

刘建豪, 王岗, 郭海, 等. 抛物型对称海脊引导波完整解析理论[J]. 海洋学报, 2023, 45(6): 36–43, doi:10.12284/hyxb2023095  
Liu Jianhao, Wang Gang, Guo Hai, et al. Complete analytical solutions for guided waves along a parabolic symmetrical ridge[J]. Haiyang Xuebao, 2023, 45(6): 36–43, doi:10.12284/hyxb2023095

# 抛物型对称海脊引导波完整解析理论

刘建豪<sup>1,2</sup>, 王岗<sup>1,2\*</sup>, 郭海<sup>3</sup>, 郑金海<sup>1,2</sup>, 杜齐鲁<sup>4</sup>

(1. 河海大学 海岸灾害及防护教育部重点实验室, 江苏 南京 210098; 2. 河海大学 港口海岸与近海工程学院, 江苏 南京 210098; 3. 国家海洋技术中心, 天津 300112; 4. 南京交通职业技术学院, 江苏 南京 211188)

**摘要:** 越洋海啸能够被大洋海脊引导并沿海脊传播至远场地区, 虽然传播速度较慢, 但携带较大的能量, 会对远场地区造成灾害影响, 相关研究对于提高海啸传播特性本质的认识具有重要意义。本文基于线性长波方程, 推导出了抛物型对称海脊引导波完整解析理论。研究表明对称型海脊同时存在对称与反对称引导波, 其自由水面波动可以表示为虚宗量 Bessel 函数形式。利用海脊中心对称条件给出了描述其频率与波数的频散关系。基于所提理论进一步分析讨论了引导波的运动特性, 包括频散关系、波速度、能量传播速度与波面空间分布等。本研究为揭示地形坡度由脊顶至两侧逐渐增加的海脊引导波运动特征, 预测实际越洋海啸中最具威胁性海啸波的到达时间提供了理论依据。

**关键词:** 海啸; 海脊引导波; 俘获波; 解析解; 线性长波

中图分类号: TV139.2

文献标志码: A

文章编号: 0253-4193(2023)06-0036-08

## 1 引言

海啸通常由海底地震、火山爆发、海底滑坡等产生, 在深海波幅较小但传播速度快, 当传播至近岸时由于地形变浅波高迅速增大, 特别是在半封闭海湾及港口还可能引起共振现象, 出现水面大幅持续波动, 对沿海地区造成灾害影响<sup>[1]</sup>。如 2018 年阿纳克·克卡托 (Anak Krakatau) 火山横向崩塌引发海啸, 造成 437 人死亡, 14 059 人受伤<sup>[2]</sup>, 2020 年萨摩斯 (Samos) 地震引发本世纪地中海东部最大的海啸, 造成 114 人死亡, 1 030 人受伤<sup>[3]</sup>, 2022 年汤加 (Tonga) 火山喷发引发海啸造成约 1.25 亿澳元损失<sup>[4]</sup>。频发的海啸灾害及其造成的巨大损失引起了学者对海啸产生机制与传播特性的研究热潮。

海啸致灾的主要因素包括海啸源、海啸传播路径以及近岸浅水效应<sup>[5]</sup>。对于传播距离超过 1 000 km 或

传播时间超过 3 h 的越洋海啸而言, 其在近场海域的破坏主要取决于海啸源的强度和方向, 而在远场区域的能量分布则与海脊、海沟、岛屿等海底地形密切相关。海啸波极易在折射和反射作用影响下被限制在海脊等水下隆起地形附近, 形成海脊引导波, 将海啸能传播至远场区域。如 1996 年伊里安查亚 (Irian Jaya) 地震海啸, 不仅摧毁了比亚克岛 (Biak Island) 北部海岸 75% 以上的建筑物, 由于南本州 (South-Honshu) 海脊的引导作用, 3 000 km 以外的日本也遭受 1 m 高的海啸大波袭击<sup>[6]</sup>。2015 年智利伊亚佩尔 (Illapel) 地震海啸, 不仅对智利沿岸造成重大破坏, 而且对复活节岛 (Easter Island)、日本、大洋洲等远场产生威胁, 最大波高达 2 m 左右<sup>[7-8]</sup>。2022 年汤加火山喷发引发海啸, 不仅对汤加造成巨大的经济损失, 甚至距离上万千米以外的日本、智利、美国西部沿岸测站也分别监测到最大波高为 1.8 m、3.3 m、2.6 m 的海啸波<sup>[9]</sup>。

收稿日期: 2022-10-08; 修订日期: 2023-01-30。

基金项目: 国家自然科学基金委-山东联合基金 (U1906230); 国家自然科学基金面上项目 (52071128); 江苏省自然科学基金杰出青年基金 (BK20220082); 江苏省高职院校青年教师企业实践培训项目 (2021QYSJ049)。

作者简介: 刘建豪 (1998—), 女, 湖南省娄底市人, 主要从事海啸传播变形与数值模拟研究。E-mail: jianhao\_liu@hhu.edu.cn

\* 通信作者: 王岗 (1982—), 男, 河北省张家口市人, 教授, 主要从事波浪传播变形研究。E-mail: gangwang@hhu.edu.cn

越洋海啸通常由两部分性质完全不同的波浪成分组成: 一部分为由震源直接传播而至的先导波, 速度快但能量较小; 另一部分则由海底山脊引导而至的波列, 速度慢、路径曲折但能量较大。对当地造成灾难性影响的海啸波通常都是由海底地形引导而至的波浪。如2004年印尼海啸, 不仅洗劫了震中附近的东南亚和南亚地区, 西南印度洋海岭(Southwest India Ridge)和大西洋中脊(Mid-Atlantic Ridge)还将此次海啸引导至大西洋, 而东南印度洋海岭(Southeast India Ridge), 太平洋-大西洋海脊(Pacific-Atlantic Ridge)和东太平洋海隆(East Pacific Rise)将海啸引导至太平洋, 且各远场地区最大波高抵达时间晚于先导波5~24 h不等<sup>[10]</sup>。2006年千岛(Kuril)海啸受科科平顶海山(Koko Guyot)和赫斯(Hess)海隆的引导作用, 最大波晚于先导波2 h抵达美国新月城(Crescent City)<sup>[11]</sup>。2011年日本海啸的传播同样证实海底山脊是海啸的天然导管和能量聚集器, 经大洋中脊的引导, 甚至影响至南极<sup>[12]</sup>。Gusiakov<sup>[13]</sup>明确指出影响海啸越洋传播的不仅是激发其产生的地震或火山强度, 还应考虑海底山脊对其传播的影响, 即导波效应。

海脊引导波的研究最早可以追溯到1953年, Jones<sup>[14]</sup>首先证实了顶部淹没的任意对称海脊上均能产生引导波。Longuet-Higgins<sup>[15]</sup>推导了台阶型对称海脊引导波解析解。随后 Buchwald<sup>[16]</sup>进一步将其扩展至两侧水深不等的台阶型海脊上。许洋等<sup>[17]</sup>通过物理模型试验证实了台阶型海脊引导波解析理论。考虑到实际海脊多为连续缓坡地形, Shaw 和 Neu<sup>[18]</sup>基于 Kummer 函数给出了三角型海脊上引导波的解析解。万鹏等<sup>[19]</sup>基于射线理论研究了指数型海脊上波浪轨迹的理论解。于洪荃等<sup>[20]</sup>利用 MIKE21-BW 模型分析了指数型弯曲海脊上引导波的运动规律。Wang 等<sup>[21-22]</sup>提出了双曲余弦型海脊上奇偶模式引导波的完整解析理论。

除前文中提及的三角型、指数型及双曲余弦型, 抛物型被认为是更适用于描述实际海脊剖面的函数曲线<sup>[23]</sup>。Zheng 等<sup>[24]</sup>推导了抛物型对称海脊引导波解析理论, 然而仅考虑了对称引导波, 忽略了反对称的情形。考虑到对称海脊同时存在对称与反对称引导波, 本文详细给出抛物型对称海脊上引导波的完整理论, 并讨论其运动特性。为准确预测远场海啸最大波到达时刻提供理论依据。本研究为阐明越洋海啸除先导波外由海底地形引导而至后续较大波列产生原因, 预测其在近岸出现的时间, 进而为海啸预警预报和风险评估提供理论支持。

## 2 理论推导

实际海脊多为由脊顶向两侧延伸的缓变地形, 本文采用抛物型函数表示海脊横向剖面。如图1所示, 沿海脊横向为  $x$  轴, 海脊中心线为  $y$  轴,  $z$  轴由静止水面向上为正。考虑海脊地形对称分布的情况, 此时水深函数可以表示为

$$h(x) = \begin{cases} s(-x+b)^2 & x < 0, \\ s(x+b)^2 & x \geq 0, \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $s$  和  $b$  是描述海脊形状的参数。

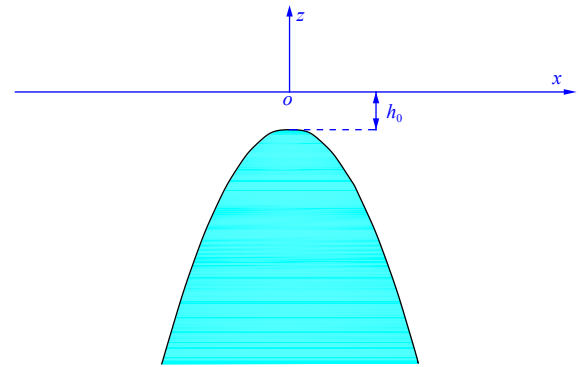


图1 抛物型海脊剖面

Fig. 1 Schematic of parabolic ridge profile

通常, 水深与海啸波长之比为一小量, 故采用线性长波理论来描述海脊引导波的运动。对应的连续方程为

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (uh)}{\partial x} + \frac{\partial (vh)}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

相应的动量方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad (4)$$

式中,  $\eta$  为自由水面;  $t$  为时间;  $h$  为水深;  $u$  和  $v$  分别为  $x$ 、 $y$  方向的速度分量。将式(3)和式(4)代入式(2)中消去  $u$  和  $v$ , 得:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - g \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right] = 0. \quad (5)$$

由于海脊引导波沿海脊即  $y$  方向传播, 则其自由水面  $\eta$  可以表示为

$$\eta(x, y, t) = \zeta(x) \exp [i(k_y y - \omega t)], \quad (6)$$

式中,  $\omega$  为引导波的角频率;  $k_y$  为沿  $y$  方向的波数分量;  $i$  为虚数单位。将式(6)代入式(5)并考虑海脊剖面形状(1), 则有:

$$(x-b)^2 \frac{d^2 \zeta}{dx^2} + 2(x-b) \frac{d\zeta}{dx} + \left[ \frac{\omega^2}{gs} - k_y^2 (x-b)^2 \right] \zeta = 0 \quad x < 0, \quad (7)$$

和

$$(x+b)^2 \frac{d^2 \zeta_r}{dx^2} + 2(x+b) \frac{d\zeta_r}{dx} + \left[ \frac{\omega^2}{gs} - k_y^2(x+b)^2 \right] \zeta_r = 0 \quad x \geq 0, \quad (8)$$

式中,  $\zeta_l$ 、 $\zeta_r$  分别表示海脊左侧 ( $x < 0$ ) 和右侧 ( $x \geq 0$ ) 的解。

对于左侧海脊, 进一步引入数学变换:

$$\tau_l = k_y(-x+b), \quad (9)$$

$$\zeta_l = \sqrt{\pi/2} \tau_l^{-\frac{1}{2}} \xi, \quad (10)$$

则式(7)可以表示为  $\nu$  阶变型 Bessel 方程<sup>[25]</sup>:

$$\tau_l^2 \frac{d^2 \xi}{d\tau_l^2} + \tau_l \frac{d\xi}{d\tau_l} - (\tau_l^2 + \nu^2) \xi = 0, \quad (11)$$

其中,

$$\nu = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4\omega^2}{gs}}, \quad (12)$$

方程(11)对应的通解为

$$\zeta_l = A \cdot \tau_l^{-\frac{1}{2}} \cdot I_\nu(\tau_l) + B \cdot \tau_l^{-\frac{1}{2}} \cdot K_\nu(\tau_l), \quad (13)$$

式中,  $A$  和  $B$  为待定系数;  $I_\nu(\tau)$  和  $K_\nu(\tau)$  分别为第一类变型 Bessel 函数和第二类变型 Bessel 函数:

$$I_\nu(\tau) = i^{-\nu} J_\nu(i\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{\tau}{2}\right)^{\nu+2k}, \quad (14)$$

$$K_\nu(\tau) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{I_{-\nu}(\tau) - I_\nu(\tau)}{\sin \nu \pi}, \quad (15)$$

式中,  $J_\nu$  为第一类 Bessel 函数;  $\Gamma$  为伽马函数:

$$\Gamma(\tau) = \int_0^{\infty} \exp(-t) t^{\tau-1} dt. \quad (16)$$

假定海脊引导波主要集中于海脊附近, 则远离海脊中心的幅趋应近于 0, 有:

$$\zeta_l \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad (17)$$

此时  $I_\nu(\tau)$  和  $K_\nu(\tau)$  有渐近关系:

$$\begin{cases} I_\nu(\tau) \Big|_{\tau \rightarrow \infty} \approx \frac{e^\tau}{\sqrt{2\pi\tau}} [1 - O(\tau^{-1})], \\ K_\nu(\tau) \Big|_{\tau \rightarrow \infty} \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\tau}} e^{-\tau} [1 + O(\tau^{-1})], \end{cases} \quad (18)$$

式中, 第二类变型 Bessel 函数  $K_\nu(\tau)$  趋近于 0, 而第一类变型 Bessel 函数  $I_\nu(\tau)$  趋近于  $\infty$ , 固令系数  $A=0$ 。因

$$c_g = \frac{d\omega}{dk_y} = \frac{-gs\nu \left\{ (2+2\tau_0^2) K_\nu(\tau_0) + \tau_0^2 [K_{\nu-2}(\tau_0) + K_{\nu+2}(\tau_0)] + \tau_0 [K_{\nu-1}(\tau_0) + K_{\nu+1}(\tau_0)] \right\}}{2k_y \omega \left[ \tau_0 K_{\nu-1}^{(1,0)}(\tau_0) + K_\nu^{(1,0)}(\tau_0) + \tau_0 K_{\nu+1}^{(1,0)}(\tau_0) \right]} = c \cdot n, \quad (28)$$

式中,  $n$  表示能量传播速度因子;  $K_\nu^{(1,0)}(\tau)$  表示对函数  $K_\nu(\tau)$  的阶数  $\nu$  求偏导, 即:

$$K_\nu^{(1,0)}(\tau_0) = \frac{\partial K_\nu(\tau_0)}{\partial \nu} = \frac{1}{2} \pi \csc(\nu\pi) \left( \frac{\partial I_\nu(\tau_0)}{\partial \nu} - \frac{\partial I_\nu(\tau_0)}{\partial \nu} \right) - \pi \cot(\nu\pi) K_\nu(\tau_0), \quad (29)$$

此左侧海脊上引导波最终表示为

$$\zeta_l = B \cdot \tau_l^{-\frac{1}{2}} \cdot K_\nu(\tau_l). \quad (19)$$

右侧海脊与左侧区域的求解过程类似, 式(8)同样可以简化为  $\nu$  阶变型 Bessel 方程:

$$\tau_r^2 \frac{d^2 \xi}{d\tau_r^2} + \tau_r \frac{d\xi}{d\tau_r} - (\tau_r^2 + \nu^2) \xi = 0, \quad (20)$$

其中

$$\tau_r = k_y(x+b), \quad (21)$$

$$\zeta_r = \sqrt{\pi/2} \tau_r^{-\frac{1}{2}} \xi, \quad (22)$$

方程(20)的通解可以表示为

$$\zeta_r = C \cdot \tau_r^{-\frac{1}{2}} \cdot I_\nu(\tau_r) + D \cdot \tau_r^{-\frac{1}{2}} \cdot K_\nu(\tau_r), \quad (23)$$

式中,  $C$  和  $D$  为待定系数。

同样由于海脊引导波限于海脊附近, 令  $C=0$ , 舍弃  $I_\nu(\tau)$  项, 则右侧海脊上引导波最终表示为

$$\zeta_r = D \cdot \tau_r^{-\frac{1}{2}} \cdot K_\nu(\tau_r). \quad (24)$$

由于引导波在海脊顶部应满足连续条件, 故有:

$$\begin{aligned} \zeta_l \Big|_{x=0^-} &= \zeta_r \Big|_{x=0^+} \\ \frac{\partial \zeta_l}{\partial x} \Big|_{x=0^-} &= \frac{\partial \zeta_r}{\partial x} \Big|_{x=0^+}, \end{aligned} \quad (25)$$

因此系数  $B$  与  $D$  的值应相等。此外, 对于对称海脊上的引导波, 不仅存在偶对称模式, 还存在奇对称模式<sup>[18]</sup>。

#### (1) 偶对称模式

此时海脊上自由水面运动关于海脊中线对称, 要求  $\zeta$  是  $x$  的偶函数, 即脊顶处波面导数为 0:

$$\frac{d\zeta_l}{dx} \Big|_{x=0^-} = \frac{d\zeta_r}{dx} \Big|_{x=0^+} = 0, \quad (26)$$

将海脊引导波左右侧区域的表达式(19)和(24)带入式(26), 得:

$$\tau_0 K_{\nu-1}(\tau_0) + K_\nu(\tau_0) + \tau_0 K_{\nu+1}(\tau_0) = 0, \quad (27)$$

式中,  $\tau_0 = k_y b$ 。

在给定海脊地形参数  $s$ 、 $b$  的情况下, 上式确定了  $\omega$  与  $k_y$  之间的关系, 即为偶对称模式的频散关系。每个确定的  $\omega$  对应无数个  $k_y$ , 最大值  $k_y$  对应称为 0 阶模态, 第二大值  $k_y$  对应称为 1 阶模态……, 以此类推。进一步由式(27)得海脊引导波的能量传播速度为

式中

$$\frac{\partial I_\nu(\tau_0)}{\partial \nu} = I_\nu(\tau_0) \ln \left( \frac{1}{2} \tau_0 \right) - \left( \frac{1}{2} \tau_0 \right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu+k+1)} \frac{\left( \frac{1}{4} \tau_0^2 \right)^k}{k!}. \quad (30)$$

由于偶对称引导波沿海脊两侧完全对称,通常对应产生于脊顶处的海啸在海脊形成的引导波。

### (2) 奇对称模式

此时海脊上自由水面运动关于海脊中线反对称,要求  $\zeta$  是  $x$  的奇函数,即脊顶处波面恒为 0:

$$\zeta_l|_{x=0^-} = \zeta_r|_{x=0^+} = 0, \quad (31)$$

得:

$$K_v(\tau_0) = 0, \quad (32)$$

式(32)即为奇对称模式对应的频散关系。奇对称模式下不存在 0 模态,按  $k_y$  值降序排列分别定义为 1 阶模态, 2 阶模态……。进一步得到奇对称模式的海脊俘获波的能量传播速度为

$$c_g = \frac{d\omega}{dk_y} = \frac{-bgsv[K_{v-1}(\tau_0) + K_{v+1}(\tau_0)]}{2\omega K_v^{(1,0)}(\tau_0)} = c \cdot n, \quad (33)$$

由于实际海啸通常产生于海脊之外,海啸波在海脊上的运动必不对称,主要以奇对称形式的引导波沿海脊运动。

## 3 结果分析

本节将基于以上推导解析理论详细讨论海脊形状等参数对海脊引导波的频散关系、相位速度、能量速度及空间分布的影响,明确其传播演化特征。

### 3.1 频散关系

根据式(27)和式(32)可知,给定海脊形状参数  $s$ 、 $b$  时,可以得到每一个确定的  $\omega$  所对应的  $k_y$  值。隐式(27)和式(32)的求解可采用数学软件 Matlab 或一些高级计算机语言所附带的函数库,本文采用张善杰和金建铭<sup>[26]</sup>开发的特殊函数程序求解。为进一步比较奇偶模式海脊引导波,本文的海脊形状参数  $s$  和

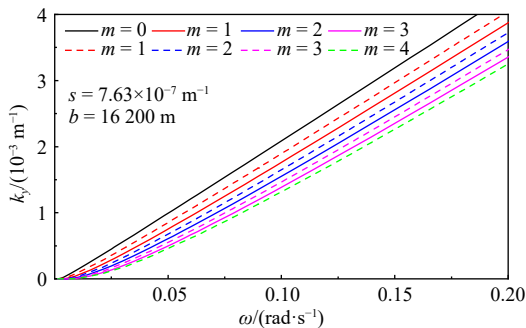


图2 抛物型海脊引导波的频散关系

Fig. 2 Dispersion relationships for guided waves over a parabolic ridge

实线表示偶对称模式,虚线表示奇对称模式

The solid lines indicate the even-symmetric mode and the dashed lines represent the odd-symmetric mode

$b$  与脊顶水深  $h_0$  参考文献[24]。图2给出了抛物型海脊引导波奇偶对称模式的频散关系。两种情况下,波数  $k_y$  均随  $\omega$  的增大而增大,且随着模态增加,增加越慢。当角频率不变时,低模态的波数大于高模态的波数,而且同一个模态下,奇对称模式对应的波数大于偶对称模式对应的波数。

### 3.2 相位速度与能量传播速度

图3展示了不同模态海脊引导波相位速度、能量传播速度因子和能量传播速度随地形参数  $s$  和  $b$  以及角频率  $\omega$  的变化情况。对于固定的  $s$  和  $b$ ,相位速度  $c$  随  $\omega$  的增大急剧下降,最终趋近于脊顶处的浅水波速度  $(gh_0)^{1/2}$ 。而同一角频率下,模态越高、相位速度越大;相同模态时,偶对称引导波的相位速度大于奇对称引导波。引导波的相位速度随着海脊地形参数  $s$  和  $b$  而增大,模态越高,增率越大。相同模态时偶对称引导波的相位速度大于奇对称引导波。能量传播速度因子  $n$  随  $\omega$  增大而增大,随  $s$  增大而减小,其值不受参数  $b$  变化影响,且  $n$  总小于 1。对固定的  $s$  和  $b$ ,能量传播速度随  $\omega$  的增大急剧下降,随后趋于浅水波速度  $(gh_0)^{1/2}$ ,并且随着模态的增加,下降趋势变缓。这与三角形海脊<sup>[18]</sup>上的能量传播速度变化规律一致,但与双曲余弦海脊<sup>[21]</sup>上的能量传播速度变化规律相反。这可能是由于引导波与海脊剖面形状密切相关。三角形海脊两侧的地形坡度是固定的,抛物型海脊两侧的地形坡度虽然随着水深的增加而增加,但其变化率远小于双曲余弦型海脊。给定  $b$  和  $\omega$  时,能量传播速度随着  $s$  的增加而增大,低模态时能量传播速度增长趋势平缓,高模态时呈指数型快速增长。这与双曲余弦海脊<sup>[21]</sup>引导波的运动特征截然相反,其能量传播速度随着地形参数的增加而减小。对于另一地形参数  $b$ ,能量传播速度随其近似线性增加。此外,对于相同模态的奇偶对称海脊引导波,偶对称引导波的相位速度、群速度均大于奇对称引导波。本文提出的抛物型海脊引导波理论所揭示的相位速度及能量传播速度与双曲余弦海脊引导波呈现出完全不同的运动特性,表明海脊引导波与其地形密切相关,只有选取了恰当地形的引导波理论才能合理解释实际越洋海啸在特定海脊上的引导现象。

### 3.3 空间能量分布

图4为偶对称和奇对称引导波在海脊横截面的空间分布。偶对称引导波波幅关于海脊中心线对称,各模态最大振幅均出现在脊顶处;奇对称引导波波幅关于海脊中心线反对称,脊顶处波幅始终为 0,振幅在一侧达到最大值,在另一侧相同位置对应为最小

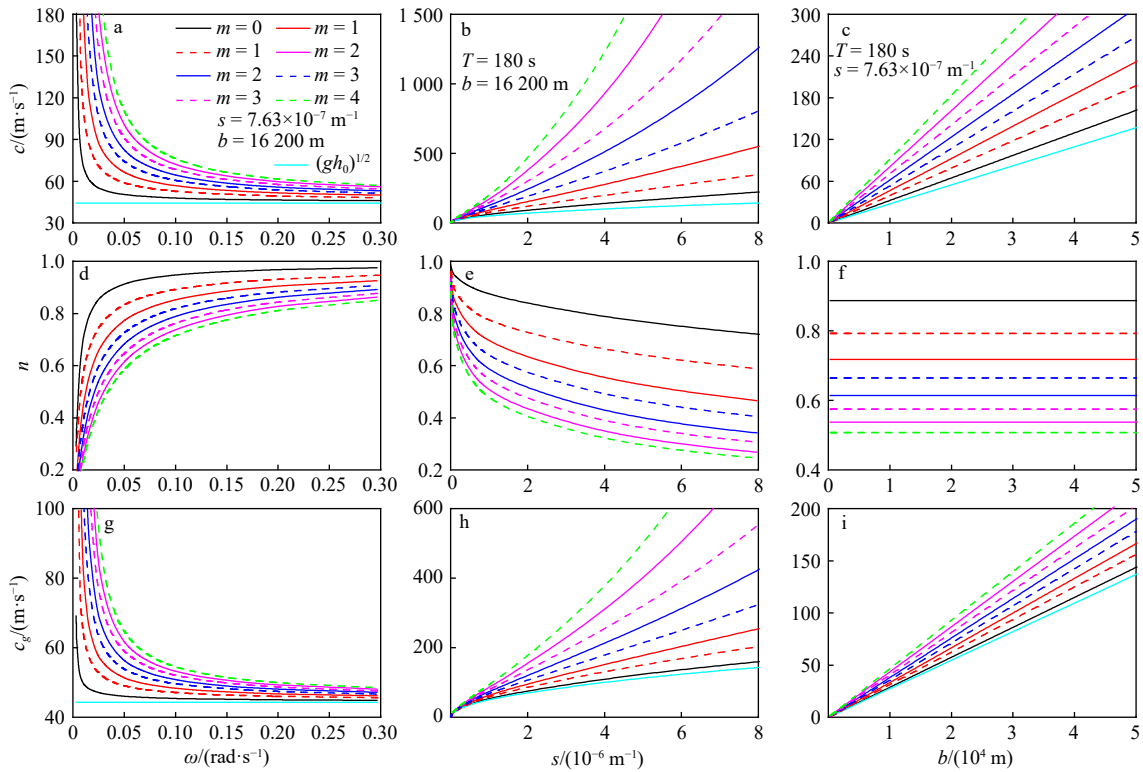


图 3 引导波的相位速度、能量传播速度因子与能量传播速度随角频率  $\omega$  和地形参数  $s, b$  变化示意图

Fig. 3 Phase velocity, energy velocity factor and group velocity against angular frequency  $\omega$ , and ridge shape parameters  $s, b$  for guided waves

实线表示偶对称模式, 虚线表示奇对称模式

The solid lines indicate the even-symmetric mode and the dashed lines represent the odd-symmetric mode

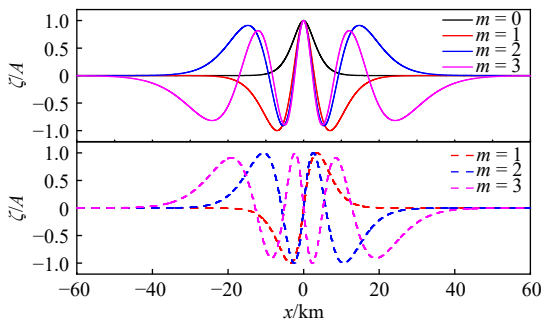


图 4 抛物型海脊引导波沿  $x$  方向的空间分布

Fig. 4 Spatial distribution of guided waves over a parabolic ridge along the  $x$ -axis

实线表示偶对称模式, 虚线表示奇对称模式 ( $s = 7.63 \times 10^{-7} \text{ m}^{-1}$ ,  $b = 1.62 \times 10^4 \text{ m}$ ,  $h_0 = 200 \text{ m}$ ,  $T = 180 \text{ s}$ )

The solid lines indicate the even-symmetric mode and the dashed lines represent the odd-symmetric mode ( $s = 7.63 \times 10^{-7} \text{ m}^{-1}$ ,  $b = 1.62 \times 10^4 \text{ m}$ ,

$h_0 = 200 \text{ m}$ ,  $T = 180 \text{ s}$ )

值。引导波的模态与海脊两侧的波节点相对应。对于偶对称模式, 0 模态无波节点存在, 1 模态海脊两侧各有一个波节点, 2 模态海脊两侧各有两个波节点……; 对于奇对称模式, 1 模态引导波在脊顶有一个波节点, 2 模态在脊顶和海脊两侧各有 1 个波节

点……。无论是奇对称模式还是偶对称模式海脊引导波, 低模态波动主要集中于脊顶附近, 随着模态的增加, 有更多的能量分布于海脊外侧。

图 5 为海脊引导波奇偶对称模式前四阶模态的三维空间波面分布。海脊引导波沿海脊方向呈周期性行进波, 沿海脊横截面波幅逐渐减小。偶对称海脊引导波波面运动沿海脊中心线完全对称, 而奇对称海脊引导波波面沿海脊中心线呈反对称过程, 即一侧波面为正时, 对应的另外一侧为相同幅值的负运动。对于较低模态的海脊引导波, 能量主要集中于海脊顶端; 对于高模态海脊引导波, 波幅沿海脊截面缓慢减小, 波能分布于更广的范围。

## 4 结论

越洋海啸中最具威胁性和破坏性的波浪通常是由海底山脊引导而至的、速度较慢但能量巨大的波浪成分, 它一般出现在由震源直接传播而至的先导波到达后的数小时, 甚至更晚。这种由于海底山脊对波浪俘获效应而导致海啸波能量聚集并沿其传播的现象对海啸演化变形规律研究有着重要意义。本文基

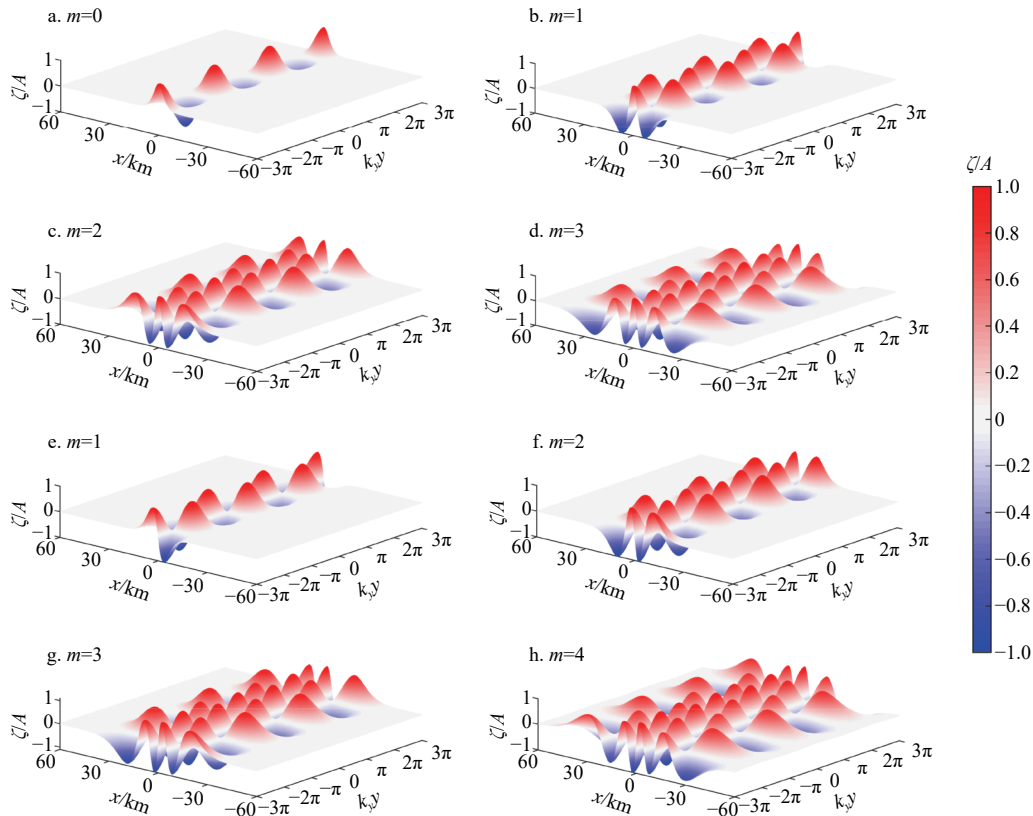


图5 引导波的三维空间分布 ( $s = 7.63 \times 10^{-7} \text{ m}^{-1}$ ,  $b = 1.62 \times 10^4 \text{ m}$ ,  $h_0 = 200 \text{ m}$ ,  $T = 180 \text{ s}$ )

Fig. 5 Three-dimensional spatial distribution of guided waves ( $s = 7.63 \times 10^{-7} \text{ m}^{-1}$ ,  $b = 1.62 \times 10^4 \text{ m}$ ,  $h_0 = 200 \text{ m}$ ,  $T = 180 \text{ s}$ )

a-d 为偶对称模式, e-h 为奇对称模式

a-d indicates the even-symmetric mode and the e-h represents the odd-symmetric mode

于线性长波理论推导了抛物型海脊上引导波的完整解析解。采用  $\nu$  阶 Bessel 函数表示引导波自由水面运动, 并根据脊顶处连续条件分别给出了奇偶对称引导波的频散关系。结果表明, 相位速度与能量传播速度随角频率增大而减小, 随地形参数  $s$  和  $b$  增大而增大。海脊引导波沿海脊方向为行进波、沿截面方向为驻波。偶对称模式海脊引导波关于海脊中心对称、脊顶处自由水面沿海脊截面方向导数为 0, 而奇对称模式引导波关于海脊中心反对称、脊顶处自由水面恒为 0。海脊引导波的模式与其波节点对应, 低模式引导波能量主要集中于脊顶附近, 模式越高、能量分布越广。由于实际海脊地形的复杂性, 本文在现

有三角型、指数型及双曲余弦型海脊理论的基础上进一步提出了抛物型海脊俘获波理论, 为揭示地形坡度由脊顶至两侧逐渐增加的海脊引导波运动特征, 预测实际越洋海啸中最具威胁性海啸波的到达时间及强度提供理论依据。此外, 由于海底山脊是相对固定的, 对于震源相近的海啸, 其影响路径几乎是相同的, 也即越洋海啸的传播是“有迹可循”的, 因此研究对于海啸风险评估也具有重要意义。本文从运动学角度出发阐明抛物型海脊引导波运动特征, 并未涉及其激发因素及对近岸灾害影响等动力特征, 今后可基于数值模拟与物理模型试验开展相关深入研究。

#### 参考文献:

- [1] 王岗, 高俊亮, 王培涛, 等. 港湾共振研究综述[J]. 海洋学报, 2017, 39(11): 1-13.  
Wang Gang, Gao Junliang, Wang Peitao, et al. Review on harbor resonance[J]. Haiyang Xuebao, 2017, 39(11): 1-13.
- [2] Grilli S T, Tappin D R, Carey S, et al. Modelling of the tsunami from the December 22, 2018 lateral collapse of Anak Krakatau volcano in the Sunda Straits, Indonesia[J]. Scientific Reports, 2019, 9(1): 11946.
- [3] Hu Gui, Feng Wanpeng, Wang Yuchen, et al. Source characteristics and exacerbated tsunami hazard of the 2020 Mw 6.9 Samos earthquake in eastern Aegean Sea[J]. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 2022, 127(5): e2022JB023961.
- [4] Kubota T, Saito T, Nishida K. Global fast-traveling tsunamis driven by atmospheric Lamb waves on the 2022 Tonga eruption[J]. Science,

- 2022, 377(6601): 91–94.
- [5] Satake K. Effects of bathymetry on tsunami propagation: application of ray tracing to tsunamis[J]. *Pure and Applied Geophysics*, 1988, 126(1): 27–36.
- [6] Koshimura S I, Imamura F, Shuto N. Characteristics of tsunamis propagating over oceanic ridges: numerical simulation of the 1996 Irian Jaya earthquake tsunami[J]. *Natural Hazards*, 2001, 24(3): 213–229.
- [7] Wang Yuchen, Satake K, Cienfuegos R, et al. Far-field tsunami data assimilation for the 2015 Illapel earthquake[J]. *Geophysical Journal International*, 2019, 219(1): 514–521.
- [8] Heidarzadeh M, Satake K, Takagawa T, et al. A comparative study of far-field tsunami amplitudes and ocean-wide propagation properties: insight from major trans-Pacific tsunamis of 2010–2015[J]. *Geophysical Journal International*, 2018, 215(1): 22–36.
- [9] Carvajal M, Sepúlveda I, Gubler A, et al. Worldwide signature of the 2022 Tonga volcanic tsunami[J]. *Geophysical Research Letters*, 2022, 49(6): e2022GL098153.
- [10] Titov V, Rabinovich A B, Mofjeld H O, et al. The global reach of the 26 December 2004 Sumatra Tsunami[J]. *Science*, 2005, 309(5743): 2045–2048.
- [11] Kowalik Z, Horrillo J, Knight W, et al. Kuril Islands tsunami of November 2006: 1. Impact at Crescent City by distant scattering[J]. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 2008, 113(C1): C01020.
- [12] He Jianfeng, Zhang Fang, Lin Ling, et al. Effects of the 2010 Chile and 2011 Japan tsunamis on the Antarctic coastal waters as detected via online mooring system[J]. *Antarctic Science*, 2012, 24(6): 665–671.
- [13] Gusiakov V K. Strongest tsunamis in the world ocean and the problem of marine coastal security[J]. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, 2014, 50(5): 435–444.
- [14] Jones D S. The eigenvalues of  $\nabla^2 u + \lambda u = 0$  when the boundary conditions are given on semi-infinite domains[J]. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1953, 49(4): 668–684.
- [15] Longuet-Higgins M S. On the trapping of waves along a discontinuity of depth in a rotating ocean[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1968, 31(3): 417–434.
- [16] Buchwald V T. Long waves on oceanic ridges[J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1969, 308(1494): 343–354.
- [17] 许洋, 王岗, 王培涛, 等. 台阶型海脊俘获波的实验研究[J]. *海洋预报*, 2020, 37(2): 29–37.
- Xu Yang, Wang Gang, Wang Peitao, et al. Experimental investigation on trapped waves over the stepped ridge[J]. *Marine Forecasts*, 2020, 37(2): 29–37.
- [18] Shaw R P, Neu W. Long-wave trapping by oceanic ridges[J]. *Journal of Physical Oceanography*, 1981, 11(10): 1334–1344.
- [19] 万鹏, 王岗, 于洪荃, 等. 基于射线理论的海脊俘获波机制[J]. *海洋学报*, 2019, 41(11): 35–39.
- Wan Peng, Wang Gang, Yu Hongquan, et al. Mechanism of trapped wave over an ocean ridge based on the ray theory[J]. *Haiyang Xuebao*, 2019, 41(11): 35–39.
- [20] 于洪荃, 胡见, 王岗, 等. 海啸俘获波在弯曲海脊上的传播规律[J]. *海洋学报*, 2020, 42(1): 40–45.
- Yu Hongquan, Hu Jian, Wang Gang, et al. Trapped tsunami waves propagation over curved ocean ridges[J]. *Haiyang Xuebao*, 2020, 42(1): 40–45.
- [21] Wang Gang, Liang Qiuhua, Shi Fengyan, et al. Analytical and numerical investigation of trapped ocean waves along a submerged ridge[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2021, 915: A54.
- [22] 王岗, 胡见, 王培涛, 等. 双曲余弦海脊上海啸俘获波的解析与数值研究[J]. *海洋学报*, 2018, 40(5): 15–23.
- Wang Gang, Hu Jian, Wang Peitao, et al. Analytical and numerical investigation of tsunami trapped waves over a hyperbolic-cosine squared ocean ridge[J]. *Haiyang Xuebao*, 2018, 40(5): 15–23.
- [23] Killworth P D. How much of a baroclinic coastal kelvin wave gets over a ridge?[J]. *Journal of Physical Oceanography*, 1989, 19(3): 321–341.
- [24] Zheng Jinhai, Xiong Mengjie, Wang Gang. Trapping mechanism of submerged ridge on trans-oceanic tsunami propagation[J]. *China Ocean Engineering*, 2016, 30(2): 271–282.
- [25] 王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2012.
- Wang Zhuxi, Guo Dunren. Introduction to Special Function[M]. Beijing: Peking University Press, 2012.
- [26] 张善杰, 金建铭. 特殊函数计算手册[M]. 南京: 南京大学出版社, 2011.
- Zhang Shanjie, Jin Jianming. Computation of Special Functions[M]. Nanjing: Nanjing University Press, 2011.

## Complete analytical solutions for guided waves along a parabolic symmetrical ridge

Liu Jianhao<sup>1,2</sup>, Wang Gang<sup>1,2</sup>, Guo Hai<sup>3</sup>, Zheng Jinhai<sup>1,2</sup>, Du Qilu<sup>4</sup>

(1. Key Laboratory of Coastal Disaster and Defence, Ministry of Education, Hohai University, Nanjing 210098, China; 2. College of Harbour, Coastal and Offshore Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China; 3. National Ocean Technology Center, Tianjin 300112, China; 4. Nanjing Communications Institute of Technology, Nanjing 211188, China)

**Abstract:** Transoceanic tsunamis can be guided by oceanic ridges and transferred large energy with slower velocity, hitting far-field regions and causing disaster effects. Therefore, the study on guided waves is crucial to improve the understanding of tsunami propagation characteristics. Based on the linear shallow water equation, the complete analytical solutions for guided waves over a parabolic symmetric ridge are derived. It is shown that both symmetric and anti-symmetric guided waves can exist along symmetric ridges and the free surface is described using the modified Bessel functions. Dispersion relationships, determining the relationship between the wave frequency and the wavenumber, are obtained from the continuity of water surface and velocity at the top of the ridge. The kinematic characteristics of guided waves, such as phase velocity, group velocity and surface spatial distribution are further revealed. This paper theoretically elaborates the guided waves over the ridge with its topographic slope generally increasing from the top to the bottom and provides the formulas to predicate the arrival time of the most threatening waves for the actual transoceanic tsunamis.

**Key words:** tsunamis; oceanic guided waves; trapped waves; analytical solutions; linear shallow water equations