文章编号：1000-5773(2013)05-0725-06

耦合 Level Set 方法处理介质界面研究*

王　星[1]，马天宝[1]，郝　莉[2]

（1.北京理工大学爆炸科学与技术国家重点实验室，北京　100081；
2.北京建筑工程学院理学院，北京　100044）

摘要：研究了耦合 Level Set(LS)方法处理介质界面算法，通过对比旋转流场和剪切流场下的界面捕捉情况，给出了各种不同方法在处理介质界面过程中的优缺点，分析了产生这种现象的原因。通过对比分析得到，耦合粒子 Level Set(Particle Level Set，PLS)方法以及耦合 Level Set 和 VOF(Coupled Level Set and Volume of Fluid，CLSVOF)方法相比于单纯的 LS 方法，在流体守恒性质方面有很大的提高，PLS 方法可以根据撒播粒子和精确追踪示踪粒子修正 LS 界面；而 CLSVOF 方法可以通过重构界面和体积输运，重新初始化 LS 函数。在实际物理应用中，PLS 方法多次重新撒播示踪粒子会降低界面精度，且对每个示踪粒子的追踪需要加大 CPU 内存，而 CLSVOF 方法更加高效和合理。

关键词：耦合粒子 Level Set 方法；耦合 Level Set 和 Volume of Fluid 方法；数值对比
中图分类号：V211　　**文献标识码**：A

1　引　言

在多介质流体数值模拟过程中，对于激波捕捉等问题，已经发展了很多有效的数值格式进行求解，例如加权本质无震荡(WENO)格式和间断有限元方法(Discontinuous Galerkin Finite Element Method，DG)等。而接触间断(介质界面)的精细处理问题则一直很棘手。精确高效地模拟运动界面，对于揭示物理机理和认识物质内部发展(气泡湮灭、水下爆炸和晶体生成等现象)具有重要意义。

物质界面处理方法按照处理方式不同可以分为两类。一类是物质界面追踪，例如 Unverdi 等人提出的波前追踪算法[1]。这种方法通过拉格朗日输运追踪运动界面，优点是可以精确地确定界面在不同时刻所在的具体位置；缺点是界面在移动过程中将网格分裂会出现较小网格，对于时间步长要求苛刻，并且网格重新排列影响流体的总体守恒性。此类方法在处理界面的合并和分裂时需要很复杂的过程，考虑扩展到高维时界面的复杂拓扑结构，使此类方法在具体应用时难度更大。另外从计算程序的角度讲，此类方法不便于并行计算。另一类处理方法是界面捕捉，包括 VOF(Volume of Fluid Method)类方法和 Level Set(LS)方法等，可以归类为欧拉方法[2]。VOF 方法[3-4]是一类流行的界面处理方法，此类方法采用流体体积分数代表界面，能够保证离散后的质量守恒。然而，体积分数标量在界面两侧是间断物理量，需要特殊的几何输运方式来实现，并且通过 VOF 方法求解界面法向和曲率具有很大难度。LS 方法[5-6]通过距离函数隐式地处理界面，采用简单的欧拉输运方程就可以求解，能够很方便地实现并行，求解曲线法线和曲率很简单，但是重新初始化离散求解过程会导致严重的质量不守恒。应用 LS 方法，不管分割多细小的网格都会出现尖锐的边角抹平现象，并且粗糙的网格会更糟糕。

* **收稿日期**：2012-11-01；**修回日期**：2012-11-23
基金项目：国家重点基础研究发展计划(2010CB832706)；国家自然科学基金(11032002，11172041)
作者简介：王　星(1986—)，男，博士研究生，从事计算力学与工程仿真研究. E-mail：31201100066@bit.edu.cn
通讯作者：马天宝(1981—)，男，副教授，主要从事计算爆炸力学研究. E-mail：madabal@bit.edu.cn

本研究分析耦合 LS 方法在处理介质界面的优缺点，以及造成这种现象的原因。耦合方法包括两类：(1) Enright 等人提出的耦合粒子 Level Set(Particle Level Set，PLS)方法[7]，(2) Sussman 等人提出的耦合 Level Set 和 VOF(Coupled Level Set and Volume of Fluid，CLSVOF)方法[8]。在这些耦合方法中，LS 函数仍然提供界面的信息，通过其它函数修正界面，以实现质量守恒。这种耦合方法的优点是不用去改变原有基于 Level Set 方法的代码，并且可以保持原有 LS 方法的性质。PLS 方法可以看成是欧拉-拉格朗日耦合的方法，在界面附近区域利用无质量的示踪粒子修正 LS 距离函数；而 CLSVOF 方法结合了 VOF 和 LS 方法的优点，基于 LS 函数法线实现界面重构，通过求解体积分数输运方程实现体积守恒，进而利用几何界面实现 LS 函数的重新初始化。

2 原始 LS 方法

构造 LS 函数 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$，使得在任意时刻，运动界面 $\Gamma(t)$ 恰好是 LS 函数的零等值面，即

$$\Gamma(t)=\{\boldsymbol{x}\in\Omega\mid\varphi(\boldsymbol{x},t)=0\} \tag{1}$$

式中：Ω 为流体区域，$\boldsymbol{x}$ 为流场中的矢量坐标。φ 的初值在 $\Gamma(0)$ 附近应该为连续函数，在 $\Gamma(0)$ 上为零。取 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$ 为点 $\boldsymbol{x}$ 到界面 $\Gamma(0)$ 符号距离函数，即

$$\varphi(\boldsymbol{x},0)=\begin{cases}d[\boldsymbol{x},\Gamma(0)] & \boldsymbol{x}\in\Omega_1\\ 0 & \boldsymbol{x}\in\Gamma(0)\\ -d[\boldsymbol{x},\Gamma(0)] & \boldsymbol{x}\in\Omega_2\end{cases} \tag{2}$$

式中：$d[\boldsymbol{x},\Gamma(0)]$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 到 $\Gamma(0)$ 的距离，Ω_1、Ω_2 分别代表流体介质 1 和介质 2 的区域。为了保证在任意时刻，φ 的零等值面是运动界面，即对于活动界面 $\Gamma(t)$ 上的任意点 $\boldsymbol{x}$，保证 $\varphi(\boldsymbol{x},t)=0$，则需要 φ 满足控制方程

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\varphi=0 \tag{3}$$

式中：$\boldsymbol{u}$ 为流体速度场。

根据 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$，容易求解得到运动界面 $\Gamma(t)$ 上的法线方向和曲率。而求解得到的下一时刻的 φ 函数，不再代表距离函数，需要重新初始化，使其满足在任意时刻 $\varphi(\boldsymbol{x},t)=0$，即需要求解初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}+\operatorname{sgn}\varphi_0(|\nabla\varphi|-1)=0\\ \varphi_{\text{new}}(x,y,0)=\varphi_{\text{old}}(x,y,t)\end{cases} \tag{4}$$

式中：x、y 为坐标分量；φ_0 为距离函数的初始值，角标 old 和 new 分别代表每次迭代前、后的取值。利用(4)式进行迭代求解至稳态解，则 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$ 任意时刻均为距离函数，但迭代求解过程会出现守恒损失问题。

3 耦合 LS 方法

3.1 PLS 方法

为保证守恒性，在求解区域内利用示踪粒子修正 LS 方程，示踪粒子被安插在界面附近区域，每一个示踪粒子携带其位置和半径信息，通过这些信息可以修正 LS 函数，进而准确定位运动界面。示踪粒子的半径定义为

$$r_{\text{p}}=\begin{cases}r_{\max} & s_{\text{p}}\varphi(\boldsymbol{x}_{\text{p}})>r_{\max}\\ s_{\text{p}}\varphi(\boldsymbol{x}_{\text{p}}) & r_{\min}<s_{\text{p}}\varphi(\boldsymbol{x}_{\text{p}})<r_{\max}\\ r_{\min} & s_{\text{p}}\varphi(\boldsymbol{x}_{\text{p}})<r_{\min}\end{cases} \tag{5}$$

式中：$\boldsymbol{x}_{\text{p}}$ 为示踪粒子的位置；s_{p} 为示踪粒子的符号，当 $\varphi(\boldsymbol{x}_{\text{p}})>0$ 时 $s_{\text{p}}=1$，$\varphi(\boldsymbol{x}_{\text{p}})<0$ 时 $s_{\text{p}}=-1$；$r_{\min}=0.1\min\{\Delta x,\Delta y,\Delta z\}$，$r_{\max}=0.5\max\{\Delta x,\Delta y,\Delta z\}$。示踪粒子的位置通过标准拉格朗日方程进行更新，即

$$\boldsymbol{x}_{\text{p}}(t)=\boldsymbol{x}_{\text{p}}(t-\Delta t)+\boldsymbol{u}[\boldsymbol{x}_{\text{p}}(t-\Delta t),t-\Delta t]\Delta t \tag{6}$$

当某一个粒子逃逸出界面附近时,需要对该处的界面进行修正,示踪粒子附近任意一点的局部 LS 函数为

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = s_{\mathrm{p}}(r_{\mathrm{p}} - |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}|) \tag{7}$$

具体修正方法为,每一个逃逸出的正粒子和负粒子周围网格节点的 LS 函数分别为 φ^+ 和 φ^-,则

$$\begin{cases} \varphi^+_{\mathrm{new}} = \max\{\varphi_{\mathrm{p}}, \varphi^+_{\mathrm{old}}\} \\ \varphi^-_{\mathrm{new}} = \min\{\varphi_{\mathrm{p}}, \varphi^-_{\mathrm{old}}\} \end{cases} \tag{8}$$

式中:φ_{p} 为粒子所在位置的 LS 函数值。每一个网格节点重构的 LS 函数则利用(8)式的最小值进行修正,进而得到修正的距离函数

$$\varphi = \begin{cases} \varphi^+ & |\varphi^+| \leqslant |\varphi^-| \\ \varphi^- & |\varphi^+| > |\varphi^-| \end{cases} \tag{9}$$

3.2 CLSVOF 方法

为了将 LS 函数和流体体积分数耦合在一起,Sussman[6] 等人定义

$$F_{i,j} = \frac{1}{\Delta x \Delta y}\int_{\Omega_{i,j}} H[\varphi(x,y,t)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{10}$$

式中:i 和 j 分别为 x 和 y 方向上的离散坐标;$F_{i,j}$ 为 t 时刻所求解流体在控制体网格 $\Omega_{i,j}$ 上的体积分数;H 为 Heaviside 函数,具体形式为

$$H(\varphi) = \begin{cases} 1 & \varphi > 0 \\ 0 & \varphi < 0 \end{cases} \tag{11}$$

通过体积分数,可根据 VOF 方法进行体积输运,进而实现质量守恒。在此之前,需要重构出混合网格的几何介质界面,定义重构界面为

$$\varphi^*_{i,j} = a_{i,j}(x - x_i) + b_{i,j}(y - y_j) + c_{i,j} \tag{12}$$

式中:$a_{i,j}$、$b_{i,j}$、$c_{i,j}$ 为系数,可以利用网格真实 LS 函数值求解得到。构造函数为

$$E_{i,j} = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} H'(\varphi)[\varphi_{i,j} - a_{i,j}(x - x_i) + b_{i,j}(y - y_j) + c_{i,j}]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{13}$$

式中:x_i 和 y_j 分别为离散坐标为 i 和 j 的空间坐标分量;$x_{i+1/2}$、$x_{i-1/2}$、$y_{j+1/2}$ 和 $y_{j-1/2}$ 为 x 和 y 方向的上、下边界;$\varphi_{i,j}$ 为离散坐标下的界面距离函数;$H'(\varphi)$ 为基于 Dirac 分布的权重函数。当 $E_{i,j}$ 值为最小值时,重构的 $\varphi^*_{i,j}$ 值和界面距离函数值是重合的,进而可以通过求解线性方程组得到各个系数的值。利用(10)式,根据界面方程的几何关系可以得到混合网格体积分数。对流方程为

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla F = 0 \tag{14}$$

式中:F 为所求解流体的体积分数。利用(14)式,可根据界面几何关系求得输运体积关系。同样可以根据(3)式得到下一时刻的距离函数 $\varphi_{i,j}$ 的值,最后利用求解得到的 $F_{i,j,n+1}$(第 $n+1$ 时间步的 $F_{i,j}$ 值)重新初始化 LS 函数,这样即保证了 LS 函数守恒性,重新初始化方法参见文献[6]。

4 数值算例

为对比分析 LS 和耦合 LS 方法之间在运动界面捕捉方面的优、缺点,以剪切速度场和旋转速度场下的经典验证算例进行数值分析。在离散求解中,对于 LS 方法和 PLS 方法采用 5 阶 WENO 和 3 阶 TVD-RK 方法,对于 CLSVOF 方法采用 2 阶算子分裂的方法,PLS 方法每个维度上的示踪粒子数为 4。

4.1 旋转速度场

旋转速度场下的 Zalesak's Disc 问题一直是运动界面捕捉的经典算例,通过对比绕计算域中心旋转一周的界面变换,验证界面捕捉算法的优劣。计算域取为 $[0,1]\times[0,1]$,网格数取为 100×100,旋转速度场分布为

$$\begin{cases} u(x,y) = -\pi(y - 0.5) \\ v(x,y) = \pi(x - 0.5) \end{cases} \tag{15}$$

式中：$u(x,y)$和 $v(x,y)$分别为 x 方向和 y 方向的流场速度。图 1 为 Zalesak's Disc 在旋转一周后采用不同捕捉方法得到的图形。

图 1 显示，单纯 LS 方法在尖角和拐角处均出现抹平现象，而 PLS 方法在旋转中很好地保持了尖角，尽管 CLSVOF 方法很好地保证了守恒性，但也轻微出现尖角抹平现象。通过分析可知其主要原因为：在 LS 方法中，光滑边界处的曲线具有连续性，能够保证重构界面连续，而在尖角处曲线性质不连续，在旋转流场中会逐渐抹平尖角；对于 PLS 方法，在刚体运动情况下，示踪粒子之间没有相对运动，所以不需要粒子的重新撒播，每旋转一周后，所有的粒子都能回到其最初的位置，因此 PLS 方法在在这种旋转流场中能够给出完美的界面追踪。

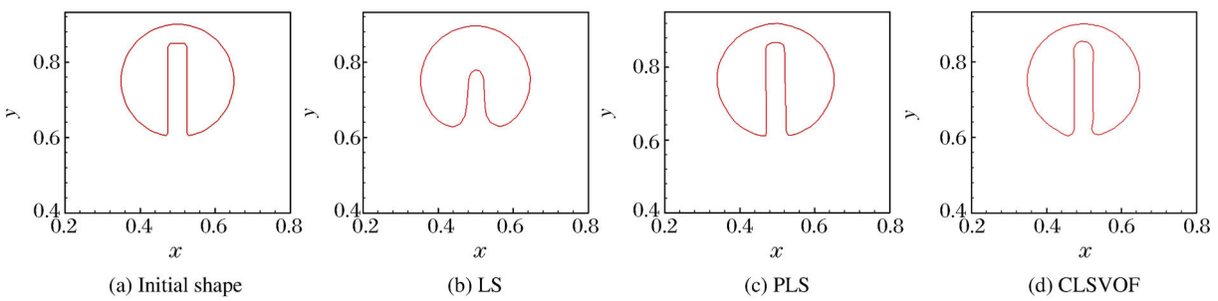


图 1 旋转一圈后不同方法得到的结果

Fig. 1 Comparison of solutions for different methods after one rotation

设运动界面为 S，界面长度 $L(S)$[9] 定义为

$$L(S)=\int_S \mathrm{d}S=\int_\Omega \delta(\varphi)\,|\nabla\varphi|\,\mathrm{d}\Omega \tag{16}$$

$$\delta(\varphi)=\begin{cases}0 & |\varphi|>\alpha\\ \dfrac{1+\cos(\pi/\varphi\alpha)}{2\alpha} & |\varphi|\leqslant\alpha\end{cases} \tag{17}$$

式中：$\alpha=1.5\Delta x$。通过对比旋转一周后运动界面长度的变化，定量给出各个方法的优劣，进而得到其在流体守恒方面的比较。不同方法在不同网格数下的结果见表 1，其中 S_0 为初始时刻的界面。

表 1 不同方法旋转一周后界面长度对比

Table 1 Comparison of interface length with different methos after one ratation

Method	$L(S)/L(S_0)$		
	50×50	100×100	200×200
LS	0.534 26	0.866 99	0.933 18
PLS	0.830 92	0.975 61	0.991 44
CLSVOF	0.812 36	0.970 20	0.989 59

通过表 1 可以定量得到各类方法在旋转流场中守恒性的优劣，原始 LS 方法随网格数的增加，守恒性会提高，但是并不能从根本上提高，而 PLS 和 CLSVOF 方法随着网格数的增加能够实现体积守恒。

4.2 剪切速度场

运动界面在平移和旋转速度场中都不发生变化，而在真实流场中，流体介质会随时间发生拉伸、碰撞和分裂等拓扑变形，为了考虑界面捕捉方法在实际物理问题中的应用，考虑剪切速度分布

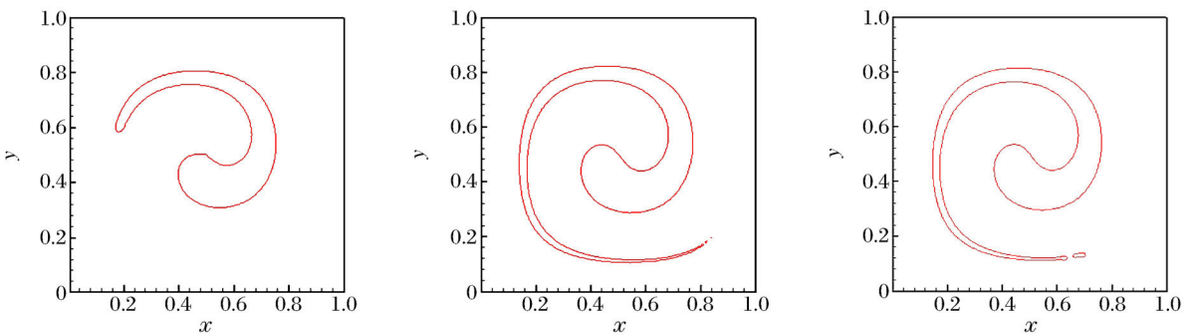
$$\begin{cases}u(x,y)=\pi\cos[\pi(x-0.5)]\sin[\pi(y-0.5)]\\ v(x,y)=-\pi\sin[\pi(x-0.5)]\cos[\pi(x-0.5)]\end{cases} \tag{18}$$

计算区域取为$[0,1]\times[0,1]$，初始界面为圆心在$(0.5,0.3)$处、半径为 0.2 的圆周，求解计算的网格数取为 200×200。$t=2.0$ 时刻后反转剪切速度，理论上在 $t=4.0$ 时刻流体界面应返回到初始时刻界面状态。图 2 为 $t=2.0$ 时刻采用不同方法得到的边界结果，图 3 为 $t=4.0$ 时刻采用不同方法得到的边界形状。

由图 2 可以看出，在相同的网格数下，PLS 和 CLSVOF 方法都能很好地捕捉到狭窄、细长的流带；

而对于原始 LS 方法,在流体头部和尾部均出现严重的体积损失;PLS 与 CLSVOF 相比,PLS 方法对于狭长流带的捕捉效果更好。

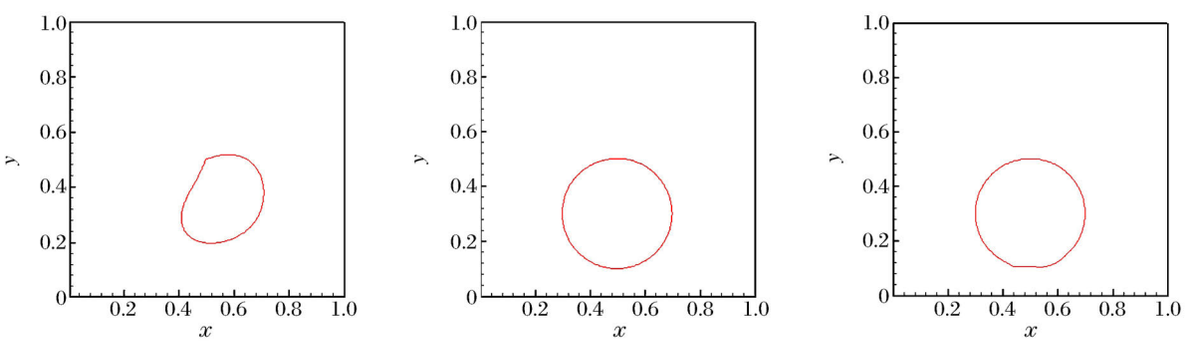
由图 3 可以看出,采用 PLS 方法得到的返回界面非常接近初始圆周;采用 CLSVOF 方法得到的返回界面在底部出现不吻合;而采用原始的 LS 方法得到的返回界面已经严重失真,出现了较严重的体积损失。其原因是:剪切速度场在整个流场分布固定,各种界面捕捉方法并没有反作用于速度场,在界面变形过程中,采用 PLS 方法之所以能够使边界很好地返回初始状态,是因为示踪粒子在确定的速度下能够通过拉格朗日方法精确确定其位置,进而修正 LS 函数;而在 CLSVOF 方法中,在形成狭长流带以至于两界面相距较近时,周围网格会影响到界面重构和重新初始化 LS 函数。在实际物理求解中,PLS 方法的示踪粒子重新撒播会逐渐降低其精度,而结合物理求解器过程对CLSVOF方法的影响不大。



(a) LS　(b) PLS　(c) CLSVOF

图 2　$t=2.0$ 时刻剪切流场测试结果

Fig. 2　Shearing flow at $t=2.0$



(a) LS　(b) PLS　(c) CLSVOF

图 3　$t=4.0$ 时刻剪切流场测试结果

Fig. 3　Shearing flow at $t=4.0$

5　结　论

对比分析了耦合 LS 方法,分析结果表明,PLS 方法和 CLSVOF 方法相比于单纯的 LS 方法,在流体守恒性质方面有很大提高,而对比返回初始界面状态,PLS 方法可以根据示踪粒子修正很好地捕捉到尖锐的界面。测试中,界面的几何变化并没有影响到周围流场的速度变化,对于 PLS 方法,初始时刻示踪粒子在经历流场反转后,能够保证界面返回到初始位置,进而修正抹平的 LS 距离函数,由于其中并没有重新撒播示踪粒子,所以 PLS 方法能够精确地返回初始状态。但是在具体物理流场中,界面会出现融合和分裂等不同的复杂拓扑变换,示踪粒子会在每一个时间层上重新撒播,而重新撒播的过程需依靠 LS 距离函数的信息,频繁的撒播会降低 PLS 方法的精度。所以在结合物理求解器进行求解时,CLSVOF 方法显得更加现实合理,PLS 方法的计算过程需要对每一个示踪粒子进行追踪,耗费更多的计算机内存,所以在真实多介质流场计算时,CLSVOF 方法是较好的选择。

References:

[1] Unverdi S, Tryggvason G. A front-tracking method for viscous incompressible multi-fluid flows [J] J Comput Phys, 1992, 100(1): 25-37.

[2] Ma T B, Hao L, Ning J G. Interface reconstruction algorithm in Eulerian multi-material hydrodynamic numerical method [J]. Chinese Journal of Computational Physics, 2008, 25(2): 133-138. (in Chinese)
马天宝, 郝 莉, 宁建国. Euler多物质流体动力学数值方法中的界面处理算法 [J]. 计算物理, 2008, 25(2): 133-138.

[3] Liu C, Ma T B, Ning J G. Adaptive grid subdivision algorithm based on the youngs' interface reconstruction algorithm [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2010, 27(6): 1111-1116. (in Chinese)
刘 春, 马天宝, 宁建国. 基于Youngs界面重构技术的自适应网格细分方法 [J]. 计算力学学报, 2010, 27(6): 1111-1116.

[4] Scardovelli R, Zaleski S. Direct numerical simulation of free-surface and interfacial flow [J]. Ann Rev Fluid Mech, 1999, 31: 567-603.

[5] Osher S, Fedkiw R. Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces [M]. Newyork, USA: Springer Press, 2003.

[6] Sethian J A. Level Set Methods and Fast Marching Methods [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1999.

[7] Enright D, Fedkiw R, Ferziger J, et al. A hybrid particle level set method for improved interface capturing [J]. J Comput Phys, 2002, 183(1): 83-116.

[8] Sussman M, Puckett E G. A coupled level set and volume of fluid method for computing 3D and axisymmetric incompressible two-phase flows [J]. J Comput Phys, 2000, 162(2): 301-337.

[9] van der Pijl S P, Segal A, Vuik C, et al. A mass-conserving Level-Set method for modeling of multi-phase flows [J]. Int J Numer Meth Fluids, 2005, 47: 339-361.

Comparison of Coupled Level Set Methods for Interface Treatment

WANG Xing[1], MA Tian-Bao[1], HAO Li[2]

(1. *State Key Laboratory of Explosion Science and Technology, Beijing Institute of Technology, Beijing* 100081, *China*;
2. *Science school, Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing* 100044, *China*)

Abstract: The coupled Level Set (LS) method algorithm of medium interface treatment was studied. Advantages and disadvantages of different methods in medium interface treatment process were given by comparing different solution of rotating flow and shearing flow, and the reason is analysed. Particle Level Set (PLS) method and Coupled Level Set and Volume of Fluid (CLSVOF) method are greatly improved in the conservation property of fluid compared on the pure LS through the contrast test. For PLS method, the LS interface can be corrected through reseeding and tracking the particle accurately. For CLSVOF method, the LS function can be reinitialized by reconstructing the interface and transporting the volume. In practical application, the CLSVOF method is more efficient and reasonable, since frequently reseeding will reduce the accuracy and tracking each particle requires more CPU memory for PLS method.

Key words: Particle Level Set (PLS) method; Coupled Level Set and Volume of Fluid (CLSVOF) method; numerical comparison