文章编号：1000-5773(2013)02-0261-07

可压缩多介质问题的高精度数值模拟*

赵海涛，王 成，宁建国

（北京理工大学爆炸科学与技术国家重点实验室，北京 100081）

摘要：采用高精度五阶加权本质无振荡(Weighted Essentially Non-Oscillatory，WENO)格式，结合多物质流体界面追踪方法(Level Set 方法)，以及 RGFM(Real Ghost Fluid Method)界面处理方法，对可压缩多介质动力学问题中高密度比和高压力比的强间断问题进行了高精度数值模拟。对一维气-水相互作用问题进行了数值模拟，验证了该计算方法的准确性和可靠性，并将其推广到二维深水爆炸和近水面爆炸问题中。通过对二维深水爆炸及近水面爆炸问题的数值模拟，可以看出该计算方法能够很好地模拟出水下爆炸时，冲击波的产生、传播、遇到界面后的反射和透射等现象，充分显示出该计算方法在处理高密度比和高压力比的强间断问题的优势。

关键词：加权本质无振荡(WENO)；RGFM；数值模拟；多介质；高精度

中图分类号：O382 **文献标识码**：A

1 引 言

可压缩多介质动力学问题，包含高密度比、高压力比以及强间断等复杂情况，一直是高精度数值模拟中极为复杂的问题。1999 年国外学者 Fedkiw 等人[1]提出了虚拟流体法(Ghost Fluid Method，GFM)，采用本质无振荡(Essentially Non-Oscillatory，ENO)格式和 TVD Runge-Kutta 方法对可压缩多介质流动问题进行数值求解，该计算方法在计算激波管问题或者弱激波与界面相互作用问题时计算效果较好，但是在处理强激波与界面作用时会引起虚假的物理解；Liu 等人[2-4]在 GFM 的基础上提出了 MGFM(Modified GFM)，结合 MUSCL(Monotone Upwind Schemes for Conservation Laws)方法对可压缩多介质流动问题进行研究，并对二维激波与水相互作用问题进行了数值模拟，由于 MGFM 方法仅利用 Riemann 问题的解对虚拟流体进行修正，不满足接触间断的性质，因此 MGFM 方法对界面的处理方式会引入较大误差；在此基础上，Wang 等人[5]发展了 MGFM 方法，采用 ENO 格式对可压缩多介质流动问题进行数值模拟，在界面处利用 Riemann 问题的解重新定义真实流体和虚拟流体的状态，由于 Riemann 问题的解准确地描述了界面处流体的流动状态，因此得到了较好的计算结果；水下爆炸问题是典型的可压缩多介质动力学问题，梁龙河等人[6]采用 MFIC 程序对不同药量的二维水下爆炸特性进行了数值模拟，给出了不同药量下不同距离的超压曲线，但没有给出水下爆炸过程的演化过程。

本研究采用五阶精度的加权本质无振荡格式和三阶 TVD Runge-Kutta 法对水下爆炸的控制方程组进行求解，采用 Level Set 方法，结合 RGFM(Real Ghost Fluid Method)方法，对界面进行追踪和处理。通过对一维水-气相互作用和二维水下爆炸问题进行数值模拟，模拟结果较好地反映了水下爆炸的

* **收稿日期**：2012-03-05；**修回日期**：2012-05-27

基金项目：国家自然科学基金(10972040)；教育部新世纪优秀人才支持计划(NCET-08-0043)；爆炸科学与技术国家重点实验室自主研究课题重点项目(ZDKT11-01)

作者简介：赵海涛(1981—)，男，博士研究生，主要从事爆炸与冲击动力学数值模拟研究. E-mail：10902066@bit.edu.cn

通讯作者：王 成(1972—)，男，博士，教授，主要从事计算爆炸力学研究. E-mail：wangcheng@bit.edu.cn

演化过程。通过模拟结果可以看出,该计算方法克服了传统计算方法在界面处带来误差而导致错误计算结果的情况,并能够准确捕捉界面的位置,计算稳定性好。

2 基本理论

2.1 流体动力学方程

水下爆炸问题是一个高密度比、高压力比的强间断多介质相互作用问题,对于该问题,本研究采用非定常可压缩 Euler 方程组作为流体动力学控制方程组,其形式[7]为

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial y}=0 \tag{1}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{U}=(\rho,\rho v_x,\rho v_y,\rho e_{\mathrm{tot}})^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{F}=[\rho v_x,\rho v_x^2+p,\rho v_x v_y,\rho v_x(e_{\mathrm{tot}}+p/\rho)]^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{G}=[\rho v_y,\rho v_x v_y,\rho v_y^2+p,\rho v_y(e_{\mathrm{tot}}+p/\rho)]^{\mathrm{T}}\\ E=e+(1/2)(v_x^2+v_y^2)\end{cases} \tag{2}$$

式中:ρ 为密度,p 为压强,v_x、v_y 分别为 x、y 方向的速度,e_{tot} 为单位质量总能量,e 为比内能。

2.2 状态方程

气体状态方程采用如下形式

$$p=(\gamma-1)\rho e \tag{3}$$

式中:γ 为气体的比热比。

水的状态方程采用 Tait 方程

$$p=(\gamma_1-1)\rho e-\gamma_1(B-A) \tag{4}$$

式中:$\gamma_1=7.15$,$A=0.1$ MPa,$B=331$ MPa。

2.3 Level Set 方程

在界面追踪问题中,采用 Level Set 方程进行界面追踪,即认为界面位于 $\varphi=0$ 处,Level Set 方程如下

$$\varphi_t+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\varphi=0 \tag{5}$$

式中:$\boldsymbol{v}$ 为界面的运动速度。

3 数值计算方法

控制方程组的半离散格式为

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_{i,j}=&\frac{1}{\Delta x}(\hat{F}^{+}_{i-1/2,j}+\hat{F}^{-}_{i-1/2,j})-\frac{1}{\Delta x}(\hat{F}^{+}_{i+1/2,j}+\hat{F}^{-}_{i+1/2,j})+\\ &\frac{1}{\Delta y}(\hat{G}^{+}_{i,j-1/2}+\hat{G}^{-}_{i,j-1/2})-\frac{1}{\Delta y}(\hat{G}^{+}_{i,j+1/2}+\hat{G}^{-}_{i,j+1/2})\end{aligned} \tag{6}$$

式中:$\hat{F}^{\pm}_{i\pm1/2,j}$、$\hat{G}^{\pm}_{i,j\pm1/2}$ 为数值通量,该数值通量采用五阶 WENO 格式[8]进行构造。

采用三阶 TVD Runge-Kutta 格式对时间进行离散,具体形式如下

$$\begin{cases}U^{(1)}_{i,j}=U^{n}_{i,j}+\Delta t L U^{n}_{i,j}\\ U^{(2)}_{i,j}=\frac{3}{4}U^{n}_{i,j}+\frac{1}{4}U^{(1)}_{i,j}+\frac{1}{4}\Delta t L U^{(1)}_{i,j}\\ U^{n+1}_{i,j}=\frac{1}{3}U^{n}_{i,j}+\frac{2}{3}U^{(2)}_{i,j}+\frac{2}{3}\Delta t L U^{(2)}_{i,j}\end{cases} \tag{7}$$

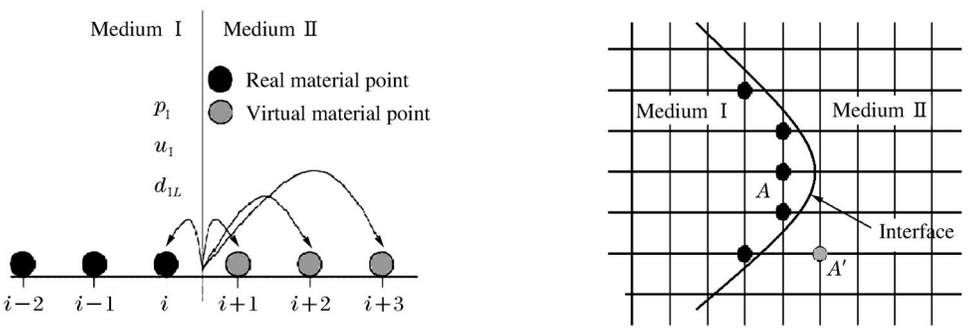
4 RGFM 方法

对于一维情况,如图 1(a)所示,假设界面位于节点 i 和 $i+1$ 之间,节点 i 处 Level Set 函数 $\varphi<0$,节点 $i+1$ 处 $\varphi>0$。构建 Riemann 问题时,界面两侧物质状态通过 i 和 $i+1$ 节点状态确定,即:取 i 节点物

理量定义界面在 $\varphi<0$ 一侧的物理状态 U_-,$i+1$ 节点的物理量定义界面在 $\varphi>0$ 一侧的物质状态 U_+。

二维情况下,如图 1(b)所示,假设介质Ⅰ位于 $\varphi<0$ 一侧,介质Ⅱ位于 $\varphi>0$ 一侧。A 点为介质Ⅰ紧邻界面处的点,通过 A 点的物理量给出界面 $\varphi<0$ 一侧的状态 U_-,选取位于介质Ⅱ中紧邻界面的 A' 点的物理量,作为与 A 点相对应的介质Ⅱ一侧的状态 U_+。选取 A' 点时,应保证 AA' 连线与界面法线方向夹角最小。通过 A 点和 A' 点的物理量建立二维情况下的局部 Riemann 问题。

局部 Riemann 问题建立后,采用双激波近似法[9]求解 U_-、U_+ 所定义的 Riemann 问题。求得界面状态后,通过 Riemann 问题的解修正真实流体以及定义虚拟流体的状态。一维情况时,如图 1(a)所示,用 Riemann 问题解中介质Ⅰ一侧的密度、压力和速度,对节点 i 的密度、压力和速度进行修正,并且将各物理量外推到界面另一侧的虚拟流体节点上。同理,用介质Ⅱ一侧 Riemann 问题解中的密度、压力和速度,对节点 $i+1$ 进行修正并外推到相应的虚拟流体节点上。



(a) 1-D　　(b) 2-D

图 1　构建 Riemann 问题示意图

Fig. 1　Schematic diagram of the reconstruction Riemann problem

二维情况时,由于冲击波经过界面后,法向速度和压力在界面处是连续的,切向速度和密度可以出现间断。因此,用 Riemann 问题解对介质Ⅰ一侧紧邻界面的节点 A 的密度、压力和法向速度进行修正,切向速度仍取 A 点原来的切向速度。介质Ⅰ中紧邻界面的所有节点都得到修正后,将介质Ⅰ中紧临界面节点修正后的密度、法向速度、切向速度和压力沿界面法向方向外推到虚拟流体节点上。同理,可以定义介质Ⅱ一侧紧邻界面节点和虚拟流体节点的密度、法向速度、切向速度和压力值。

5　算例分析

下面对一维气-水相互作用和二维水下爆炸问题进行数值计算,在以下的计算中,分别选取密度 $\rho_0=1\ \mathrm{Mg/m^3}$、压力 $p_0=0.1\ \mathrm{MPa}$ 和速度 $v_0=\sqrt{p_0/\rho_0}$,对计算中的各物理量进行无量纲化。

5.1　一维激波管模拟算例

5.1.1　算例一

对于高密度比气-水相互作用问题,传统的计算方法会产生非物理振荡,计算结果误差较大。运用本研究的计算方法对高密度比下的气-水相互作用进行数值模拟,取计算区域为[0,1],间断面位于 $x=0.4$ 处,界面两侧无量纲化的初始值为

$$x\leqslant 0.4:\ \rho_{\mathrm{L}}=1.0\times10^{-3},u_{\mathrm{L}}=10^2,p_{\mathrm{L}}=1.0,\gamma_{\mathrm{L}}=1.4$$

$$x>0.4:\ \rho_{\mathrm{R}}=1.009,u_{\mathrm{R}}=0,p_{\mathrm{R}}=2.0\times10^2,\gamma_{\mathrm{R}}=7.15,B=3.31\times10^3$$

计算域划分为 200 个网格,给定 CFL 条件数为 0.6。

图 2 示出了在时间 $t=2.5\times10^{-3}$ 时,密度比为 1009 的气-水相互作用后密度、压力和速度的计算结果。从图 2 中可以看出,计算结果与文献[3]中的结果比较吻合,表明本研究所采用的 Level Set 函数能

够很好地追踪物质界面，并且采用 RGFM 方法对界面两侧物质状态进行修正，能够很好地抑制界面处的非物理振荡。

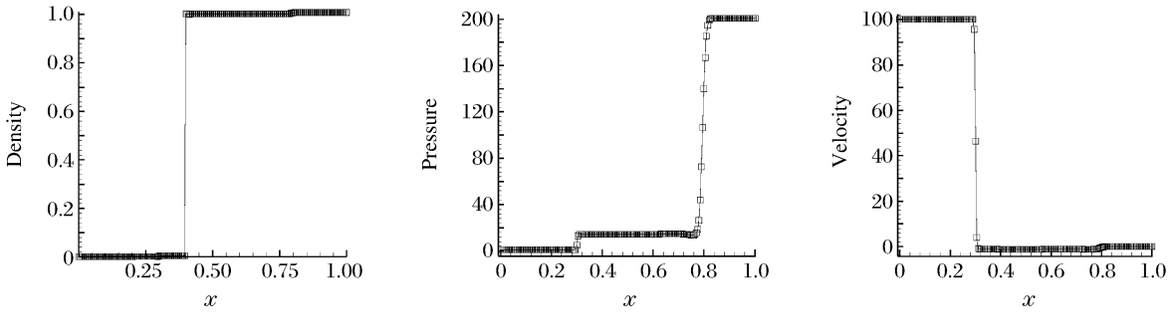


图 2 气-水相互作用问题 $t=2.5\times10^{-3}$ 时刻计算结果

Fig. 2 The simulation results of gas-water interaction problem at $t=2.5\times10^{-3}$

5.1.2 算例二

对于计算高压力比气-水相互作用问题时，物质界面两侧不同的物质采用不同的状态方程，由于压力梯度大，使得计算经常难以进行。运用本研究的计算方法对高压气体与水相互作用问题进行模拟，取计算区域为[0,4]，间断面位于 $x=2.0$ 处，无量纲后各物质物理量为

$$x\leqslant 2.0:\quad \rho_{\mathrm{L}}=1.63,u_{\mathrm{L}}=0,p_{\mathrm{L}}=7.81\times10^{4},\gamma_{\mathrm{L}}=1.40$$

$$x>2.0:\quad \rho_{\mathrm{R}}=1.00,u_{\mathrm{R}}=0,p_{\mathrm{R}}=1.00,\gamma_{\mathrm{R}}=7.15,B=3.31\times10^{3}$$

计算域划分为 200 个网格，给定 CFL 条件数为 0.6。

图 3 给出了在 $t=5.0\times10^{-4}$ 时，压力比为 78100 的气-水作用后的密度、压力、速度结果。从图 3 中可以看出，与文献[1]中的计算结果较为吻合，本研究通过 Level Set 函数和 RGFM 方法对物质界面进行追踪和处理，确定物质界面位置，避免了在物质界面两侧物质不同、压力梯度大时，产生非物理振荡、甚至使计算难以进行的情况。该计算方法计算稳定，与传统的 GFM 方法相比，计算结果更能表明物理现象的真实情况，充分表明该计算方法模拟可压缩多介质流体动力学问题的可行性。

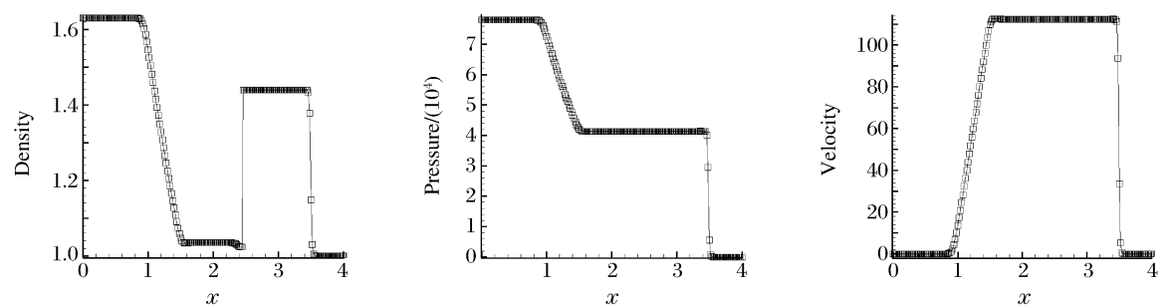


图 3 气-水相互作用问题 $t=5.0\times10^{-4}$ 时刻计算结果

Fig. 3 The simulation results of gas-water interaction problem at $t=5.0\times10^{-4}$

5.2 二维水下爆炸模拟算例

5.2.1 深水爆炸数值模拟

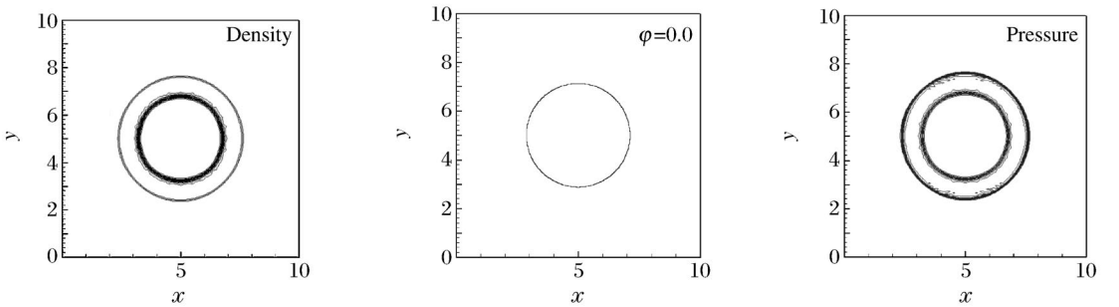
将本研究的计算方法应用于深水爆炸问题中，取计算区域为[0,10]×[0,10]，中心位置为爆炸产物，其半径为 2.0，其余均为水，无量纲后初始值为

$$(x-5.0)^2+(y-5.0)^2\leqslant 4.0:\ \rho=1.842,v_x=0.0,v_y=0.0,p=1.5\times10^{4},\gamma=1.40$$

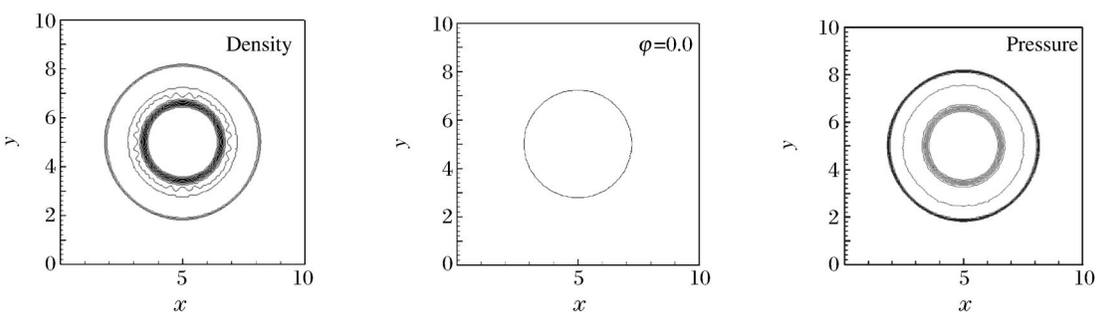
$$(x-5.0)^2+(y-5.0)^2>4.0:\ \rho=1.000,v_x=0.0,v_y=0.0,p=1.0,\gamma=7.15,B=3.31\times10^{3}$$

计算域网格数为 200×200，给定 CFL 条件数为 0.6。

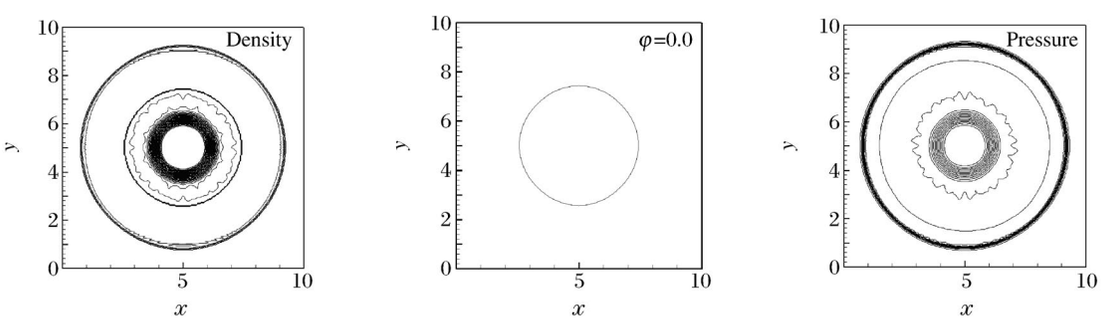
图 4 给出了不同计算时刻的计算结果,图中左侧为密度等值线图,中间为 Level Set 函数零等值线图(爆炸产物/水界面位置),右侧为压力等值线图。从图 4 中可以看出,爆炸产物向外膨胀,对周围水介质进行压缩,产生一个向外传播的冲击波,这时爆炸产物的能量大部分转化为冲击波的能量,同时在爆炸产物/水界面处产生一个稀疏波向内传播。由于爆炸产物的能量迅速衰减,当爆炸产物压力接近周围水介质压力时,使得冲击波不能接受爆炸产物的能量,开始脱离爆炸产物独立向前传播。爆炸产物/水界面在爆炸产物的作用下继续向外膨胀,但冲击波向外传播快,致使两者之间的距离逐渐增加。根据水下爆炸过程中,冲击波后爆炸产物/水界面处压力和法向速度是连续的,密度和切向速度可以出现间断,以及冲击波的性质,可以从密度图中确定爆炸产物/水界面的相应位置以及冲击波传播的位置,从而验证界面位置以及压力计算结果的准确性。



(a) $t=2.3791\times10^{-3}$



(b) $t=4.8083\times10^{-3}$



(c) $t=9.7864\times10^{-3}$

图 4　深水爆炸计算模拟结果

Fig. 4　The simulation results of the underwater explosion

5.2.2　近水面爆炸数值模拟

对于近水面爆炸问题,高压力比和高密度比情况同时存在,界面两侧物质的状态方程不同,而且存在两个物质界面,需要采用两个 Level Set 函数对界面进行追踪。取计算域为[0,10]×[0,10],高压气

团半径为 2.0，在 $x>8.0$ 区域的上方为空气，其余均为水，无量纲化后初始条件如下

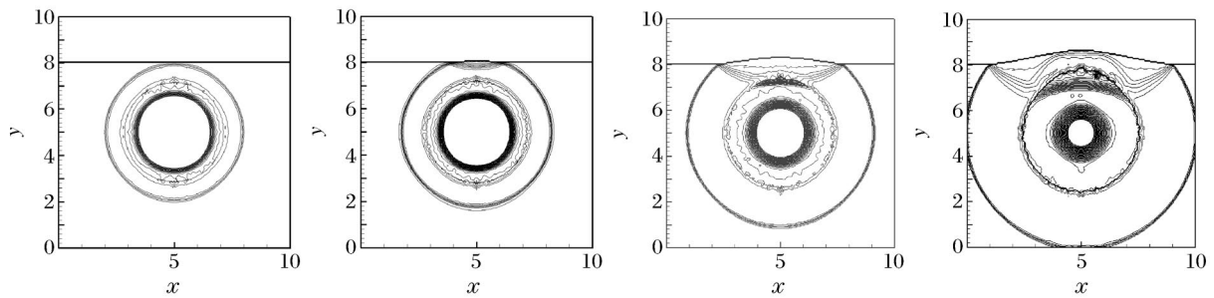
$$x>8.0:\quad \rho=1.380\times10^{-3},v_x=0.0,v_y=0.0,p=1.0,\gamma=1.40$$

$$x\leqslant 8.0:\quad \rho=1.000,v_x=0.0,v_y=0.0,p=1.0,\gamma=7.15,B=3.31\times10^{3}$$

$$(x-5.0)^2+(y-5.0)^2\leqslant 4.0:\ \rho=1.842,v_x=0.0,v_y=0.0,p=1.5\times10^{4},\gamma=1.4$$

计算域网格数为 200×200，给定 CFL 条件数为 0.6。

图 5 为不同时刻近水面爆炸的密度分布图，从图中可以看出，模拟结果与文献[2]的计算结果比较吻合。在 $t=3.6643\times10^{-3}$ 时，与深水爆炸中初始阶段相同，爆炸产生的冲击波向外传播，并在爆炸产物/水的界面处产生一个向内传播的稀疏波；当 $t=4.8367\times10^{-3}$ 时，爆炸产生的冲击波与空气/水的界面相互作用，空气/水的界面在冲击波作用下开始向上运动，在界面处产生一个反射波，由于透射波较弱，图中无法显示；当 $t=8.6536\times10^{-3}$ 时，在空气/水的界面处产生的反射波向下传播到爆炸产物/水的界面处，并与界面作用产生反射波和透射波，透射波传入爆炸产物中，向上运动的反射波与爆炸产物/水的界面作用，使其加速向上运动；在 $t=1.3112\times10^{-2}$ 时刻，由于冲击波在空气/水的界面和爆炸产物/水的界面之间不断反射，使得爆炸产物/水和空气/水的界面之间的距离逐渐减小，并且水面不断向上隆起。



(a) $t=3.6643\times10^{-3}$ (b) $t=4.8367\times10^{-3}$ (c) $t=8.6536\times10^{-3}$ (d) $t=1.3112\times10^{-2}$

图 5 近水面爆炸计算模拟结果

Fig. 5 The simulation results of the near water surface explosion

通过以上算例表明，利用 Riemann 问题解对界面两侧物质状态进行修正，克服了传统 GFM 方法在高密度比和高压力比问题数值模拟中得到错误计算结果的情况，考虑了接触间断问题的物理性质，减小了 MGFM 方法引进的误差，大大提高了计算的稳定性和计算结果的真实性，较好地模拟了水下爆炸过程中冲击波的产生、传播、反射、透射以及水面的隆起等演化过程，充分体现出该计算方法在计算高密度比和高压力比的强间断问题的优势。

6 结 论

采用多个 Level Set 函数，对可压缩多介质流动中多种物质的各个界面进行追踪，给出各个物质运动界面的位置；针对物质界面两侧物质状态方程不同、密度和压力梯度大、计算时出现非物理振荡等情况，采用 RGFM 方法对界面两侧物质状态进行修正，解决了传统 GFM 方法得到错误计算结果和 MGFM方法引进较大误差的问题，计算稳定性好，减小了模拟结果与真实物理情况之间的误差。通过对水下爆炸问题的模拟可以看出，该计算方法为理解和研究爆炸与冲击等复杂物理问题及其物理现象的演化过程提供了有效可行的数值研究手段。

References:

[1] Fedkiw R P, Aslam T, Merriman B, et al. A non-oscillatory Eulerian approach to interface in multi-material flows (The Ghost Fluid Method) [J]. J Comput Phys, 1999, 152: 457-492.

[2] Liu T G, Khoo B C, Yeo K S. The simulation of compressible multi-medium flow Ⅱ. Applications to 2D underwater shock refraction [J]. Comput Fluids, 2001, 30(3): 315-337.

[3] Liu T G, Khoo B C, Wang C W. The ghost fluid method for compressible gas-water simulation [J]. J Comput Phys, 2005, 204(1): 193-221.

[4] Liu T G, Khoo B C, Xie W F. The modified ghost fluid method as applied to extreme fluid-structure interaction in the presence of cavitation [J]. Commun Comput Phys, 2006, 1(5): 898-919.

[5] Wang C W, Liu T G, Khoo B C. A real ghost fluid method for the simulation of multimedium compressible flow [J]. Society for Industrial and Applied Mathematics on Journal on Scientific Computing, 2006, 28(1): 278-302.

[6] Liang L H, Cao J Z, Yuan X C. 2-D nummerical simulation of characteristics of underwater explosions [J]. Chinese Journal of High Pressure Physics, 2004, 18(3): 203-208. (in Chinese)
梁龙河,曹菊珍,袁仙春. 水下爆炸特性的二维数值模拟研究 [J]. 高压物理学报, 2004, 18(3): 203-208.

[7] Wu K T, Hao L, Wang C, et al. Level Set interface treatment and its application in Euler method [J]. Sci China Ser G, 2009, 39(9): 1204-1203. (in Chinese)
吴开腾,郝　莉,王　成,等. Euler 方法中的 Level Set 界面处理及其应用研究 [J]. 中国科学 G 辑, 2009, 39(9): 1204-1203.

[8] Jiang G S, Shu Q W. Efficient implementation of weighted ENO schemes [J]. J Comput Phys, 1996, 126(1): 202-228.

[9] Toro E F. Riemann Solvers and Numerical Method for Fluid Dynamics [M]. Berlin: Springer Press, 2009.

High Resolution Numerical Simulation of Compressible Multi-Medium Flow

ZHAO Hai-Tao, WANG Cheng, NING Jian-Guo

(*State Key Laboratory of Explosion Science and Technology, Beijing Insititute of Technology, Beijing* 100081, *China*)

Abstract: We used high resolution 5th-order WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory) scheme, Level Set method and interface treatment method—RGFM (Real Ghost Fluid Method) in simulating compressible multi-medium flow with high density and high pressure ratio. Simulation of one-dimensional gas-water interaction problem was performed, and the accuracy and reliability of the method was verified. This method is applied to two-dimensional deep water and near free surface explosion simulation. From the simulation results of underwater explosion, it indicates that this method can simulate the shock wave generation, propagation, reflection and transmission after interation with the interface in underwater explosion. This method is strongly advantageous in simulating compressible multi-medium flow with high density ratio, high pressure ratio and strong discontinuity.

Key words: Weighted Essentially Non-Oscillatory(WENO); Real Ghost Fluid Method(RGFM); numerical simulation; multi-medium; high resolution