

谢蓉, 熊焱, 童朝锋, 等. 对称指数地形水槽内纵波和横波解析解研究[J]. 海洋学报, 2023, 45(6): 44–51, doi:10.12284/hyxb2023081

Xie Rong, Xiong Yan, Tong Chaofeng, et al. Analytic solutions of longitudinal and cross waves in the wave flume with an exponential symmetric shoal[J]. Haiyang Xuebao, 2023, 45(6): 44–51, doi:10.12284/hyxb2023081

# 对称指数地形水槽内纵波和横波解析解研究

谢蓉<sup>1,2</sup>, 熊焱<sup>1,2\*</sup>, 童朝锋<sup>1,2</sup>, 王岗<sup>1,2</sup>

(1. 河海大学 海岸灾害及防护教育部重点实验室, 江苏 南京 210098; 2. 河海大学 港口海岸与近海工程学院, 江苏 南京 210098)

**摘要:** 水槽实验通常用于波浪传播变形及防波堤护面块体稳定性等研究, 涉及的波要素沿水槽纵向变化且在垂直于水槽的横向保持不变。然而实验中当波长与水槽宽度满足一定关系时, 可能出现明显的横向波动现象。本文针对对称指数型隆起地形, 基于线性长波方程分别推导了其内沿水槽方向的纵波与垂直于水槽方向的横波的解析表达。水槽内对称指数地形上的纵波可以表示为第一类和第二类一阶贝塞尔函数的形式, 并结合自由水面及速度连续条件最终得到其完整解。对称指数地形上分别存在偶对称和奇对称模态的横波, 可表示为第一类  $\nu$  阶贝塞尔函数的形式。偶对称模态  $(n, m)$  沿水槽方向有  $n$  条波节线, 在垂直于水槽方向存在  $2m$  条波节线; 奇对称模态  $(n, m)$  沿水槽方向存在  $n$  条波节线而在垂直方向有  $2m-1$  条波节线。

**关键词:** 横波; 解析理论; 波浪水槽; 指数地形

中图分类号: TV139

文献标志码: A

文章编号: 0253-4193(2023)06-0044-08

## 1 引言

波浪是近岸最重要的动力因素之一, 对于泥沙运动、岸滩演变及海岸工程安全具有重要影响<sup>[1-3]</sup>。波浪水槽实验是波浪传播变形及防波堤结构稳定性等研究的常用手段之一<sup>[4-5]</sup>。通常, 水槽实验中波浪要素沿水槽纵向变化而在其垂直的横向保持不变。然而, 一些实验中发现在某些条件下水槽内会出现明显的横向波动现象<sup>[6-8]</sup>。

针对垂直于水槽的横向波动现象, Lin 和 Howard<sup>[9]</sup>开展了水槽实验, 发现当入射波的频率是横波频率的两倍时可以激发显著的横波, 并将该现象称之为次谐横波。Garrett<sup>[7]</sup>首次从数学上解释了有限长水槽内次谐横波的产生机理。Mahony<sup>[9]</sup>进一步将其拓展至长水槽内的次谐横波情况, 并指出黏性耗散限制横波的临界波幅。Barnard 和 Pritchard<sup>[10]</sup>开展了物理模型实

验验证了 Mahony<sup>[9]</sup>的理论, 并进一步分析了横波的增长、稳定和衰减过程。Bernoff 等<sup>[11]</sup>进一步从理论上研究了水槽边壁和底部、自由表面及造波机黏性边界对横波的影响。Ayanle 等<sup>[12]</sup>基于渐进理论研究了两个模态横波相互作用下波幅的三维演变过程。Deng<sup>[13]</sup>从理论上指出考虑三阶非线性相互作用时, 水槽内可出现与造波机频率相同的横波, 称之为同频横波, 并开展了物理模型实验验证了其理论。

以上研究均针对常水深水槽中的横波。实际水槽物理模型实验还涉及波浪在地形上的传播变形及破碎情况<sup>[8, 14-15]</sup>, 这些变水深地形水槽实验中是否存在横向波动是亟需深入研究的内容。王岗和郑金海<sup>[16]</sup>基于线性浅水方程推导了梯形底床波浪水槽中横波的解析解, 并讨论了水槽宽度及地形等因素对横波的影响。Wang 等<sup>[17]</sup>提出了波浪水槽中双曲余弦地形上横波的解析理论。为进一步证明变水深地形上的横

收稿日期: 2022-11-11; 修订日期: 2023-01-12。

基金项目: 江苏省自然科学基金杰出青年基金(BK20220082); 国家自然科学基金(52071128)。

作者简介: 谢蓉(1998—), 女, 四川省内江市人, 主要从事水动力数值模拟研究。E-mail: 395162775@qq.com

\* 通信作者: 熊焱(1992—), 女, 江苏省南京市人, 讲师, 主要从事极端水灾害数值模拟研究。E-mail: xiongyan@hhu.edu.cn

波是一种较为普遍的波浪现象,并不限于梯形及双曲余弦型地形,本文针对指数地形的波浪传播变形开展研究,从理论上揭示其横波的运动特征。

## 2 地形及控制方程

如图1所示,假设在水深为 $h_1$ 的水槽内布置一个对称指数地形,波浪从左侧产生,向右传播。采用笛卡尔坐标系,其中沿水槽纵向为 $x$ 轴,横向为 $y$ 轴, $z$ 轴从静水位垂直向上为正,坐标原点位于指数地形

顶部中心线的静水面上。设水槽宽为 $-b \leq y \leq b$ ,指数地形长为 $-L \leq x \leq L$ 。将水槽分为4个区域,其水深分别为

$$h = \begin{cases} h_1 & x < -L \\ h_0 \exp(-\lambda x) & -L \leq x < 0 \\ h_0 \exp(\lambda x) & 0 \leq x \leq L \\ h_1 & x > L \end{cases}, \quad (1)$$

式中, $h_0$ 是地形顶部的水深,单位:m; $\lambda$ 为决定隆起地形变化率的参数,单位: $\text{m}^{-1}$ ;常水深 $h_1 = h_0 \exp(\lambda L)$ 。

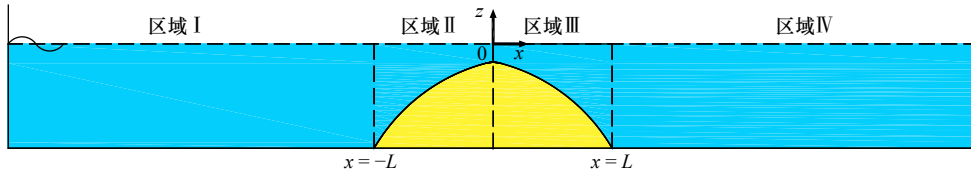


图1 波浪水槽示意图

Fig. 1 Definition sketch of the wave flume

本文采用线性长波方程描述水槽内的波动现象:

$$\eta_{tt} - g \nabla (h \nabla \eta) = 0, \quad (2)$$

式中, $\eta$ 是自由水面; $t$ 表示时间; $g$ 是重力加速度; $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ 是水平梯度算子。

## 3 纵波

### 3.1 理论推导

首先假设水槽中只存在纵波,由造波机产生并沿着水槽纵向传播,因此自由水面表达式可以写为

$$\eta_p(x, t) = \zeta_p(x) \exp(i\omega t), \quad (3)$$

式中, $\omega$ 是入射波的角频率;下标 $p$ 代表纵波; $i = (-1)^{1/2}$ ,为虚数单位。

对于区域I,指数隆起地形之前存在入射波及反射波,其波面方程表示为

$$\zeta_{p,I} = \exp(-ikx) + C \cdot \exp(ikx), \quad (4)$$

式中,设入射波的入射波幅为单位1; $C$ 为反射波的反射系数;下标I表示区域I; $k = \omega / (gh_1)^{1/2}$ 是常水深的波数。

对于区域II,将自由水面表达式(3)代入线性浅水方程(2)并考虑地形公式(1),有

$$\frac{d^2 \zeta_p}{dx^2} - \lambda \frac{d\zeta_p}{dx} + \frac{\omega^2}{gh_0} \exp(\lambda x) \zeta_p = 0, \quad (5)$$

引入两个变换量:

$$\chi = \frac{2\omega}{\lambda \sqrt{gh_0}} \exp\left(\frac{1}{2}\lambda x\right), \quad (6)$$

$$\zeta_p = \frac{\lambda \sqrt{gh_0}}{2\omega} \chi F(\chi), \quad (7)$$

此时式(5)可化简为一阶贝塞尔方程的形式,即:

$$\chi^2 F_{\chi\chi} + \chi F_{\chi} + (\chi^2 - 1) F = 0, \quad (8)$$

其对应的通解为

$$F(\chi) = A_1 J_1(\chi) + B_1 Y_1(\chi), \quad (9)$$

式中, $A_1$ 和 $B_1$ 是常数; $J_1(\chi)$ 和 $Y_1(\chi)$ 是一阶第一类和第二类贝塞尔函数<sup>[18]</sup>。

最终得区域II的波面表达式为

$$\zeta_p = \exp\left(\frac{1}{2}\lambda x\right) \cdot \left\{ A_1 J_1 \left[ \frac{2\omega}{\lambda \sqrt{gh_0}} \exp\left(\frac{1}{2}\lambda x\right) \right] + B_1 Y_1 \left[ \frac{2\omega}{\lambda \sqrt{gh_0}} \exp\left(\frac{1}{2}\lambda x\right) \right] \right\}. \quad (10)$$

同理对于区域III,将自由水面表达式(3)代入线性长波方程(2)并考虑地形公式(1),得

$$\frac{d^2 \zeta_p}{dx^2} + \lambda \frac{d\zeta_p}{dx} + \frac{\omega^2}{gh_0} \exp(-\lambda x) \zeta_p = 0, \quad (11)$$

引入自变量:

$$\tau = \frac{2\omega}{\lambda \sqrt{gh_0}} \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda x\right), \quad (12)$$

其对应的因变量为

$$\zeta_p = \frac{\lambda \sqrt{gh_0}}{2\omega} \tau Q(\tau), \quad (13)$$

同样得一阶贝塞尔方程:

$$\tau^2 Q_{\tau\tau} + \tau Q_{\tau} + (\tau^2 - 1) Q = 0, \quad (14)$$

其通解为

$$Q(\tau) = A_2 J_1(\tau) + B_2 Y_1(\tau), \quad (15)$$

最终得到区域III的波面方程为

$$\zeta_p = \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda x\right) \cdot \left\{ A_2 J_1 \left[ \frac{2\omega}{\lambda \sqrt{gh_0}} \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda x\right) \right] + B_2 Y_1 \left[ \frac{2\omega}{\lambda \sqrt{gh_0}} \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda x\right) \right] \right\}. \quad (16)$$

对于区域 IV, 隆起地形之后只存在透射波, 其自由水面可表示为

$$\zeta_p = D \cdot \exp(-ikx), \quad (17)$$

式中,  $D$  为透射波的透射系数。

由不同区域处自由水面及速度连续有:

$$\zeta_p = \zeta_p|_{x=-L}, \zeta_p = \zeta_p|_{x=0}, \zeta_p = \zeta_p|_{x=L}, \quad (18)$$

$$\frac{d\zeta_p}{dx} = \frac{d\zeta_p}{dx}\Big|_{x=-L}, \frac{d\zeta_p}{dx} = \frac{d\zeta_p}{dx}\Big|_{x=0}, \frac{d\zeta_p}{dx} = \frac{d\zeta_p}{dx}\Big|_{x=L}, \quad (19)$$

联合求解式(18)和(19)可得参数  $C$ 、 $A_1$ 、 $B_1$ 、 $A_2$ 、 $B_2$  和  $D$ 。此外, 由于本文的推导过程没有考虑能量损失, 因此反射波和透射波的能量之和应等于入射波能量, 该能量守恒关系可以表示为

$$|C|^2 + |D|^2 = 1, \quad (20)$$

式(20)可用于检验计算结果的正确性。

### 3.2 结果分析

图 2 展示了造波机产生的纵波归一化波幅后沿着水槽的变化。由于反射作用, 指数隆起地形之前的波幅存在明显波动。水深变浅使波幅呈现增大的趋势, 但同样受到反射波的影响, 导致最大波幅并非出现在隆起地形的顶部。由于隆起地形对波浪的反射作用, 其后的透射波小于入射波。

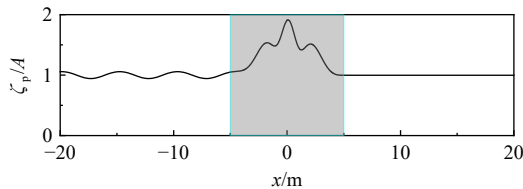


图 2 归一化波幅沿波浪水槽的变化

Fig. 2 Variation of normalized amplitudes along the wave flume

阴影部分标识隆起地形区域, 其中  $L = 5$  m,  $T = 4.6$  s,  $\lambda = 0.46$  m<sup>-1</sup>,

$$h_1 = 0.5$$
 m,  $h_0 = 0.05$  m

Shaded areas denotes the hump shoal, where  $L = 5$  m,  $T = 4.6$  s,  $\lambda = 0.46$  m<sup>-1</sup>,  $h_1 = 0.5$  m and  $h_0 = 0.05$  m

由于水槽中纵波的传播特征与地形顶部水深  $h_0$ 、地形参数  $\lambda$  以及入射波角频率  $\omega$  密切相关, 因此, 本文进一步讨论反射系数及透射系数随纵波传播的变化。图 3 展现了反射系数及透射系数随隆起地形顶部水深  $h_0$  的变化。反射系数  $C$  随着  $h_0$  的增大而逐渐减小, 表明随着隆起地形顶部水深的增加, 地形对波浪的反射作用逐渐减小。而透射系数  $D$  随着  $h_0$  的增加而缓慢增加, 表明随着隆起地形顶部水深的增加有更多波浪可透过地形向前传播。

图 4 为固定指数地形时反射系数  $C$  与透射系数

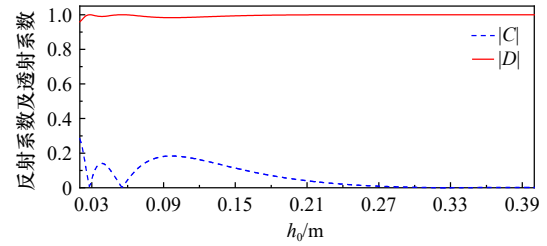


图 3 反射系数和透射系数随隆起地形顶部水深  $h_0$  的变化

Fig. 3 Reflection and transmission parameters versus the depth at the top of hump shoal  $h_0$

$$T = 4.6$$
 s,  $h_1 = 0.5$  m,  $L = 5.0$  m,  $\lambda = \ln(h_1/h_0)/L$ ,  $\omega = 1.37$  rad/s

$$T = 4.6$$
 s,  $h_1 = 0.5$  m,  $L = 5.0$  m,  $\lambda = \ln(h_1/h_0)/L$  and  $\omega = 1.37$  rad/s

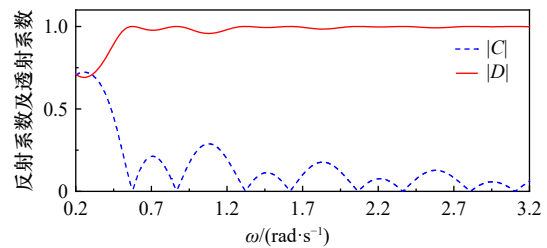


图 4 反射系数和透射系数随着入射波角频率的变化

Fig. 4 Reflection and transmission parameters versus the angular frequency  $\omega$  for the hump shoal

$$h_1 = 0.5$$
 m,  $h_0 = 0.05$  m,  $L = 5.0$  m,  $\lambda = 0.46$  m<sup>-1</sup>

$$h_1 = 0.5$$
 m,  $h_0 = 0.05$  m,  $L = 5.0$  m and  $\lambda = 0.46$  m<sup>-1</sup>

$D$  随入射波角频率的变化情况。反射系数  $C$  随着入射波角频率  $\omega$  的增加而非周期性的振荡, 但总体呈减小趋势。透射系数  $D$  随入射波角频率  $\omega$  的增加而呈现出非周期性总体增大的趋势。这表明隆起地形对频率较低的波浪有较显著的反射, 而频率较高的波浪则有更多成份透过地形继续向前传播。

地形参数  $\lambda$  决定隆起地形变化率。由图 5 可知, 反射系数  $C$  随  $\lambda$  的增加而呈现非周期性增大的趋势, 而透射系数  $D$  呈现非周期性减小的趋势。这表明随着地形变陡, 有更多的波浪成分被反射回去, 透射过

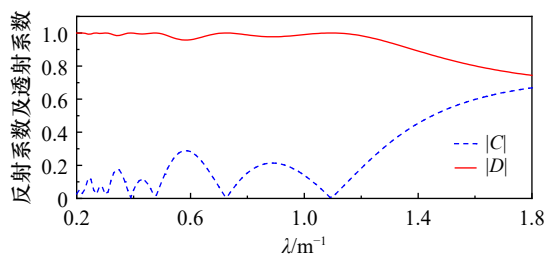


图 5 反射系数和透射系数随着  $\lambda$  的变化

Fig. 5 Reflection and transmission parameters versus the topography parameter  $\lambda$  for the hump shoal

$$h_1 = 0.5$$
 m,  $h_0 = 0.05$  m,  $L = 5.0$  m,  $\omega = 1.37$  rad/s,  $\lambda = \ln(h_1/h_0)/L$

$$h_1 = 0.5$$
 m,  $h_0 = 0.05$  m,  $L = 5.0$  m,  $\omega = 1.37$  rad/s and  $\lambda = \ln(h_1/h_0)/L$

隆起地形继续向前传播的波浪成分则逐渐减小。

## 4 横波

### 4.1 理论推导

已有研究<sup>[6-13]</sup>表明,横波是由造波机直接产生的行进波在参数共振下通过自由水面的空间平均运动产生的,其波长 $l$ 与水槽宽 $2b$ 满足关系 $l \approx 4b/n$ ,其中 $n = 1, 2, 3, \dots$ ,为横波的模态数。当波浪水槽的宽度与入射波的波长为相同数量级时,可能会产生横波。假设波浪水槽中仅单独存在横波,其第 $n$ 个模态的波数为

$$\kappa_n = \frac{n\pi}{2b}. \quad (21)$$

横波的自由水面可表示为

$$\eta_c(x, y, t) = \zeta_c(x) \cos[\kappa_n(y+b)] \exp(i\omega t), \quad (22)$$

式中,下标 $c$ 代表横波。

进一步假定横波限于隆起地形上,将式(22)代入线性长波方程(2)并考虑地形公式(1),有

$$\frac{d^2 \zeta_c}{dx^2} \mp \lambda \frac{d\zeta_c}{dx} + \left[ \frac{\omega^2}{g h_0} \exp(\pm \lambda x) - \kappa_n^2 \right] \zeta_c = 0, \quad (23)$$

引入变量:

$$\gamma = \frac{2\omega}{\lambda \sqrt{g h_0}} \exp\left(\pm \frac{1}{2} \lambda x\right), \quad (24)$$

其对应的因变量为

$$\zeta_c = \frac{\lambda \sqrt{g h_0}}{2\omega} \gamma R(\gamma), \quad (25)$$

式(23)可简化为 $\nu$ 阶贝塞尔方程:

$$\gamma^2 R_{\gamma\gamma} + \gamma R_{\gamma} + (\gamma^2 - \nu^2) R = 0, \quad (26)$$

其中,

$$\nu = \sqrt{1 + 4\kappa_n^2 / \lambda^2}, \quad (27)$$

式(26)的通解为

$$R(\gamma) = A_3 J_\nu(\gamma) + B_3 Y_\nu(\gamma), \quad (28)$$

式中, $A_3$ 和 $B_3$ 为待定常数。

当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时 $\gamma \rightarrow 0$ ,此时 $\nu$ 阶贝塞尔函数有近似关系:

$$J_\nu(\gamma) \approx \left(\frac{1}{2}\gamma\right)^\nu / \Gamma(\nu+1), \quad (29)$$

$$Y_\nu(\gamma) \approx -\left(\frac{1}{\pi}\right) \cdot \Gamma(\nu) \cdot \left(\frac{1}{2}\gamma\right)^{-\nu}. \quad (30)$$

由于 $\nu > 1$ 且当 $\gamma \rightarrow 0$ 时, $Y_\nu(\gamma) \rightarrow \infty$ ,这与横波被限制在指数地形上其波幅在隆起地形较远区域趋于0相悖,故应舍去第二类贝塞尔函数,即令其系数 $B_3 = 0$ 。因此,对称指数隆起地形上的横波应表示为

$$\zeta_c = A_3 \exp\left(\mp \frac{1}{2} \lambda x\right) J_\nu \left[ \frac{2\omega}{\lambda \sqrt{g h_0}} \exp\left(\mp \frac{1}{2} \lambda x\right) \right]. \quad (31)$$

对于沿对称地形传播的波浪,其存在为偶对称与奇对称两种模态<sup>[17,19]</sup>。

偶对称模态的横波其自由水面需满 $x = 0$ 处导数为0,即:

$$\left. \frac{d\zeta_c}{dx} \right|_{x=0} = 0. \quad (32)$$

由式(31)可得:

$$\gamma_0 J_{\nu-1}(\gamma_0) + 2J_\nu(\gamma_0) - \gamma_0 J_{\nu+1}(\gamma_0) = 0, \quad (33)$$

其中,

$$\gamma_0 = \frac{2\omega}{\lambda \sqrt{g h_0}}. \quad (34)$$

式(33)确定横波波数 $\kappa_n$ 与角频率 $\omega$ 的关系,即对称指数隆起地形上偶对称模态横波的频散关系。

奇对称模态的横波需满足自由水面在 $x=0$ 处为0,即:

$$\zeta_c|_{x=0} = 0. \quad (35)$$

由式(31)可得

$$J_\nu(\gamma_0) = 0, \quad (36)$$

式(36)给出了对称指数地形上奇对称模态横波的频散关系。

偶对称模态和奇对称模态的频散关系(33)与(36)是隐式的,需要数值求解。对于给定的指数隆起地形和波数 $\kappa_n$ ,频散关系(33)和(36)通常可得多个对应的频率 $\omega$ 。参考边缘波及海脊俘获波研究<sup>[19-20]</sup>,对于给定的波数 $\kappa_n$ ,偶模态横波频率最小的解称为模态 $m = 0$ ,频率第二小的解称为模态 $m = 1, \dots$ ,以此类推;奇模态横波频率最小的解称为模态 $m = 1$ ,频率第二小的解称为模态 $m = 2, \dots$ ,以此类推。也即偶模态横波的最小模态为模态0,奇模态横波的最小模态为模态1。因此,对于给定的横向波数 $\kappa_n$ 和纵向模态 $m$ ,指数隆起地形上横波模态是 $(n, m)$ 。

### 4.2 频散关系

横波是波峰线与造波机垂直的驻波,沿水槽宽度方向传播,波数与水槽宽度间关系由式(21)确定。横波奇偶模态的频散关系(33)和(36)表明波数 $\kappa_n$ 不仅与角频率 $\omega$ 及模态 $m$ 有关,还与隆起地形顶部水深 $h_0$ 及地形参数 $\lambda$ 有关。图6展示了宽 $2b = 1$  m水槽模态 $n = 1, 2$ 和3模态对应的偶对称及奇对称模态角频率变化情况。对于给定的指数型隆起地形在相同的波数情况下,角频率随着模数 $m$ 的增加而增加。对于同一模态,奇对称模态对应的频率小于偶对称模态对应的频率。

图7展示了 $\lambda = 0.46 \text{ m}^{-1}$ ,  $\kappa_n = \pi \text{ m}^{-1}$ 时角频率 $\omega$ 随指数型隆起顶部水深 $h_0$ 的变化情况。角频率 $\omega$ 随着 $h_0$ 的增加而增加,模态 $m$ 越高,增加速率越快。对于确定的 $h_0$ ,奇对称模态及偶对称模态对应的角频率皆

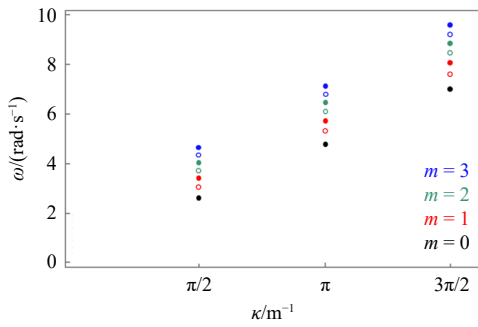


图 6 角频率  $\omega$  随波数  $\kappa$  的变化

Fig. 6 Angular frequency  $\omega$  versus wave number  $\kappa$

$2b = 1 \text{ m}$ ,  $h_1 = 0.5 \text{ m}$ ,  $h_0 = 0.05 \text{ m}$  和  $\lambda = 0.46 \text{ m}^{-1}$ , 实心圆是偶对称, 空心圆是奇对称

$2b = 1 \text{ m}$ ,  $h_1 = 0.5 \text{ m}$ ,  $h_0 = 0.05 \text{ m}$  和  $\lambda = 0.46 \text{ m}^{-1}$ , where the solid circles indicate the symmetrical mode and the hollow circles the anti-symmetrical mode

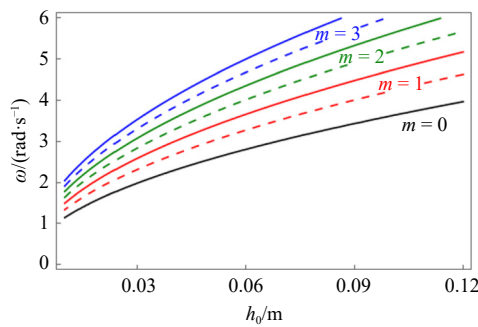


图 7 角频率  $\omega$  随着顶部水深  $h_0$  的变化

Fig. 7 Angular frequency  $\omega$  versus the top depth  $h_0$

$\lambda = 0.46 \text{ m}^{-1}$ ,  $\kappa_1 = \pi \text{ m}^{-1}$ , 实线是偶对称, 虚线是奇对称  
 $\lambda = 0.46 \text{ m}^{-1}$  and  $\kappa_1 = \pi \text{ m}^{-1}$ , where the solid lines indicate the symmetrical mode and the dash lines indicate the anti-symmetrical mode

随着模数  $m$  的增加而增加。图 8 展示了当指数型隆起顶部水深  $h_0$  和波数  $\kappa$  确定时, 角频率  $\omega$  随着地形参数  $\lambda$  的变化情况。角频率  $\omega$  随着  $\lambda$  增加而增加, 模态  $m$  越高, 增加速率越快。对于确定的地形参数  $\lambda$ , 角频率随着模数  $m$  的增加而增加, 且相同模态时奇对称模态对应的频率小于偶对称模态对应的频率。

### 4.3 空间分布

图 9 展示了不同波数时前 4 个偶对称模态和前 3 个奇对称模态的波幅沿水槽分布情况。偶对称模态的波幅关于隆起地形的中心线对称分布, 两侧的节点个数分别与模数  $m$  相等, 即当  $m = 0$  时没有节点数, 当  $m = 1$  时, 两侧各有节点数为 1。奇对称模态的波幅在地形两侧呈现  $\pi$  的相位差, 即一侧的波幅为正时另一侧相应的波幅为负。除隆起地形顶部始终为波节点, 地形两侧各有  $(m - 1)$  个波节点对称分布。横波主要分布于隆起地形顶部附近并向两侧呈波幅总体减小的趋势, 且模态  $m$  越大减小越缓慢。对于

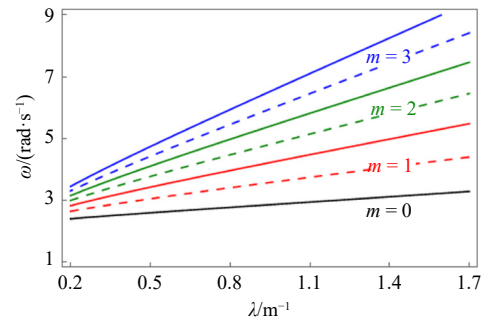


图 8 角频率  $\omega$  随着地形参数  $\lambda$  的变化

Fig. 8 Angular frequency  $\omega$  versus depth profile parameter  $\lambda$

$h_0 = 0.05 \text{ m}$ ,  $\kappa_1 = \pi \text{ m}^{-1}$ , 实线是偶对称, 虚线是奇对称  
 $h_0 = 0.05 \text{ m}$  and  $\kappa_1 = \pi \text{ m}^{-1}$ , where the solid lines indicate the symmetrical mode and the dash lines indicate the anti-symmetrical mode

相同的模态, 波数越大横波波幅减小的越快。

图 10 和图 11 分别展示偶对称与奇对称模态的前 3 个模态的波幅空间分布。横波在指数地形的纵向和横向上都是驻波。偶对称模态  $(n, m)$  沿水槽方向有  $n$  条波节线, 在垂直于水槽方向存在  $2m$  条波节线; 奇对称模态  $(n, m)$  沿水槽方向存在  $n$  条波节线, 而在垂直方向有  $2m - 1$  条波节线。对于波数  $\kappa_2 = 2\pi \text{ m}^{-1}$  的横波分别在水槽宽 1/4 和 3/4 处有两条沿水槽方向的波节线。偶对称模态横波波幅沿水槽方向关于隆起地形的中心线对称, 且在中心线处达到最大值。对于模态  $m = 0$ , 其在垂直于水槽方向上没有波节线(图 10a); 对于模态  $m = 1$ , 在隆起地形的两侧各有一条相互对称的波节线(图 10b); 对于模态  $m = 2$ , 在隆起地形的两侧各有两条相互对称的波节线(图 10c)。奇对称模态横波波幅沿水槽方向关于隆起地形的中心线反对称分布, 即在地形的一侧波幅取得最大值, 在地形的另一侧则为负的最大值。对于模态  $m = 1$ , 其垂直于水槽方向的波节线与指数地形中心线重合(图 11a); 对于模态  $m = 2$ , 除在地形中心线处的一条波节线外, 在地形的两侧分别还存在一条相互对称的波节线(图 11b); 对于模态  $m = 3$ , 除在地形中心线处的一条波节线外, 在地形的两侧分别还存在两条相互对称的波节线(图 11c)。

## 5 结论

本文针对水槽内布置的对称指数型隆起地形, 基于线性长波方程分别推导了沿水槽方向的纵波与垂直于水槽方向的横波的解析表达。指数型隆起地形前的入射波和反射波及其后的透射波都可以表示为指数函数的形式, 而隆起地形上的波动则可表示为第一类和第二类一阶贝塞尔函数的形式, 结合自由水面

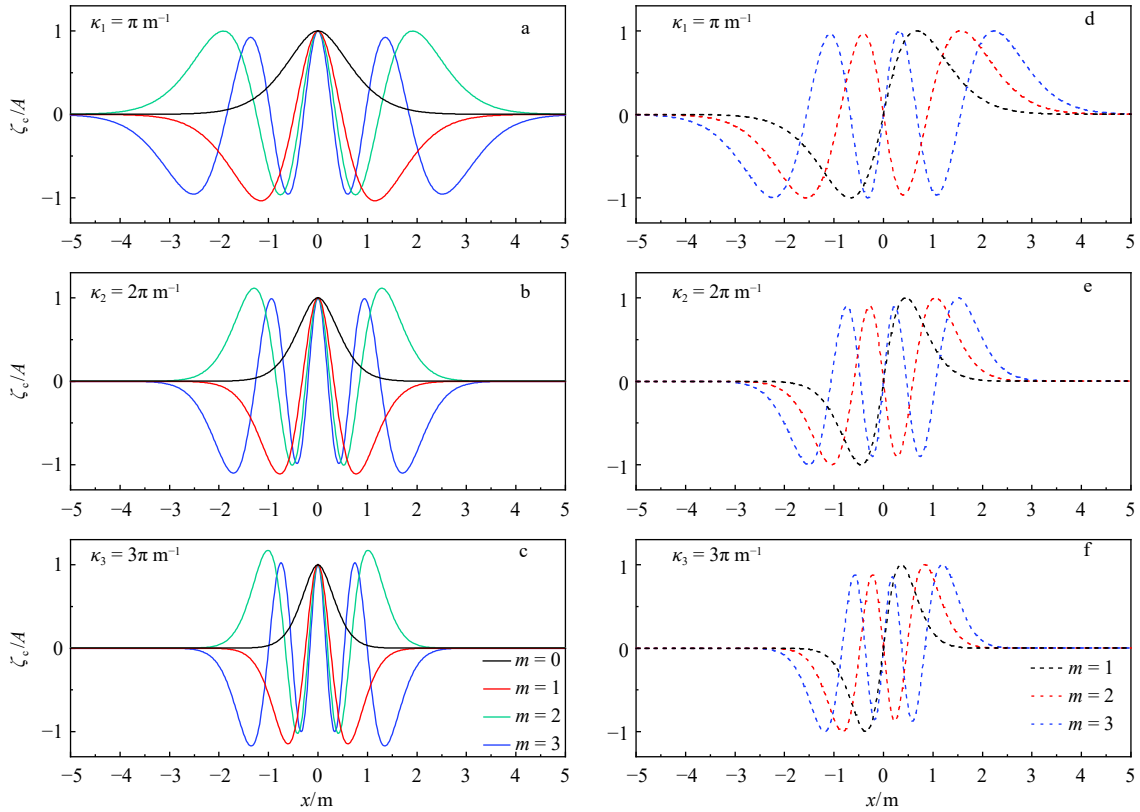


图9 波数  $\kappa_1 = \pi \text{ m}^{-1}$ 、 $\kappa_2 = 2\pi \text{ m}^{-1}$ 、 $\kappa_3 = 3\pi \text{ m}^{-1}$  时偶对称模态(左侧)和奇对称模态(右侧)横波沿水槽方向的波幅分布  
 Fig. 9 Amplitude profiles of cross waves along the wave flume for symmetrical patterns (left column) and anti-symmetrical patterns (right column) with  $\kappa_1 = \pi \text{ m}^{-1}$ ,  $\kappa_2 = 2\pi \text{ m}^{-1}$  and  $\kappa_3 = 3\pi \text{ m}^{-1}$  respectively

$$h_0 = 0.05 \text{ m}, h_1 = 0.5 \text{ m}, \lambda = 0.46 \text{ m}^{-1}, L = 5.0 \text{ m}$$

$$h_0 = 0.05 \text{ m}, h_1 = 0.5 \text{ m}, \lambda = 0.46 \text{ m}^{-1} \text{ and } L = 5.0 \text{ m}$$

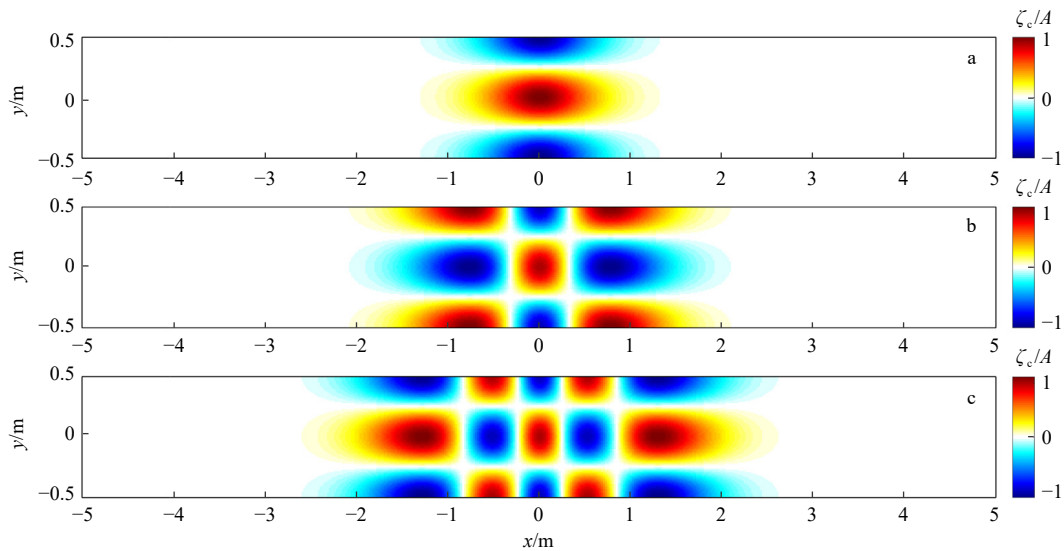


图10 偶对称模态的横波的空间分布

Fig. 10 Spatial structure of the cross-wave amplitudes for symmetrical patterns over the exponential symmetric shoal  
 宽  $2b = 1 \text{ m}$ , 长  $L = 5.0 \text{ m}$ , 顶部水深  $h_0 = 0.05 \text{ m}$ , 地形参数  $\lambda = 0.46 \text{ m}^{-1}$ , 隆起地形上波数  $\kappa_2 = 2\pi \text{ m}^{-1}$ ,  $m = 0$ (a),  $m = 1$ (b),  $m = 2$ (c)  
 $2b = 1 \text{ m}$ ,  $L = 5.0 \text{ m}$ ,  $h_0 = 0.05 \text{ m}$ ,  $h_1 = 0.5 \text{ m}$  and  $\lambda = 0.46 \text{ m}^{-1}$  corresponding  $\kappa_2 = 2\pi \text{ m}^{-1}$ , where  $m = 0$ (a),  $m = 1$ (b),  $m = 2$ (c)

及速度在隆起地形前后边界处的连续条件, 最终得到水槽内纵波的完整解。基于所推导的纵波解析理论,

进一步讨论了隆起地形顶部水深  $h_0$ 、角频率  $\omega$  以及地形参数  $\lambda$  对透射系数及反射系数的影响。反射系

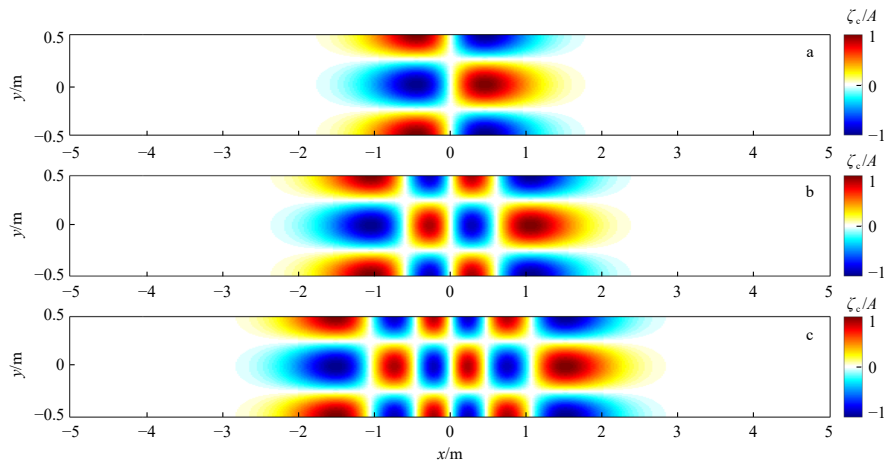


图 11 奇对称模式的横波的空间分布

Fig. 11 Spatial structure of the cross-wave amplitudes for anti-symmetrical patterns over the exponential symmetric shoal

宽  $2b = 1$  m、长  $L = 5.0$  m、顶部水深  $h_0 = 0.05$  m、地形参数  $\lambda = 0.46 \text{ m}^{-1}$  隆起地形上波数  $\kappa_2 = 2\pi \text{ m}^{-1}$ ,  $m = 1$ (a),  $m = 2$ (b),  $m = 3$ (c)

$2b = 1 \text{ m}$ ,  $L = 5.0 \text{ m}$ ,  $h_0 = 0.05 \text{ m}$ ,  $h_1 = 0.5 \text{ m}$  and  $\lambda = 0.46 \text{ m}^{-1}$  corresponding  $\kappa_2 = 2\pi \text{ m}^{-1}$ , where  $m = 1$ (a),  $m = 2$ (b),  $m = 3$ (c)

数  $C$  随着  $h_0$  的增大而减小, 而透射系数  $D$  随着  $h_0$  的增加而增加; 反射系数  $C$  随角频率  $\omega$  的增加出现非周期性的振荡, 但总体呈减小趋势, 而透射系数  $D$  则相反, 总体呈上升趋势。由于地形变陡后有更多能量被反射回去, 因此反射系数  $C$  随  $\lambda$  的增加会出现非周期性的振荡, 但总体呈现增加趋势, 透射系数  $D$  相反, 随着  $\lambda$  的增加呈现减小趋势。考虑到当入射波波长与水槽宽度接近时, 可能会出现横波现象, 本文还进一步从理论上给出了指数型隆起地形上的横波现象。指数型隆起地形上的横波可以表示为第一类  $\nu$  阶贝塞尔函数的形式, 结果表明对称隆起地形上的横波存在偶对称及奇对称模式。偶对称模式  $(n, m)$  沿水槽方向有  $n$  条波节线, 在垂直于水槽方向存在

$2m$  条波节线; 奇对称模式  $(n, m)$  沿水槽方向存在  $n$  条波节线而在垂直方向有  $2m - 1$  条波节线。

对于实际水槽物理模型实验, 传统认为波浪的反射随周期的增加而增加, 本文理论表明隆起地形上波浪反射并不单调随周期增加, 而是振荡变化的。此外, 在类似指数地形波浪传播实验设计中, 为避免横波的影响可基于本文理论评估横波周期。需要说明的是, 由于本文所提出的对称指数地形水槽内纵波和横波解析理论是基于浅水波假定, 因此适用于波长大于 20 倍水深的情况。在实际波浪水槽实验中并不完全满足浅水假定的情况, 理论与实验必将存在一定误差, 但本文理论所揭示的运动规律和现象应是合理的。

#### 参考文献:

- [1] 陶爱峰, 沈至淳, 李硕, 等. 中国灾害性海浪研究进展[J]. 科技导报, 2018, 36(14): 26–34.  
Tao Aifeng, Shen Zhichun, Li Shuo, et al. Research progress for disastrous waves in China[J]. Science & Technology Review, 2018, 36(14): 26–34.
- [2] 王岗, 高俊亮, 王培涛, 等. 港湾共振研究综述[J]. 海洋学报, 2017, 39(11): 1–13.  
Wang Gang, Gao Junliang, Wang Peitao, et al. Review on harbor resonance[J]. Haiyang Xuebao, 2017, 39(11): 1–13.
- [3] 徐佳丽, 时健, 张弛, 等. 近40年中国近海波浪数据库的建立及极值分析[J]. 海洋工程, 2019, 37(6): 94–103.  
Xu Jiali, Shi Jian, Zhang Chi, et al. Establishment of China offshore wave database and analysis of wave extreme values in recent 40 years[J]. The Ocean Engineering, 2019, 37(6): 94–103.
- [4] 陈松贵, 张华庆, 陈汉宝, 等. 不规则波在筑堤珊瑚礁上传播的大水槽实验研究[J]. 海洋通报, 2018, 37(5): 576–582.  
Chen Songgui, Zhang Huaqing, Chen Hanbao, et al. Experimental study of irregular wave transformation on reefs with seawalls in large wave flume[J]. Marine Science Bulletin, 2018, 37(5): 576–582.
- [5] 任冰, 唐洁, 王国玉, 等. 规则波在岛礁地形上传播变化特性的试验[J]. 科学通报, 2018, 63(5): 590–600.  
Ren Bing, Tang Jie, Wang Guoyu, et al. Experimental investigation of monochromatic wave transformation characteristics over the coral reefs[J]. Chinese Science Bulletin, 2018, 63(5): 590–600.
- [6] Lin J D, Howard L N. Non-linear standing waves in a rectangular tank due to forced oscillation[R]. Cambridge: Hydrodynamic Laboratory Technical Report, 1960.
- [7] Garrett C J R. On cross-waves[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1970, 41(4): 837–849.

- [8] Dong Guohai, Ma Xiaozhou, Perlin M, et al. Experimental study of long wave generation on sloping bottoms[J]. *Coastal Engineering*, 2009, 56(1): 82–89.
- [9] Mahony J J. Cross-waves. Part 1. Theory[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1972, 55(2): 229–244.
- [10] Barnard B J S, Pritchard W G. Cross-waves. Part 2. Experiments[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1972, 55(2): 245–255.
- [11] Bernoff A J, Kwok L P, Lichter S. Viscous cross-waves: an analytical treatment[J]. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 1989, 1(4): 678–688.
- [12] Ayanle H, Bernoff A J, Lichter S. Spanwise modal competition in cross-waves[J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1990, 43(1): 87–104.
- [13] Deng Limei. A study of transverse waves[D]. Hong Kong, China: University of Hong Kong, 2005.
- [14] Yao Yu, He Fang, Tang Zhengjiang, et al. A study of tsunami-like solitary wave transformation and run-up over fringing reefs[J]. *Ocean Engineering*, 2018, 149: 142–155.
- [15] Zhu Gancheng, Ren Bing, Dong Ping, et al. Experimental investigation on the infragravity wave on different reef systems under irregular wave action[J]. *Ocean Engineering*, 2021, 226: 108851.
- [16] 王岗, 郑金海. 梯形底床波浪水槽内横波解析表达[C]//第十五届中国海洋(岸)工程学术讨论会论文集(中). 北京: 海洋出版社, 2011: 29–32.  
Wang Gang, Zheng Jinhai. Analysis of cross waves in a trapezoidal bed wave flume[C]//Proceedings of the 15th China Marine (Coastal) Engineering Academic Symposium. Beijing: China Ocean Press, 2011: 29–32.
- [17] Wang Gang, Yu Ying, Tao Aifeng, et al. An analytic investigation of primary and cross waves in the flume with a shoal[J]. *Ocean Engineering*, 2022, 244: 110428.
- [18] 王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2012.  
Wang Zhuxi, Guo Dunren. Special Functions[M]. Beijing: Peking University Press, 2012.
- [19] Wang Gang, Liang Qihua, Shi Fengyan, et al. Analytical and numerical investigation of trapped ocean waves along a submerged ridge[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2021, 915: A54.
- [20] Zhang Di, Wang Gang, Feng Xi, et al. Analytical and numerical investigation of edge waves near a vertical breakwater over a convex bottom[J]. *Ocean Engineering*, 2022, 266: 112923.

## Analytic solutions of longitudinal and cross waves in the wave flume with an exponential symmetric shoal

Xie Rong<sup>1,2</sup>, Xiong Yan<sup>1,2</sup>, Tong Chaofeng<sup>1,2</sup>, Wang Gang<sup>1,2</sup>

(1. Key Laboratory of Coastal Disaster and Defence, Ministry of Education, Hohai University, Nanjing 210098, China; 2. College of Harbour, Coastal and Offshore Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

**Abstract:** The flume experiment is commonly used to investigate the wave propagation deformation and the stability of the breakwater armor block, with the wave elements changing along the longitudinal direction of the flume while remaining unchanged in the cross direction perpendicular to the flume. However, when the wavelength has a certain relationship with the flume width, visible cross fluctuations may occur. In this paper, the analytical expressions of longitudinal wave along the flume direction and cross wave perpendicular to the flume direction on an exponential symmetric shoal are derived respectively based on the linear long wave equation. The longitudinal waves on symmetric exponential topography in the flume can be expressed as the first and second kinds of first order Bessel function, and the complete solution can be obtained by combining with the conditions of free surface and velocity continuity. Cross waves with even symmetric and odd symmetric modes in the flume with an exponential symmetric shoal can be expressed as the first kind of  $\nu$  order Bessel function. The even symmetric  $(n, m)$  mode has  $n$  nodal lines along the direction of the flume and  $2m$  nodal lines perpendicular to the direction of the flume; odd symmetric  $(n, m)$  mode has  $n$  nodal lines along the direction of the flume and  $2m-1$  nodal lines in the cross direction.

**Key words:** cross waves; analytical theory; wave flume; exponential terrain