文章编号：1000-5773(2013)04-0523-05

频率混叠在气体炮内弹道速度测量中的应用*

陶天炯，王 翔，陈 宏，王 为，傅秋卫，汪晓松

（中国工程物理研究院流体物理研究所冲击波物理与爆轰物理实验室，四川绵阳 621900）

摘要：从采样理论出发，分析频率混叠现象的产生规律及其在时域和频域中的表现形式，获得采样信号频率与原始信号频率的关系，论证了利用频率混叠规律恢复原始信号频率的可行性。采用数值方法模拟理想条件下的频率混叠信号，分析原始信号频率恢复方法。利用激光位移干涉仪和光束遮断法，开展了二级轻气炮内弹道速度的对比测量实验，根据频率混叠规律恢复干涉信号频率，得到的结果与光束遮断法测量结果一致，解决了内弹道长历程、高速测量中记录长度与采样率之间的矛盾。

关键词：频率混叠；傅立叶变换；内弹道；速度测量

中图分类号：O521.3 **文献标识码**：A

1 引 言

气体炮是动高压物理领域主要的力学加载设备，其中弹速的控制和测量是一项重要的研究内容。作为气体炮及发射系统设计的关键参数，内弹道弹丸速度及加速度的准确测量对于气体炮系统的研制和检验具有重要的指导意义。目前，内弹道速度测量主要采用微波干涉测速技术[1-2]及激光干涉测速技术[3-6]。无论采用何种测量技术，都必须使用记录设备采集实验信号。在信号采集过程中，受记录设备的带宽和记录长度的限制，有时会出现测量无法完成的问题。以常用的数字存储示波器为例：如果被测弹丸持续加速 4 ms，最高弹速 4 km/s，在使用波长为 1550 nm 的激光位移干涉仪测速时，多普勒频移信号最高达 5 GHz，此时若采用模拟带宽为 6 GHz、记录长度为 10 Mpts 的数字存储示波器完整采集 5 GHz 的信号，则采样率必须大于 10 GHz，对应的记录时间为 1 ms，即无法记录全过程，若使 10 Mpts 记录长度完全记录，则采样率必须降为 2.5 GHz，远小于最高频率信号采集所需的采样率 10 GHz，因此，该示波器无法完成此信号在时域上的完整记录。考虑到气体炮弹丸在内弹道中不断加速，速度单调增加，并且没有大的速度跳跃，可以利用频率混叠规律完成信号频率的完全记录。在采样理论中，由于频率混叠现象阻碍原始信号在时域上的复原[7]，通常被看作负面影响加以避免，而本文将讨论它在频率复原方面的积极应用。

2 频率混叠背景

对于一个时域上的连续信号 $s(t)$，设频率为 f，根据采样理论，记录 $s(t)$ 的采样率必须大于 $2f$，否则无法重构时域信号。如图 1 所示，以 8 Hz 的采样率分别采集频率为 1、7 和 9 Hz 的信号，则 1 Hz 的信号能够被完全采集和重构，7 和 9 Hz 的信号在采集时出现“条纹丢失”，采集得到的频率均为1 Hz，无法重构原始信号，出现频率混叠现象。

为阐述频率混叠在频率复原方面的积极应用，基于采样理论，分析频率混叠的频域表象。设原始时

* **收稿日期**：2012-04-14；**修回日期**：2012-07-17

基金项目：国防科技重点实验室基金(9140C671001120C6707)

作者简介：陶天炯(1984－)，男，硕士，研究实习员，主要从事动高压诊断技术研究. E-mail：tjtao@caep.ac.cn

域信号 $s(t)$经过周期采样函数 $c(t)$采集后，得到采样信号 $\hat{s}(t)$，理想采样函数 $c(t)$的数学形式如下

$$c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n/f_s) \tag{1}$$

式中：δ 为单位脉冲函数或狄拉克函数，f_s 为采样频率，n 为整数。采样信号可以表示为

$$\hat{s}(t) = s(t)c(t) = s(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n/f_s) \tag{2}$$

由于 δ 函数具有“滤波”特性，因此(2)式可以写成

$$\hat{s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n/f_s)\delta(t - n/f_s) \tag{3}$$

将 $\hat{s}(t)$ 进行傅立叶变换，利用卷积定理得

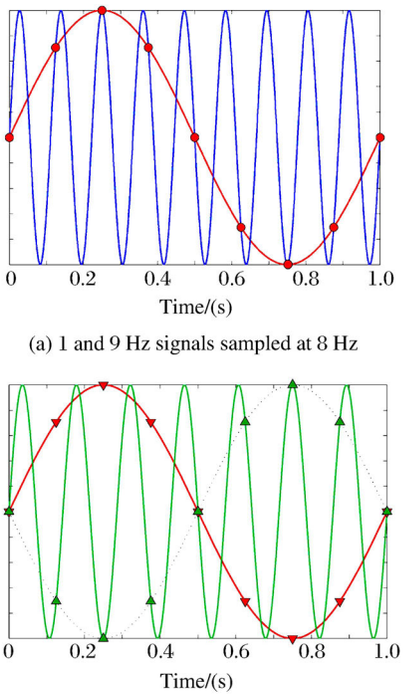
$$\hat{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi}S(\omega) * C(\omega) \tag{4}$$

式中：ω 为角频率，$S(\omega)$和 $C(\omega)$分别为信号 $s(t)$和采样函数 $c(t)$的傅立叶变换，“$*$”表示卷积运算。文献[8]给出了 $C(\omega)$的表达式，即

$$C(\omega) = 2\pi f_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi n f_s) \tag{5}$$

代入(4)式，可得

$$\hat{S}(\omega) = f_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(\omega - 2\pi n f_s) \tag{6}$$



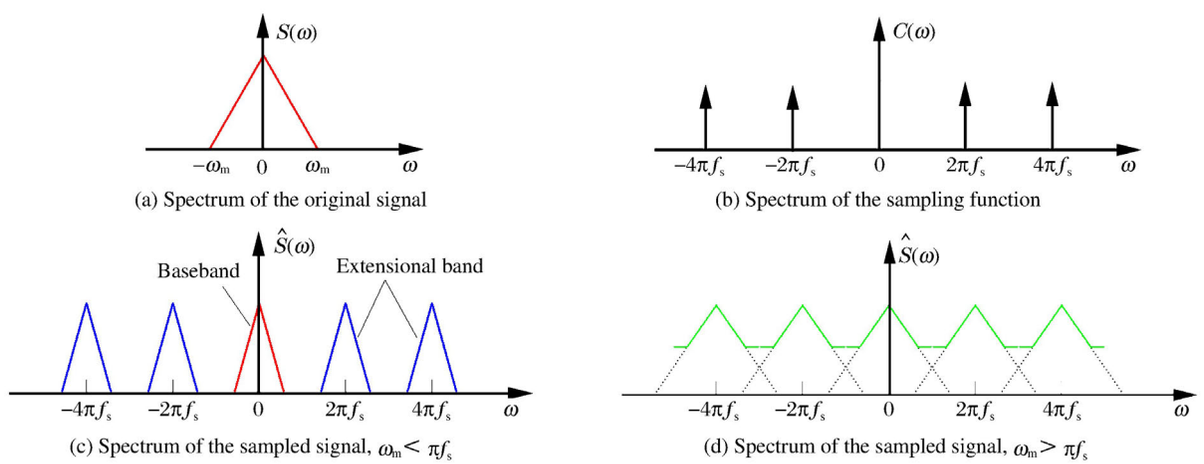
(a) 1 and 9 Hz signals sampled at 8 Hz

(b) 1 and 7 Hz signals sampled at 8 Hz

图 1 时域上的频率混叠现象

Fig. 1 Frequency aliasing in time domain

(6)式给出了采样信号和原始信号的傅立叶变换关系，从中可以看出，采样信号频谱是由原始信号频谱(基带)副本平移而成的周期性拓展谱，平移距离为采样率的整数倍，如图 2 所示。在图 2(d)中，由于采样率小于信号最大频率 ω_m 的 2 倍，因此发生频率混叠现象。



(a) Spectrum of the original signal

(b) Spectrum of the sampling function

(c) Spectrum of the sampled signal, $\omega_m < \pi f_s$

(d) Spectrum of the sampled signal, $\omega_m > \pi f_s$

图 2 周期采样的频域描述

Fig. 2 Representation of periodic sampling in frequency domain

3 频率混叠恢复原始信号频率

频率混叠虽然无法重构时域信号，但在某些特定条件下可用于恢复信号的频率信息。如图 3 所示，利用频率混叠恢复信号频率信息的条件是：信号频率单调递增，并且不会出现大于 $f_s/2$ 的频率跳变。

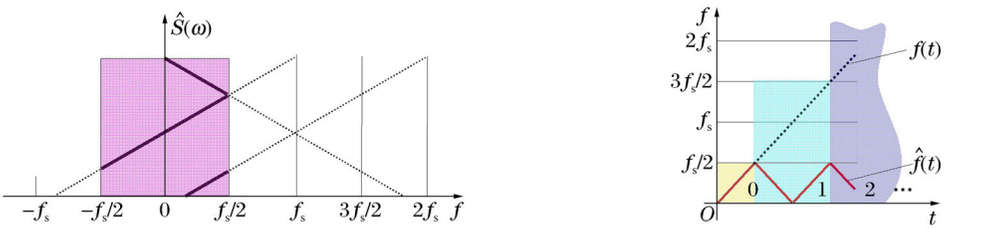
采样信号的分析处理一般采用离散傅立叶变换，其“可见”的频率范围为$[-f_s/2, f_s/2]$[9]，即图 3(a)中的阴影区域。考虑一个最终频率大于采样频率的原始信号，当信号频率小于尼奎斯特频率

($f_s/2$)时,不会出现频率混叠,可以正常采样;当信号频率超过尼奎斯特频率($f_s/2$)时,基带谱超出离散傅立叶变换的"可见"范围,出现频率混叠,但是以 f_s 为中心的第 1 个拓展谱的左边带进入离散傅立叶变换的"可见"范围,直到原始信号频率超过第 1 个拓展谱的右尼奎斯特界限($3f_s/2$)而退出"可见"范围,此时以 $2f_s$ 为中心的第 2 个拓展谱的左边带进入离散傅立叶变换的"可见"范围,周而复始,一个接一个的拓展谱左边带进入和退出离散傅立叶变换的"可见"范围,完成原始信号频率的完整记录。由于信号的傅立叶变换谱在数学上是对称的,即正、负频率同时出现,它们之间只存在相位差,因此分析处理采样信号频率时只取其正值。根据以上分析,通过频率混叠得到的采样信号频率随时间在 0～$f_s/2$ 之间震荡,如图 3(b)所示。通过观察,不难得出恢复原始信号频率 $f(t)$的关系式,即

$$f(t) = mf_s + \mathrm{sign}[f(t)]\hat{f}(t) \qquad m \in \mathbf{N} \tag{7}$$

式中:$\hat{f}(t)$ 为采样信号的频率;m 为自然数,当信号频率处于基带区域时取零,处于第 1 个拓展谱区域时取 1,处于第 2 个拓展谱区域时取 2,以此类推,如图 3(b)所示;$\mathrm{sign}[f(t)]$为符号函数,取值规则如下

$$\mathrm{sign}[f(t)] = \begin{cases} +1 & mf_s \leqslant f(t) < (m+1/2)f_s \\ -1 & (m-1/2)f_s \leqslant f(t) < mf_s \end{cases} \tag{8}$$

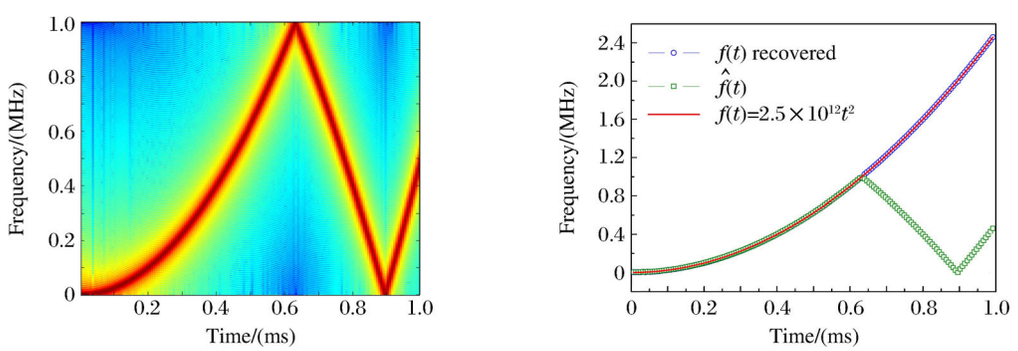


(a) Discrete Fourier analysis for the sampled signal　　(b) Time-spectrum of the sampled signal

图 3　利用频率混叠进行频率恢复

Fig. 3　Frequency recovery by frequency aliasing

为了验证利用频率混叠恢复原始信号频率信息方法的可行性,模拟一个频率随时间以二次函数增加的信号,按照低于最终信号频率的采样率采集,通过前面描述的方法恢复频率信息,并与理论值进行比较。如图 4 所示,信号频率 $f(t)$随时间 t 的变化关系为 $f(t) = 2.5\times10^{12}t^2$(Hz);数值模拟的时间区间为 0～1 ms;信号的最终频率为 2.5 MHz;模拟的采样频率为 2.0 MHz,小于最终信号频率所需的最低采样率 5.0 MHz。图 4(a)给出了通过短时傅立叶变换得到的采样信号的时间-频率谱。可见,信号在采样的尼奎斯特频率和零频率之间来回折返,按照前面分析的频率混叠恢复方法,对其进行频率恢复,结果如图 4(b)所示。可以看出,恢复的频率与原始频率完全吻合,说明在一定条件下利用频率混叠恢复法可以恢复原始信号频率,解决了引言中提出的记录长度与采样率之间的矛盾。



(a) Time-spectrum of the simulated signal　　(b) Frequency recovery of the original signal

图 4　利用频率混叠恢复信号频率的数值模拟

Fig. 4　Simulation of signal frequency recovery by frequency aliasing

4 实验应用

在气体炮内弹道速度测量中，因气体炮发射管较长，导致弹丸的运动时间较长，因此记录设备必须具有较长的记录时间；此外，气体炮的发射速度高达数千米每秒，测速仪器输出的信号频率较高，记录设备必须以较高的采样率采集信号。对于记录长度固定的信号采集设备，提高采样率，势必缩短记录时间。为解决这一矛盾，采用第 3 节阐述的频率混叠恢复法，进行原始信号频率恢复。

如图 5 所示，采用激光位移干涉仪和光束遮断法[10]同时测量二级轻气炮弹丸在内弹道中的速度，其中激光位移干涉仪测量弹丸在运动全过程的速度，而光束遮断法测量弹丸的出口速度。二级轻气炮中的弹丸在整个运动过程中一直加速，测速信号频率不断增加，符合频率混叠恢复法的要求。

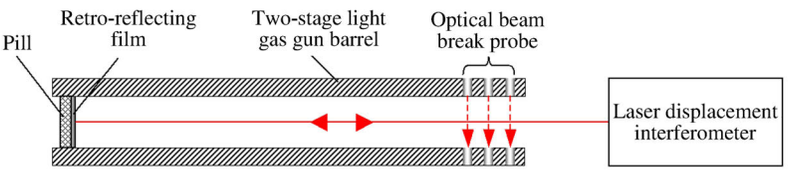


图 5 二级轻气炮内弹道速度测量装置示意图

Fig. 5 Configuration for interior ballistic velocity measurement in a two-stage light gas gun

激光位移干涉测速技术利用多普勒效应测量弹丸在内弹道中的速度历史。激光位移干涉仪将波长为 1 550 nm 的探测光照射到带有定向反射膜的弹丸表面，干涉装置收集弹丸表面的反射光，并与探测光干涉，提取弹丸的多普勒运动信息。光束遮断法利用弹丸遮断光束的时间差测量速度，用于检验利用频率混叠恢复法恢复激光干涉测速结果的准确性。

实验前，预估最终弹速小于 4 km/s，持续时间 4 ms。采用模拟带宽 6 GHz、记录长度 10 Mpts 的数字示波器记录激光位移干涉信号。根据弹速预估值，激光位移干涉信号的频率为 5.2 GHz，满足示波器模拟带宽 6.0 GHz 的要求。设置示波器采样频率为 2.0 GHz，则 10 Mpts 记录长度对应的记录时间为 5 ms，能够完成 4 ms 弹丸速度全过程记录，实验结果如图 6 所示。

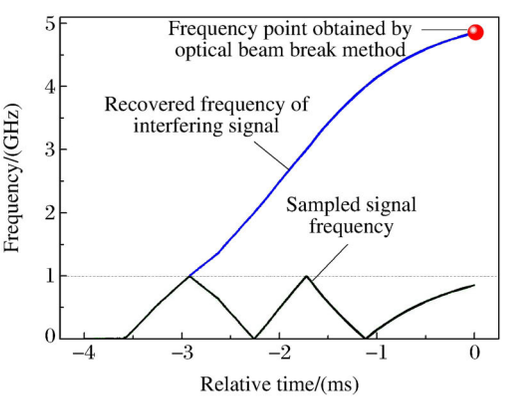


图 6 利用频率混叠恢复干涉信号频率实验结果

Fig. 6 Experimental result of the interfering signal frequency recovered by frequency aliasing method

正如第 3 节的理论分析，在图 6 显示的实验结果中，示波器采集的位移干涉信号频率随时间在零频和尼奎斯特频率之间振荡。利用频率混叠规律，恢复得到位移干涉信号频率。恢复后的位移干涉信号的终点频率为 4.86 GHz，与光束遮断法测量得到的结果一致，证明频率混叠恢复方法切实可行，解决了在内弹道测量中持续时间长、终点速度高的情况下，数字记录设备的记录长度与采样率之间的矛盾。

5 结 论

频率混叠现象虽然在时域中不利于信号的重构复原，但是在一定条件下可以利用其在频域中的混叠规律，恢复原始信号的频率信息。对于一个频率单调递增的信号，如果不存在较大的速度跳跃，可以使用尼奎斯特频率低于最终信号频率的采样率进行采集，然后按照频率混叠规律复原信号频率。该方法成功应用于二级轻气炮内弹道速度测量，解决了这类长历程高速实验中数字记录设备的记录长度与采样率之间的冲突。

References:

[1] Yang M T. Applications of microwave interferometer in the arms research [J]. Gun Launch & Control Journal, 1996(4):23-27. (in Chinese)
杨敏涛. 微波干涉仪在武器研制中的应用 [J]. 火炮发射与控制学报,1996(4):23-27.

[2] Ma L, Cai Z Y, Cheng F L, et al. The principle of microwave velocity radar [J]. Journal of Ballistics, 2003, 15(4): 87-91. (in Chinese)
马　玲,蔡征宇,程风雷,等. 毫米波测速雷达的测速原理 [J]. 弹道学报,2003,15(4):87-91.

[3] Barker L M, Hollenbach R E. Laser interferometer for measuring high velocities of any reflecting surface [J]. J Appl Phys, 1972, 43(11):4669-4675.

[4] Weng J D, Wang X, Ma Y, et al. A compact all-fiber displacement interferometer for measuring the foil velocity driven by laser [J]. Rev Sci Instrum, 2008, 79(11):113101.

[5] Strand O T, Goosman D R, Martinez C, et al. Compact system for high-speed velocimetry using heterodyne techniques [J]. Rev Sci Instrum, 2006, 77(8):083108.

[6] Wang D T, Peng Q X, Liu J, et al. Application of laser velocity interferometry in interior ballistic projectile velocity measurement [J]. Chinese Journal of High Pressure Physics, 2011, 25(2):133-137. (in Chinese)
王德田,彭其先,刘　俊,等. 激光干涉测速技术在内弹道弹丸速度测量中的应用研究 [J]. 高压物理学报,2011,25(2):133-137.

[7] Oppenheim A V, Schafer R W, Buck J R. Discrete-Time Signal Processing [M]. New Jersey, USA: Prentice Hall, 1999.

[8] Oppenheim A V, Willsky A S, Nawab S H. Signals and System [M]. New Jersey, USA: Prentice Hall, 1997.

[9] Brigham E O. Fast Fourier Transform and Its Applications [M]. New Jersey, USA: Prentice Hall, 1988.

[10] Wang W, Chen H, Wang X. Compact all fiber interior ballistic projectile velocity measurement system [J]. Journal of Applied Optics, 2011, 32(4):723-729. (in Chinese)
王　为,陈　宏,王　翔. 紧凑型全光纤内弹道弹速测量系统 [J]. 应用光学,2011,32(4):723-729.

Frequency Aliasing Used in Interior Ballistic Velocity Measurements for Gas Guns

TAO Tian-Jiong, WANG Xiang, CHEN Hong,
WANG Wei, FU Qiu-Wei, WANG Xiao-Song

(*National Key Laboratory of Shock Wave and Detonation Physics, Institute of Fluid Physics, CAEP, Mianyang* 621900, *China*)

Abstract: The occurrence of frequency aliasing and its representation in time and frequency domain are analyzed with sampling theory. Relationship between the sampled signal and the original signal is calculated and shows that the frequency of the original signal can be recovered by using the rule of frequency aliasing. Ideal sampled signals with frequency aliasing are simulated, and the frequency recovering method is confirmed by numerical simulations. The interior ballistic velocity in a two-stage light gas gun is measured by a laser displacement interferometer and the optical beam break method. The frequency of the laser interference signal recovered by aliasing rules is the same as the frequency obtained from the optical beam break method, which solves the contradiction between the recording length and the sampling frequency in high velocity measurements of long time duration, such as interior ballistic velocity measurement.

Key words: frequency aliasing; Fourier transformation; interior ballistic; velocity measurement