−	0.732 1(3.36E−2)−	0.587 3(2.41E−3)+	**0.574 0(2.07E−3)+**	0.636 1(1.42E−2)−
	20	**0.568 7(6.83E−5)**	0.605 8(2.82E−2)−	0.644 1(3.03E−3)−	1.004 9(1.12E−1)−	1.090 1(2.53E−2)−	0.817 6(2.38E−2)−	0.645 4(9.29E−3)−	0.844 7(4.04E−2)−	0.642 9(9.75E−3)−

表 3（续）

函数	M	MaOFA-RR（本文）	NSGA-Ⅲ	RPEA	MaOEAIGD	DEAGNG	hpaEA	PREA	RVEAiGNG	DCNSGA-Ⅲ
	5	0.196 9(1.58E−1)	0.166 0(1.13E−3)+	0.423 6(6.62E−2)−	12.029 3(5.12E−0)−	0.461 6(1.14E−1)−	0.168 1(1.29E−2)+	0.172 3(1.07E−3)+	0.168 4(3.22E−3)+	**0.165 9(1.19E−3)+**
	8	**0.333 5(6.29E−3)**	0.863 1(1.11E−0)−	0.718 4(7.66E−2)−	9.834 4(5.58E−0)−	0.715 0(8.93E−2)−	7.143 9(2.60E−0)−	0.362 4(3.52E−3)−	0.356 9(4.81E−3)−	0.750 4(1.06E−0)−
DTLZ3	10	0.434 5(4.29E−3)	0.536 0(2.70E−1)−	0.786 1(5.81E−2)−	6.160 5(4.99E−0)−	0.749 5(5.19E−2)−	10.473(4.23E−0)−	**0.414 5(2.53E−3)+**	0.425 7(1.04E−2)+	0.595 5(4.10E−1)−
	15	**0.628 6(1.61E−3)**	1.228 4(1.15E−0)−	0.990 6(4.98E−2)−	6.228 5(4.60E−0)−	0.819 2(5.74E−2)−	10.932(4.69E−0)−	7.063 7(4.21E−0)−	1.145 7(1.34E−1)−	1.700 1(1.14E−0)−
	20	**0.568 8(6.53E−5)**	0.703 8(4.07E−2)−	1.056 3(5.95E−2)−	3.174 4(1.66E−0)−	0.716 9(2.94E−2)−	7.117 7(2.37E−0)−	14.774(9.61E−0)−	1.196 1(1.16E−1)−	0.855 5(6.30E−1)−
	5	**0.165 4(2.36E−4)**	0.173 3(4.45E−2)−	0.388 5(1.49E−1)−	0.176 0(4.37E−2)−	0.166 6(2.12E−3)≈	0.233 9(1.13E−1)−	0.218 1(9.40E−2)−	0.168 3(7.48E−4)≈	0.191 3(8.05E−2)−
	8	**0.335 5(2.82E−3)**	0.358 9(8.15E−2)−	0.495 2(1.34E−1)−	0.364 2(5.82E−2)−	0.344 4(3.29E−3)−	0.383 1(5.02E−2)−	0.405 2(7.44E−2)−	0.361 1(2.60E−2)−	0.353 2(7.63E−2)−
DTLZ4	10	0.434 9(3.48E−3)	0.435 8(3.74E−2)≈	0.442 2(5.71E−3)−	0.429 5(9.46E−4)+	**0.395 0(1.83E−3)+**	0.414 0(1.47E−2)+	0.416 7(1.17E−2)+	0.410 9(1.37E−3)+	0.419 8(7.46E−4)+
	15	0.627 8(5.85E−4)	0.648 2(1.90E−2)−	0.612 7(5.07E−3)+	0.638 7(1.32E−2)−	0.588 0(3.25E−3)+	0.627 4(1.25E−2)≈	0.603 7(8.32E−3)+	**0.583 6(6.61E−3)+**	0.640 1(1.38E−2)−
	20	**0.568 6(1.02E−4)**	0.588 3(3.37E−2)−	0.638 0(3.05E−3)−	0.625 1(6.56E−3)−	0.610 4(2.14E−3)−	0.629 5(6.96E−3)−	0.599 6(1.16E−3)−	0.597 4(1.88E−3)−	0.653 7(2.63E−2)−
	5	0.053 4(1.48E−2)	0.103 8(3.40E−2)−	**0.044 0(7.54E−3)+**	0.400 9(1.71E−1)−	0.128 7(3.35E−2)−	0.090 7(1.11E−2)−	0.092 7(1.62E−2)−	0.080 2(1.33E−2)−	0.095 2(3.64E−2)−
	8	0.139 5(4.66E−2)	0.275 7(9.46E−2)−	**0.103 9(2.93E−2)+**	0.563 6(1.80E−1)−	0.265 8(8.49E−2)−	0.276 5(6.26E−2)−	0.303 4(5.58E−2)−	0.139 1(2.61E−2)≈	0.273 4(7.88E−2)−
DTLZ5	10	0.163 2(5.73E−2)	0.357 4(9.70E−2)−	**0.102 6(3.73E−2)+**	0.523 3(1.92E−1)−	0.308 7(7.74E−2)−	0.340 6(6.30E−2)−	0.364 6(7.17E−2)−	0.145 9(2.74E−2)+	0.357 6(8.91E−2)−
	15	0.203 1(7.19E−2)	0.253 5(4.46E−2)−	**0.173 6(3.24E−2)+**	0.628 4(1.70E−1)−	0.332 0(1.34E−1)−	0.575 1(1.20E−1)−	0.406 1(1.23E−1)−	0.320 3(8.75E−2)−	0.254 3(6.00E−2)−
	20	0.179 5(5.80E−2)	0.288 5(5.50E−2)−	**0.126 6(3.06E−2)+**	0.300 4(1.03E−1)−	0.263 4(5.17E−2)−	0.569 8(1.05E−1)−	0.339 1(1.28E−1)−	0.222 7(4.63E−2)−	0.259 6(7.49E−2)−
	5	**0.095 9(2.62E−2)**	0.166 2(5.24E−2)−	0.096 4(2.65E−2)≈	0.623 0(8.56E−2)−	0.291 9(1.22E−1)−	0.231 7(1.24E−1)−	0.210 0(5.02E−2)−	0.104 4(2.04E−2)−	0.184 7(7.43E−2)−
	8	**0.126 8(3.77E−2)**	0.667 1(3.50E−1)−	0.198 3(6.03E−2)−	0.774 7(2.55E−1)−	0.364 4(1.20E−1)−	1.581 1(4.13E−1)−	0.380 8(1.34E−1)−	0.207 6(3.95E−2)−	0.667 1(3.29E−1)−
DTLZ6	10	**0.167 6(9.06E−2)**	0.567 4(2.95E−1)−	0.174 2(6.21E−2)−	0.670 9(1.21E−1)−	0.378 4(9.59E−2)−	1.580 1(6.10E−1)−	0.344 1(2.53E−2)−	0.246 1(5.70E−2)−	0.723 4(3.57E−1)−
	15	**0.190 6(9.95E−2)**	0.568 3(3.21E−1)−	0.219 9(5.20E−2)−	0.741 3(1.05E−1)−	0.373 8(1.10E−1)−	2.078 5(4.69E−1)−	0.610 3(3.60E−1)−	0.352 4(5.75E−2)−	0.585 7(2.87E−1)−
	20	**0.158 8(6.52E−2)**	0.365 0(1.39E−1)−	0.216 9(6.68E−2)−	0.395 0(1.54E−4)−	0.296 2(2.84E−2)−	1.727 3(6.02E−1)−	0.476 1(3.34E−1)−	0.340 4(5.93E−2)−	0.396 0(1.67E−1)−
	5	0.325 7(1.36E−2)	0.281 0(7.23E−3)+	1.380 9(2.54E−1)−	0.668 2(3.48E−2)−	0.232 8(1.86E−2)+	0.287 5(5.65E−2)+	**0.222 3(4.27E−2)+**	0.228 1(4.71E−2)+	0.284 0(8.45E−3)+
	8	0.954 3(5.84E−2)	0.775 6(2.32E−2)+	2.391 2(2.96E−1)−	1.186 5(6.56E−2)−	0.635 9(3.00E−2)+	0.741 3(1.55E−2)+	**0.632 7(8.55E−3)+**	0.643 4(4.86E−2)+	0.803 0(3.68E−2)+
DTLZ7	10	1.206 7(9.08E−2)	0.963 2(6.06E−2)+	1.999 3(2.51E−1)−	1.412 9(8.55E−2)−	0.790 9(6.22E−2)+	0.888 1(1.87E−2)+	0.817 7(2.83E−3)+	**0.785 6(1.53E−2)+**	0.989 5(6.20E−2)+
	15	6.178 9(6.47E−1)	7.244 6(1.02E−0)−	2.543 3(9.04E−1)+	2.772 3(1.35E−1)+	8.903 9(8.22E−1)−	6.610 4(1.19E−0)−	1.902 0(7.51E−2)+	**1.693 3(1.19E−1)+**	8.167 1(8.58E−1)−
	20	9.587 0(7.35E−1)	12.251 8(9.78E−1)−	2.072 0(2.73E−2)+	3.659 6(1.57E−1)+	12.676 2(7.93E−1)−	10.326(7.64E−1)−	3.550 6(8.07E−1)+	**1.902 5(6.87E−2)+**	12.585(8.51E−1)−
+/−/≈			5/25/5	9/25/1	3/31/1	6/27/2	7/25/3	11/23/1	14/16/5	6/24/5

注：表中数值表示收敛性和多样性均值（方差）；黑体数值表示最佳测试结果. IGD 指标是一个综合性能指标，获得的值越小，表明算法的收敛性和多样性更好；“+”“−”“≈”分别表示参与对比的 8 种算法在 IGD 指标上优于、劣于和无明显优劣于本文算法 MaOFA-RR.

DTLZ1~DTLZ7 的不同目标维数下获得了 28 个最优结果，其中 RPEA 和 RVEAiGNG 均获得 2 个最优结果. 根据表 3，MaOFA-RR 获得最优结果的个数为 15，其次是 RVEAiGNG 和 RPEA 分别获得 8 个和 5 个最优结果. 由表 2 和表 3 表明，MaOFA-RR 在不同的测试环境下具备良好的收敛性和多样性.

除了算法的收敛性和多样性，算法的好坏与其运行时间也息息相关. 表 4 直观地展示了 MaOFA-RR 与对比算法在不同目标维数的 DTLZ1 测试函数上的运行时间. 可以看到，MaOFA-RR，NSGA-Ⅲ，DCNSGA-Ⅲ的运行时间虽然随着目标维数和种群规模的增加总体呈上升趋势，但并没有表现出明显的变化. 对于 RPEA，MaOEAIGD，hpaEA，PREA，随着目标维数和种群规模的改变，运行时间均发生了较为明显的波动. 综合来看，MaOFA-RR，NSGA-Ⅲ，DCNSGA-Ⅲ的运行时间和稳定性相当，具备较好的计算效率，但 MaOFA-RR 的收敛性和多样性更优.

为进一步展现实验结果的差异，图 5 展示了 9 种算法在 15 目标 DTLZ1 和 DTLZ2 问题上获得的 HV 和 IGD 值柱状图. 可以清晰地看出，不同算法在同一测试条件下所得结果的差异明显. 在高维测试场景下，MaOFA-RR 依旧能保持良好的收敛性和多样性，具备较强的竞争力. 图 6 展示了 9 种算法在 15 目标 DTLZ1 问题上所获得 HV 解集的平行坐标图. 从图中可以看出，除了 DEAGND 和 PREA，其余 7 种算法均能收敛到真实的 PF（DTLZ1 的 PF 的目标值范围在 0~1 之间），但各算法的多样性不同. RPEA 和 MaOEAIGD 的最终解集仅收敛到真实 PF 的部分区域，因此多样性很差. NSGA-Ⅲ、DCNSGA-Ⅲ和 MaOFA-RR 在整个 PF 上获得均匀分布的解集，较于其他对比算法具备良好的收敛性和多样性.

Table 4 Running Time of MaOFA-RR and Eight Algorithms on DTLZ1 Test Function with Different Objective Dimensions

表 4 MaOFA-RR 与 8 种算法在不同目标维数的 DTLZ1 测试函数上的运行时间 s

算法	目标维数				
	5	8	10	15	20
MaOFA-RR（本文）	9.628	**5.337**	**12.24**	15.01	**25.15**
NSGA-Ⅲ	**5.787**	8.904	17.46	13.40	28.48
RPEA	22.100	15.360	77.87	36.54	146.10
MaOEAIGD	11.200	9.481	28.15	24.92	61.92
DEAGNG	74.160	125.600	965.80	399.50	2 501.00
hpaEA	10.540	11.770	33.49	17.30	54.46
PREA	11.490	13.160	44.85	23.08	84.48
RVEAiGNG	126.400	108.500	539.50	178.10	936.00
DCNSGA-Ⅲ	6.602	6.683	14.80	**10.69**	26.18

注：黑色数值表示最优结果.

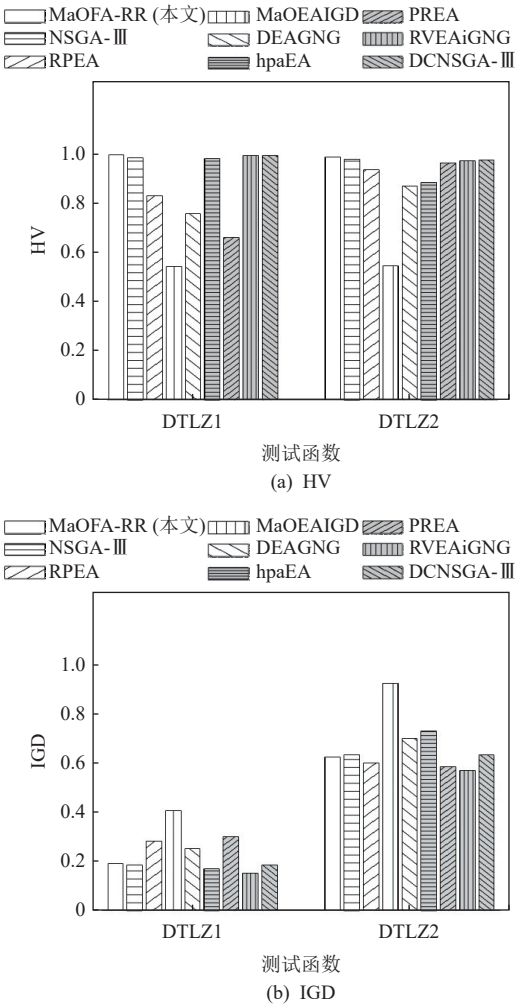


Fig. 5 HV and IGD values obtained by nine algorithms on 15-objective DTLZ1 and DTLZ2 problems

图 5 9 种算法在 15 目标 DTLZ1 和 DTLZ2 问题上获得的 HV 和 IGD 值

3.5 策略有效性分析

本文提出的 MaOFA-RR 是在 MOFA 的基础上，与基于参考点的萤火虫划分策略（R）、自适应进化策略（A）和反向学习策略（O）三种策略进行融合. 为分析改进策略对算法性能的影响，依旧选取 DTLZ1~DTLZ7 测试函数进行测试，测试所用到的算法参数与 3.2 节相同. 需要说明的是，A 和 O 是在 R 的基础上实现的，而 R 的主要作用是取代 MOFA 中使用的 Pareto 支配，通过参考点划分出引导萤火虫和普通萤火虫，进而为后续萤火虫选择进化策略奠定基础，因此单独使用无法对实验结果起到有效的改进. 此外，

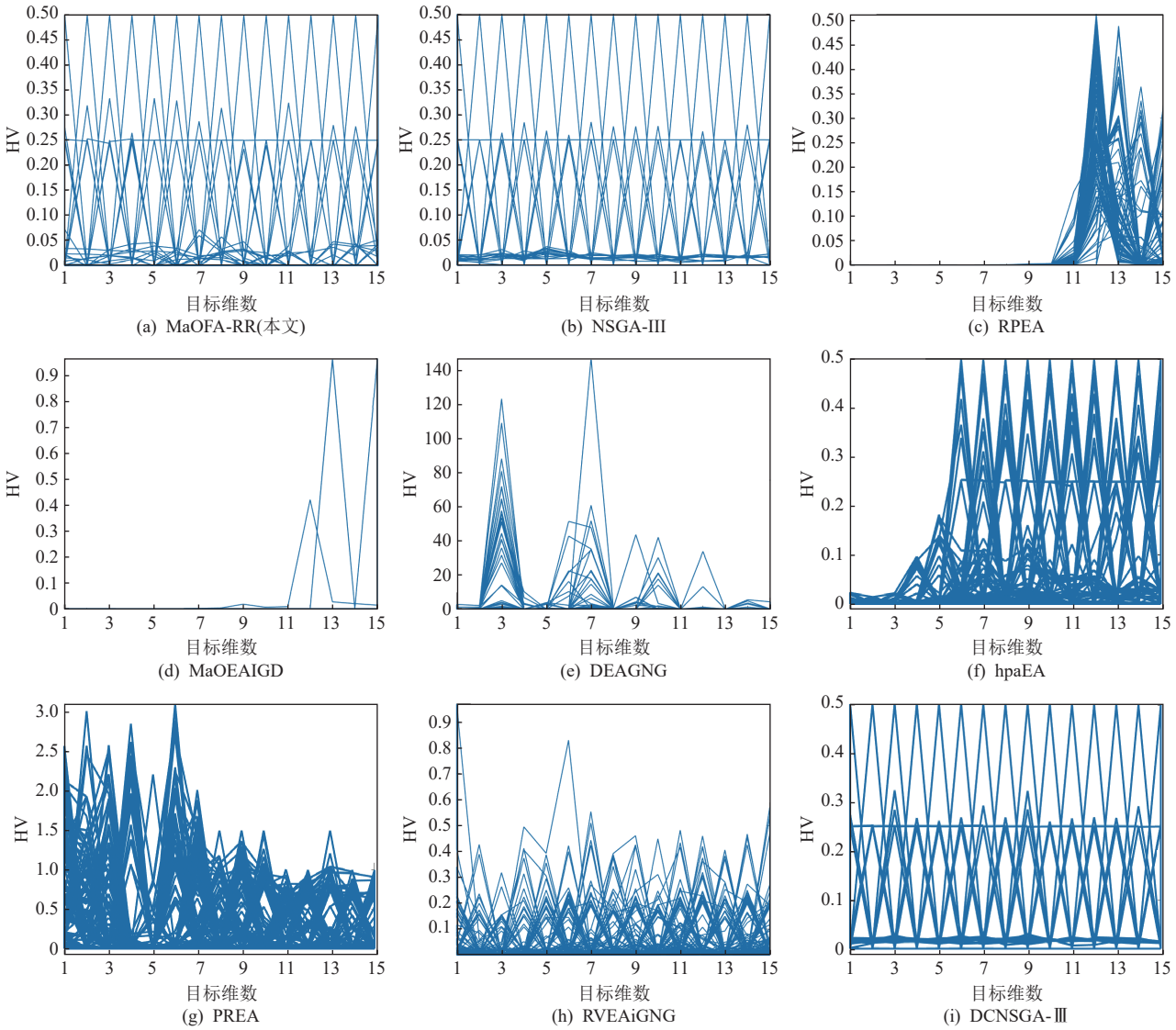


Fig. 6 Parallel coordinate diagram of solutions for nine algorithms solutions on 15-objective DTLZ1 problem

图 6 9 种算法在 15 目标 DTLZ1 问题上解集的平行坐标图

由于 MOFA 在高维场景中存在 Pareto 支配失效等问题，若直接与改进后的 MaOFA-RR 比较，将无法充分反映改进策略的相对有效性，因此本节未将 MOFA 的结果参与对比分析.

表 5 和表 6 分别展示了 MaOFA-RR 在不同策略下获得的 HV 值和 IGD 值. 可以看出，单独使用任何一种策略对算法的性能提升都是有限的. 对于采用的反向学习策略，获得的结果并不理想，仅在 DTLZ5 问题上表现良好. 对于改进的进化策略，在表 5 和表 6 中展示的整体效果较好，但依旧还有较大的提升空间.

4 结论与展望

本文针对高维多目标优化问题，深入剖析了多目标萤火虫算法在求解过程中存在 Pareto 支配失效、寻优能力弱和收敛速度慢的问题. 基于对高维多目标优化问题和 MOFA 固有特性的全面考量，本文提出了一种参考点引导和多策略协同的高维多目标萤火虫算法 MaOFA-RR. 该算法通过参考点与解集中萤火虫的距离关系，在不依赖 Pareto 支配的基础上划分出引导萤火虫和普通萤火虫，从而为后续萤火虫的进化奠定坚实基础. 此外，摒弃了传统 MOFA 所采用的全吸引模型，并针对不同类型的萤火虫定制了相应的进化策略. 其中，引导萤火虫通过高斯变异对局部空间展开搜索，而普通萤火虫则依据距离阈值，灵活选择向引导萤火虫学习或采用柯西变异对全局空间进行探索，在增强算法寻优能力的同时，大幅提升了算法的收敛速度. 最后，算法融合反向学习策略，

Table 5 Experimental Results of HV with Different Objective Dimensions and Test Functions

表 5 在不同目标维数和测试函数下 HV 的实验结果

函数	目标维数	R+A	R+O	MaOFA-RR（本文）
DTLZ1	5	0.968 2(9.38E−4)−	0.002 4(1.09E−2)−	**0.979 8(1.59E−4)**
	8	0.987 6(8.07E−5)−	0.026 8(8.63E−2)−	**0.997 7(6.62E−5)**
	10	0.990 7(2.41E−5)≈	0(0)−	**0.999 7(1.75E−5)**
	15	0.988 3(7.44E−3)−	0.121 6(1.41E−1)−	**0.999 9(9.09E−6)**
	20	0.993 8(1.48E−6)≈	0.061 2(1.26E−1)−	**0.999 9(1.83E−7)**
DTLZ2	5	0.802 9(5.02E−4)−	0.406 3(7.22E−2)−	**0.812 2(2.23E−3)**
	8	0.921 2(8.67E−4)≈	0.250 7(2.68E−2)−	**0.925 4(4.54E−4)**
	10	0.968 7(2.51E−4)−	0.296 0(2.90E−2)−	**0.970 6(2.27E−4)**
	15	0.987 8(9.36E−3)−	0.223 3(2.00E−2)−	**0.990 8(1.09E−4)**
	20	0.997 7(2.57E−3)≈	0.236 5(2.39E−2)−	**0.999 8(1.13E−5)**
DTLZ3	5	0.535 2(2.95E−1)−	0.104 7(4.84E−2)−	**0.771 9(1.47E−1)**
	8	0.847 4(2.02E−1)−	0.038 7(3.77E−2)−	**0.917 6(1.08E−2)**
	10	0.969 7(1.82E−3)−	0.034 5(4.37E−2)−	**0.970 4(1.23E−3)**
	15	0.989 2(1.81E−3)−	0.027 6(3.40E−2)−	**0.990 3(6.14E−4)**
	20	0.998 5(2.99E−4)≈	0.042 7(4.14E−2)−	**0.999 8(1.12E−5)**
DTLZ4	5	0.808 1(1.05E−3)−	0.494 4(4.14E−2)−	**0.812 6(7.73E−4)**
	8	0.917 0(1.57E−3)−	0.458 9(5.68E−2)−	**0.926 6(6.76E−4)**
	10	0.961 8(2.98E−4)−	0.549 3(5.44E−2)−	**0.971 1(2.56E−4)**
	15	0.983 9(1.18E−4)−	0.445 5(5.62E−2)−	**0.990 9(1.33E−4)**
	20	0.994 7(3.81E−5)≈	0.566 6(5.92E−2)−	**0.999 8(1.37E−5)**
DTLZ5	5	0.116 7(2.23E−3)≈	0.116 4(1.25E−2)≈	**0.118 6(2.24E−3)**
	8	0.093 1(2.15E−3)≈	0.090 2(1.50E−2)≈	**0.095 7(1.15E−3)**
	10	0.089 9(9.51E−4)−	0.087 1(9.69E−3)−	**0.094 0(7.44E−4)**
	15	0.089 1(4.61E−4)−	0.070 8(3.12E−2)−	**0.091 7(5.64E−4)**
	20	0.085 1(2.25E−4)−	0.072 7(6.91E−3)−	**0.091 0(3.20E−4)**
DTLZ6	5	0.107 2(3.76E−3)−	0.002 8(4.34E−3)−	**0.115 4(2.52E−3)**
	8	0.091 1(2.25E−3)≈	0.000 5(8.72E−4)−	**0.097 4(1.47E−3)**
	10	0.090 4(1.38E−3)≈	6.29E−5(1.84E−4)−	**0.094 4(8.46E−4)**
	15	0.084 2(3.67E−4)−	0.000 1(4.48E−4)−	**0.092 1(4.13E−4)**
	20	0.087 9(2.62E−4)−	3.7E−14(4.74E−14)−	**0.091 5(3.00E−4)**
DTLZ7	5	0.244 4(1.25E−2)−	0.119 8(1.24E−2)−	**0.262 7(2.55E−3)**
	8	0.195 6(6.43E−3)−	0.108 0(8.61E−3)−	**0.202 0(2.12E−3)**
	10	0.189 7(3.67E−3)−	0.109 2(6.93E−3)−	**0.193 8(2.76E−3)**
	15	0.144 8(7.67E−3)≈	0.099 4(3.15E−3)−	**0.147 3(2.05E−3)**
	20	0.133 6(7.57E−3)≈	0.098 5(2.71E−3)−	**0.136 1(1.11E−3)**
+/−/≈		0/23/12	0/33/2	

注：黑体数值为最佳测试结果；表中数值表示收敛性和多样性均值（方差）；“+”“−”“≈”分别表示所加策略在 HV 指标上优于、劣于和无明显优劣于本文算法 MaOFA-RR.

Table 6 Experimental Results of IGD with Different Objective Dimensions and Test Functions

表 6 在不同目标维数和测试函数下 IGD 的实验结果

函数	目标维数	R+A	R+O	MaOFA-RR（本文）
DTLZ1	5	0.059 2(7.56E−4)≈	3.913 4(2.49E−0)−	**0.052 7(7.02E−5)**
	8	0.139 9(1.14E−3)−	2.746 6(1.89E−0)−	**0.099 8(1.25E−3)**
	10	0.110 9(2.36E−3)−	2.282 6(8.40E−1)−	**0.101 5(1.24E−3)**
	15	0.197 4(8.28E−3)≈	1.449 4(1.63E−0)−	**0.193 2(6.97E−3)**
	20	0.204 9(2.57E−3)−	2.166 4(1.34E−0)−	**0.189 4(3.76E−3)**
DTLZ2	5	0.175 0(2.58E−4)−	0.375 1(8.36E−2)−	**0.165 2(5.53E−4)**
	8	0.329 9(4.22E−3)≈	0.757 0(3.00E−2)−	**0.325 5(1.99E−3)**
	10	0.436 3(2.57E−3)−	0.743 8(2.83E−2)−	**0.424 8(2.55E−3)**
	15	0.631 8(1.27E−2)−	0.945 1(2.68E−2)−	**0.627 6(6.24E−4)**
	20	0.629 5(1.89E−2)−	1.109 4(2.23E−2)−	**0.568 7(6.83E−5)**
DTLZ3	5	0.402 1(3.75E−1)−	0.718 6(9.72E−2)−	**0.196 9(1.58E−1)**
	8	0.396 0(1.80E−1)−	1.948 4(2.26E−0)−	**0.333 5(6.29E−3)**
	10	0.438 5(5.48E−3)≈	1.854 1(2.13E−0)−	**0.434 5(4.29E−3)**
	15	0.631 7(3.49E−3)−	2.627 7(4.53E−0)−	**0.628 6(1.61E−3)**
	20	0.623 7(1.61E−3)−	3.330 5(4.45E−0)−	**0.568 8(6.53E−5)**
DTLZ4	5	0.169 8(6.48E−4)≈	0.452 4(3.21E−2)−	**0.165 4(2.36E−4)**
	8	0.342 3(3.32E−3)−	0.624 6(1.33E−2)−	**0.335 5(2.82E−3)**
	10	0.439 3(2.45E−3)≈	0.685 1(1.35E−2)−	**0.434 9(3.48E−3)**
	15	0.631 1(8.39E−4)−	0.818 1(5.89E−2)−	**0.627 8(5.85E−4)**
	20	0.621 5(4.31E−4)−	0.808 2(9.38E−3)−	**0.568 6(1.02E−4)**
DTLZ5	5	0.091 8(1.50E−2)−	0.065 6(6.82E−3)−	**0.053 4(1.48E−2)**
	8	0.199 6(7.05E−2)−	0.139 9(2.31E−2)≈	**0.139 5(4.66E−2)**
	10	0.276 1(8.03E−2)−	0.174 9(1.03E−2)−	**0.163 2(5.73E−2)**
	15	0.273 0(4.93E−2)−	0.215 7(2.78E−2)−	**0.203 1(7.19E−2)**
	20	0.233 3(5.53E−2)−	0.193 7(1.39E−2)−	**0.179 5(5.80E−2)**
DTLZ6	5	0.122 0(4.20E−2)−	0.356 3(6.46E−2)−	**0.095 9(2.62E−2)**
	8	0.147 3(5.34E−2)−	0.287 8(8.07E−2)−	**0.126 8(3.77E−2)**
	10	0.236 2(1.33E−1)−	0.303 0(6.67E−2)−	**0.167 6(9.06E−2)**
	15	0.289 4(1.28E−1)−	0.359 2(1.27E−1)−	**0.190 6(9.95E−2)**
	20	0.237 3(1.12E−1)−	0.529 8(1.61E−1)−	**0.158 8(6.52E−2)**
DTLZ7	5	0.341 9(3.50E−2)−	2.610 9(1.96E−1)−	**0.325 7(1.36E−2)**
	8	0.976 8(7.75E−2)−	4.963 3(2.08E−1)−	**0.954 3(5.84E−2)**
	10	1.368 9(2.53E−1)−	6.040 8(2.06E−1)−	**1.206 7(9.08E−2)**
	15	6.897 3(1.26E−0)−	11.721(1.39E−1)−	**6.178 9(6.47E−1)**
	20	10.567(1.30E−0)−	15.855(2.14E−1)−	**9.587 0(7.35E−1)**
+/−/≈		0/29/6	0/34/1	

注：黑体数值为最佳测试结果；表中数值表示收敛性和多样性均值（方差）；“+”“−”“≈”分别表示所加策略在 IGD 指标上优于、劣于和无明显优劣于本文算法 MaOFA-RR.

极大拓展了种群搜索范围，有效提高了发掘更优解的概率. 实验结果表明，MaOFA-RR 在应对高维多目标优化问题时展现出了卓越的竞争力.

在未来的研究工作中，将深入探究高维多目标

优化问题中空间存储的难题,致力于提升算法性能,并将 MaOFA-RR 扩展至实际问题.

作者贡献声明: 赵嘉和胡秋敏提出研究思路、设计算法以及实验分析,并撰写论文;肖人彬对整体思路提出建议并修改论文;潘正祥、吕莉、王晖和樊棠怀提出指导意见并修改论文.

参 考 文 献

[1] Zhang Xingyi, Tian Ye, Cheng Ran, et al. A decision variable clustering-based evolutionary algorithm for large-scale many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on evolutionary Computation, 2016, 22(1): 97−112

[2] Zhao Jia, Hu Qiumin, Xiao Renbin, et al. Many-objective firefly algorithm for solving large-scale sparse optimization problems[J]. Control and Decision, 2024, 39(12): 3989−3996 (in Chinese)
(赵嘉, 胡秋敏, 肖人彬, 等. 求解大规模稀疏优化问题的高维多目标萤火虫算法[J]. 控制与决策, 2024, 39(12): 3989−3996)

[3] Wang R, Purshouse R C, Fleming P J. Preference-inspired co-evolutionary algorithm using adaptively generated goal vectors[C]// Proc of the 2013 IEEE Congress on Evolutionary Computation. Piscataway, NJ: IEEE, 2013: 916−923

[4] Zhang Qingfu, Li Hui. MOEA/D: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2007, 11(6): 712−731

[5] Dong Minggang, Liu Bao, Jing Chao. A many-objective evolutionary algorithm based on decomposition with dynamic resource allocation for irregular optimization[J]. Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering, 2020, 21(8): 1171−1190

[6] Li Gui, Wang Gaige, Xiao Renbin. A novel adaptive weight algorithm based on decomposition and two-part update strategy for many-objective optimization[J]. Information Sciences, 2022, 615: 323−347

[7] Abualigah L. Group search optimizer: A nature-inspired meta-heuristic optimization algorithm with its results, variants, and applications[J]. Neural Computing and Applications, 2021, 33(7): 2949−2972

[8] Hua Yicun, Liu Qiqi, Hao Kuangrong, et al. A survey of evolutionary algorithms for multi-objective optimization problems with irregular pareto fronts[J]. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 2021, 8(2): 303−318

[9] Yuan Jiawei, Liu Hailin, Yang Shuiping. An adaptive parental guidance strategy and its derived indicator-based evolutionary algorithm for multi-and many-objective optimization[J]. Swarm and Evolutionary Computation, 2024, 84: 101449

[10] Liang Zhengping, Luo Tingting, Hu Kaifeng, et al. An indicator-based many-objective evolutionary algorithm with boundary protection[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020, 51(9): 4553−4566

[11] Zhu Shuwei, Xu Lihong, Goodman E D, et al. A new many-objective evolutionary algorithm based on generalized Pareto dominance[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2021, 52(8): 7776−7790

[12] He Xiaoguang, Dai Cai. An improvement evolutionary algorithm based on decomposition and grid-based Pareto dominance for many-objective optimization[C]//Proc of the 2022 Global Conf on Robotics, Artificial Intelligence and Information Technology (GCRAIT). Piscataway, NJ: IEEE, 2022: 145−149

[13] Tang Jun, Liu Gang, Pan Qingtao. A review on representative swarm intelligence algorithms for solving optimization problems: Applications and trends[J]. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 2021, 8(10): 1627−1643

[14] Xiao Renbin. Four development stages of collective intelligence[J]. Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering, 2024, 25(7): 903−916

[15] Yang Wusi, Chen Li, Wang Yi, et al. Multi/many-objective particle swarm optimization algorithm based on competition mechanism[J]. Computational Intelligence and Neuroscience, 2020, 2020(1): 5132803

[16] Ye Tingyu, Wang Hui, Zeng Tao, et al. An improved two-archive artificial bee colony algorithm for many-objective optimization[J]. Expert Systems with Applications, 2024, 236: 121281

[17] Yang Xinshe. Nature-Inspired Metaheuristic Algorithm[M]. Frome: Luniver Press, 2008

[18] Yang Xinshe. Multiobjective firefly algorithm for continuous optimization[J]. Engineering with Computers, 2013, 29(2): 175−184

[19] Zhao Jia, Chen Wenping, Xiao Renbin, et al. Firefly algorithm with division of roles for complex optimal scheduling[J]. Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering, 2021, 22(10): 1311−1333

[20] Zhao Jia, Lv Siyu, Xiao Renbin, et al. Hierarchical learning multi-objective firefly algorithm for high-dimensional feature selection[J]. Applied Soft Computing Journal, 2024, 165: 112042

[21] Wang Handing, Jiao Licheng, Yao Xin. Two_Arch2: An improved two-archive algorithm for many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2014, 19(4): 524−541

[22] Ngatchou P, Zarei A, El-Sharkawi A. Pareto multi objective optimization[C]//Proc of the 13th Int Conf on Intelligent Systems Application to Power Systems. Piscataway, NJ: IEEE, 2005: 84−91

[23] Yu Shuhao, Su Shoubao, Lu Qingping, et al. A novel wise step strategy for firefly algorithm[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2014, 91(12): 2507−2513

[24] Gandomi A H, Yang Xinshe, Talatahari S, et al. Firefly algorithm with chaos[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2013, 18(1): 89−98

[25] Lyu Li, Zhao Jia, Wang Jiayuan, et al. Multi-objective firefly algorithm based on compensation factor and elite learning[J]. Future Generation Computer Systems, 2019, 91: 37−47

[26] Chen Juan, Zhao Jia, Xiao Renbin, et al. Double search mode firefly algorithm based on dynamic reverse learning and Levy flight[J]. Information and Control, 2023, 52(5): 607−615 (in Chinese)
(陈娟, 赵嘉, 肖人彬, 等. 基于动态反向学习和莱维飞行的双搜索模式萤火虫算法[J]. 信息与控制, 2023, 52(5): 607−615)

[27] Zhao Jia, Chen Dandan, Xiao Renbin, et al. Multi-objective firefly algorithm with adaptive region division[J]. Applied Soft Computing,

2023, 147: 110796

[28] Zhou Lingyun, Ding Lixin, Ma Maode, et al. An accurate partially attracted firefly algorithm[J]. Computing, 2019, 101(5): 477−493

[29] Das I, Dennis J E. Normal-boundary intersection: A new method for generating the Pareto surface in nonlinear multicriteria optimization problems[J]. SIAM Journal on Optimization, 1998, 8(3): 631−657

[30] Deb K, Jain H. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point-based nondominated sorting approach, part I: Solving problems with box constraints[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2013, 18(4): 577−601

[31] Yu Weiwei, Xie Chengwang, Bi Yingzhou, et al. Many-objective particle swarm optimization based on adaptive fuzzy dominance[J]. Acta Automatica Sinica, 2018, 44(12): 2278−2289 (in Chinese)
(余伟伟, 谢承旺, 闭应洲, 等. 一种基于自适应模糊支配的高维多目标粒子群算法[J]. 自动化学报, 2018, 44(12): 2278−2289)

[32] Xiao Renbin, Li Gui, Chen Zhizhen. Research progress and prospect of evolutionary many-objective optimization[J]. Control and Decision, 2023, 38(7): 1761−1788 (in Chinese)
(肖人彬, 李贵, 陈峙臻. 进化超多目标优化研究进展及展望[J]. 控制与决策, 2023, 38(7): 1761−1788)

[33] Sun Ying, Gao Yuelin. A multi-objective particle swarm optimization algorithm based on Gaussian mutation and an improved learning strategy[J]. Mathematics, 2019, 7(2): 148

[34] Qin Hui, Zhou Jianzhong, Lu Youlin, et al. Multi-objective differential evolution with adaptive Cauchy mutation for short-term multi-objective optimal hydro-thermal scheduling[J]. Energy Conversion and Management, 2010, 51(4): 788−794

[35] Tizhoosh H R. Opposition-based reinforcement learning[J]. Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics, 2006, 10(4): 578−585

[36] Liu Yiping, Gong Dunwei, Sun Xiaoyan, et al. Many-objective evolutionary optimization based on reference points[J]. Applied Soft Computing, 2017, 50: 344−355

[37] Sun Yanan, Yen G G, Yi Zhang. IGD indicator-based evolutionary algorithm for many-objective optimization problems[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2018, 23(2): 173−187

[38] Liu Yiping, Ishibuchi H, Masuyama N, et al. Adapting reference vectors and scalarizing functions by growing neural gas to handle irregular Pareto fronts[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2019, 24(3): 439−453

[39] Chen Huangke, Tian Ye, Pedrycz W, et al. Hyperplane assisted evolutionary algorithm for many-objective optimization problems[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2019, 50(7): 3367−3380

[40] Yuan Jiawei, Liu Hailin, Gu Fangqing, et al. Investigating the properties of indicators and an evolutionary many-objective algorithm using promising regions[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2020, 25(1): 75−86

[41] Liu Qiqi, Jin Yaochu, Heiderich M, et al. An adaptive reference vector-guided evolutionary algorithm using growing neural gas for many-objective optimization of irregular problems[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020, 52(5): 2698−2711

[42] Jiao Ruwang, Zeng Sanyou, Li Changhei, et al. Handling constrained many-objective optimization problems via problem transformation[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020, 51(10): 4834−4847

[43] Tian Ye, Cheng Ran, Zhang Xingyi, et al. PlatEMO: A MATLAB platform for evolutionary multi-objective optimization[J]. IEEE Computational Intelligence Magazine, 2017, 12(4): 73−87

[44] Audet C, Bigeon J, Cartier D, et al. Performance indicators in multiobjective optimization[J]. European Journal of Operational Research, 2021, 292(2): 397−422

[45] Li Miqing, Yao Xin. Quality evaluation of solution sets in multiobjective optimisation: A survey[J]. ACM Computing Surveys, 2019, 52(2): 1−38

[46] Rosner B, Glynn R J, Ting Lee M L. Incorporation of clustering effects for the Wilcoxon rank sum test: A large-sample approach[J]. Biometrics, 2003, 59(4): 1089−1098



Zhao Jia, born in 1981. PhD, professor, PhD supervisor. His main research interests include intelligent computing, pattern recognition, and big data analysis.

赵　嘉, 1981 年生.博士, 教授, 博士生导师.主要研究方向为智能计算、模式识别、大数据分析.



Hu Qiumin, born in 1998. Master candidate. His main research interest include intelligent computing research.

胡秋敏, 1998 年生. 硕士研究生. 主要研究方向为智能计算研究.



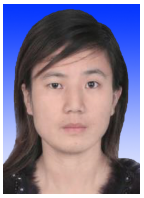
Xiao Renbin, born in 1965. PhD, professor, PhD supervisor. His main research interests include swarm intelligence, and complex system modeling and analysis.

肖人彬, 1965 年生. 博士, 教授, 博士生导师. 主要研究方向为群集智能、复杂系统建模与分析.



Pan Jeng-Shyang, born in 1961. PhD, professor, PhD supervisor. His main research interests include artificial intelligence, wireless sensor network, and digital watermarking and information hiding.

潘正祥, 1961 年生. 博士, 教授, 博士生导师. 主要研究方向为人工智能、无线传感器网络、数字水印及信息隐藏.



Lü Li, born in 1982. PhD, professor, master supervisor. Her main research interests include target tracking and swarm intelligence algorithm.

吕　莉, 1982 年生. 博士, 教授, 硕士生导师. 主要研究方向为目标跟踪、群智能算法.



Wang Hui, born in 1982. PhD, professor, master supervisor. His main research interests include evolutionary computation, swarm intelligence, scheduling, and water resource optimization.

王　晖, 1982年生. 博士，教授，硕士生导师. 主要研究方向为演化计算、群智能、调度、水资源优化.



Fan Tanghuai, born in 1962. PhD, professor, master supervisor. His main research interests include bionic information processing and multi-sensor signal fusion.

樊棠怀, 1962年生. 博士，教授，硕士生导师. 主要研究方向为仿生信息处理、多传感器信号融合.