文章编号：1000-5773(2011)02-0097-07

光滑粒子流体动力学-有限元法接触算法研究*

张志春[1]，强洪夫[1]，高巍然[2]

(1.第二炮兵工程学院，陕西西安　710025；
2.第二炮兵装备研究院，北京　100085)

摘要：耦合光滑粒子流体动力学(SPH)方法和有限元法(FEM)，是研究冲击动力学问题的一种有效途径。为解决SPH粒子和有限单元间的接触问题，提出了SPH-FEM接触算法。该算法是在有限元节点处设置背景粒子，采用SPH接触算法的思想，计算施加在SPH粒子和有限元节点上的接触力，并且以外力的形式分别加入到SPH动量方程和有限元动力学方程中。利用SPH-FEM接触算法，对两杆撞击以及圆柱形钢弹正冲击钢板发生的冲塞破坏过程进行了三维数值模拟，靶板采用含损伤的Johnson-Cook模型和Grüneisen状态方程，模拟结果与实验结果吻合较好。

关键词：光滑粒子流体动力学方法；有限元法；接触；背景粒子；冲击
中图分类号：O347.3　　**文献标识码**：A

1　引　言

有限元法(Finite Element Method，FEM)经过半个多世纪的研究和发展，已成为工程和科学领域中重要的数值计算工具。目前，FEM对物理模型的求解有4种模式：拉格朗日(Lagrange)方法、欧拉(Euler)方法、耦合的欧拉-拉格朗日(CEL)方法、随机的拉格朗日-欧拉(ALE)方法[1]。Lagrange方法处理问题时需要不断对网格进行重新划分，不仅计算量大，而且在大变形时不可避免地会遇到网格缠绕问题。Euler方法在精确确定自由表面、变形边界、运动交界面等存在困难。CEL法和ALE法结合了Lagrange法和Euler法的特点，但它们在网格高度畸变的情况下仍会使数值模拟结果产生严重错误。基于上述原因，FEM在处理冲击动力学等涉及大变形的问题时存在困难。光滑粒子流体动力学(Smoothed Particle Hydrodynamics，SPH)方法是由Lucy[2]、Gingold和Monaghan[3]提出的一种无网格方法，通过一系列任意分布的粒子来求解相应的偏微分方程组，从而得到精确稳定的数值解。由于不需要借助网格，并且具有Lagrange性质，SPH方法在处理涉及大变形、自由表面等问题上显示出明显的优势，目前已经广泛应用于连续固体力学和流体力学。但是，SPH法却存在如下问题：(1) SPH方法存在拉伸不稳定性；(2) SPH的形函数不满足Kronecker delta函数，无法像FEM一样方便地施加边界条件；(3) SPH计算量大，计算效率较FEM低[4-5]。

因此耦合SPH和FEM，在FEM计算困难的区域使用SPH粒子离散，充分发挥这两者的优势，成为当前计算力学的研究热点。为了描述SPH粒子和有限单元之间的接触作用，Attaway等人[6]提出了

* **收稿日期**：2010-01-31；**修回日期**：2010-04-22
基金项目：国家重点基础研究发展计划(973计划)(61338)；教育部新世纪优秀人才支持计划；第二炮兵工程学院创新性探索研究项目(KX2008172)
作者简介：张志春(1982－)，男，博士研究生，主要从事计算力学研究. E-mail：zzchun323@yahoo.com.cn
通讯作者：强洪夫(1965－)，男，博士，教授，博士生导师，主要从事材料与结构的失效行为与高性能数值模拟研究. E-mail：qiang@263.net

一种主-从接触算法，即当检测到从点与主面发生穿透时，在从点和主面上施加接触力，其中接触力的计算采取预测-修正方式。Johnson 等人[7-8]提出的算法中，当 SPH 粒子穿透有限元接触面时，采用动量守恒、角动量守恒的方式对粒子和有限元接触面相关节点的速度进行调整，达到避免穿透的目的。王吉等人[9]在 Johnson 的工作基础上，也对 SPH 粒子和有限单元之间的滑移接触进行了研究。上述研究都是基于有限元接触算法的思想，在每个时间步上都要检测粒子与有限单元的穿透情况，并且均要确定接触界面及其法向方向，因此计算较为复杂。

为了解决 SPH 粒子与有限元之间的接触问题，本研究采用背景粒子方式，将接触界面上的有限元节点视为 SPH 粒子，基于无网格接触算法的思想，计算粒子与有限元节点之间的接触力，避免发生穿透。使用该 SPH-FEM 接触算法，对两杆撞击以及圆柱形钢弹正冲击钢板发生的冲塞破坏过程进行三维数值计算，验证该 SPH-FEM 接触算法的正确性和有效性。

2 SPH-FEM 接触算法流程

图 1 显示了 SPH 粒子与有限单元接触时接触力的施加情况，其中小实线圆代表 SPH 粒子，大虚线圆代表 SPH 粒子 i 的支持域，小虚线圆代表设置在有限元节点处的背景粒子。背景粒子具有 SPH 粒子的属性，只是被动地被 SPH 粒子搜索，其粒子质量、位置、速度、应力等根据相应的有限元节点进行更新。当有限元节点与 SPH 粒子的间距达到两倍光滑长度时，产生接触力。接触力的计算借鉴 SPH 接触算法的思想[10]，将有限元节点视为粒子，任何位于有限元节点支持域内的 SPH 粒子都会对节点产生接触力，反之任何位于 SPH 支持域内的有限元节点也都会对粒子产生接触力。计算流程见图 2。

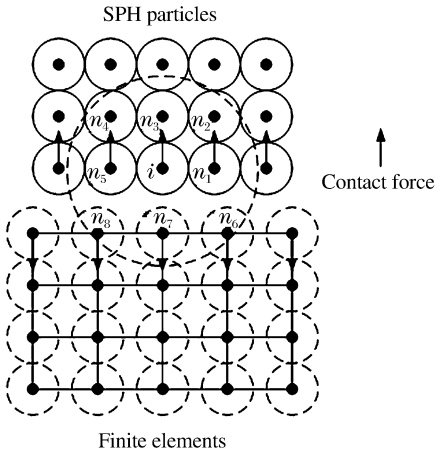


图 1 SPH 粒子与有限单元接触

Fig. 1 Contact between SPH particles and finite elements

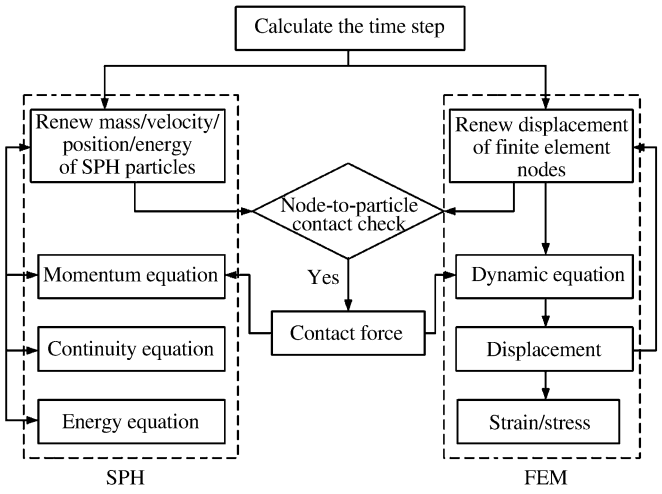


图 2 SPH-FEM 接触算法流程

Fig. 2 Solution procedure for SPH-FEM contact algorithm

为了计算接触力，首先定义一个接触势

$$\varphi(x_i) = \sum_j^{N_c} K \frac{m_j}{\rho_j} \left[\frac{W(r_{ij})}{W(\Delta p_{av})} \right]^n \tag{1}$$

式中：N_c 表示粒子 i 的支持域内属于不同体的临近粒子数(有限元节点视为粒子)，对于粒子 i(见图 1)，$N_c=3$，即节点 n_6、n_7、n_8 都会对粒子 i 的接触力做出贡献；m_j、ρ_j 分别为粒子 j 的质量和密度；W 为 SPH 光滑核函数，且当 x_A 和 x_B 属于同一体时，$W(x_A-x_B)=0$；r_{ij} 为粒子间距；Δp_{av} 为粒子间光滑长度的平均值；K 和 n 为用户自定义参数，其中 K 与有限元接触算法中的接触刚度类似，与材料性质和冲击速度相关。

作用在 SPH 粒子和有限元节点上的接触力为

$$F(x_i)=\sum_j^{N_c} Kn\,\frac{m_j}{\rho_j}\,\frac{m_i}{\rho_i}\,\frac{W^{n-1}(r_{ij})}{W^n(\Delta p_{av})}\nabla_{x_i}W(r_{ij}) \tag{2}$$

接触力的方向由 SPH 光滑核函数的梯度确定。该接触力以外力的形式加入到 SPH 动量方程和有限元动力学方程中进行求解。

在 Lagrange 框架下,耦合 SPH 和 FEM 时,要求两者的积分必须是同步的,数据的传输必须是在同一时间点。这就要求在每一步计算中采用相同的时间步长,因此选择 SPH 与 FEM 时间步长的较小者,即

$$\Delta t_{\text{SPH-FEM}}=\min(\Delta t_{\text{SPH}},\Delta t_{\text{FEM}}) \tag{3}$$

式中:SPH 的时间步长 $\Delta t_{\text{SPH}}=\alpha h/c$,FEM 的时间步长 $\Delta t_{\text{FEM}}\leqslant L/c$,$h$ 为光滑长度,L 为最小单元尺寸,c 为材料声速,α 为时间步长比例系数。

该 SPH-FEM 接触算法与 SPH 的求解格式保持一致,因此可以充分利用 SPH 的临近搜索列表。只要粒子与节点的间距达到两倍光滑长度,就在相关粒子和节点上施加接触力,不需要定义接触粒子。与有限元接触算法不同,该 SPH-FEM 接触算法不需要在每个时间步上定义接触界面和界面法线方向,因此可以方便地扩展到三维。

3 算 例

采用 SPH-FEM 接触算法,对两杆撞击和圆柱形钢弹正冲击钢板发生的冲塞破坏过程进行三维数值模拟。为消除由拉伸不稳定性造成的数值断裂,在 SPH 动量方程中加入了 Monaghan[4] 提出的人工应力,并且采用强洪夫等人[11]提出的完全变光滑长度法来消除变光滑长度所带来的影响。

3.1 两杆撞击

图 3 为两杆撞击模型图。两杆尺寸均为0.05 m×0.05 m×0.2 m,初始间距为3.5 cm,以初速度 200 m/s 进行撞击。当 $t=87.5$ μs 时,两杆发生接触,之后沿 z 方向产生一维应力波。杆的材料参数为:密度 $\rho=7.83$ g/cm^3,弹性模量 $E=207$ GPa,泊松比 $\nu=0.3$。为了进行对比验证,分别采用 SPH-FEM 接触算法和 LS-DYNA970 对该问题进行计算。使用 SPH-FEM 接触算法时,一杆采用 500 个 SPH 粒子离散,另一杆采用 500 个六面体单元离散。在使用 LS-DYNA970 计算时,两杆均采用 500 个六面体单元离散。计算时间均为 200 μs。

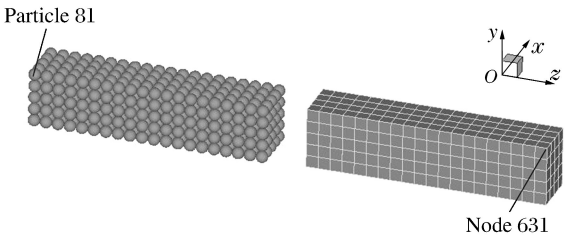


图 3 两杆撞击模型图

Fig. 3 Model of the two bars impact

图4、图5显示了处于对称位置的粒子81和节点631的应力和速度曲线,并且将速度曲线与LS-

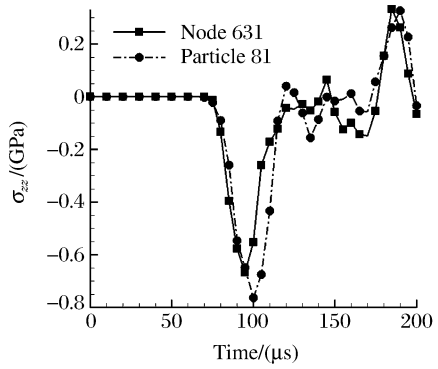


图 4 z 向应力曲线

Fig. 4 Plots for stress of z direction

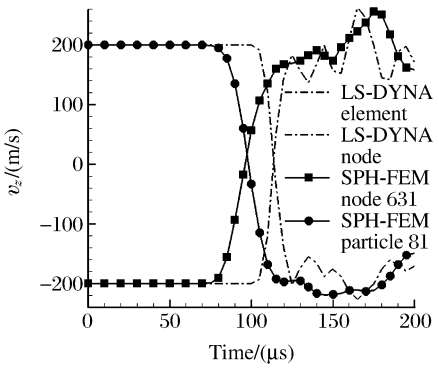


图 5 z 向速度曲线与 LS-DYNA970 的对比

Fig. 5 Comparison plots for velocity of z direction between SPH-FEM method and LS-DYNA970

DYNA970 的计算结果进行了对比。由图 5 可知,两种方法得到的计算结果吻合较好,表明 SPH-FEM 接触算法可以满足对称性要求。由于 SPH 动量方程中加入了人工粘度,消除了部分数值振荡,因此与有限元节点相比,SPH 粒子的计算结果更光滑。对比 LS-DYNA970 的计算终态结果,粒子 81 和节点 631 的速度误差分别为 12.3%和 7.0%。从图 5 可以看出,LS-DYNA970 计算得到的速度曲线较 SPH-FEM 耦合算法延迟了 25 μs,这是因为在 SPH-FEM 耦合算法中,当节点与粒子间距达到两倍光滑长度时,产生接触力,而有限元接触算法中,该间距要小得多。

3.2 圆柱形钢弹正冲击钢板

冲击侵彻是涉及几何、材料和接触非线性的复杂动力学问题,其中高应变率载荷下材料力学行为的描述是问题的关键。它不但包含了大应变、不同应变率和温度条件下的应力-应变关系,而且还涉及材料的损伤和失效。其中存在的大变形、运动物质交界面、变形边界和自由表面等特征是基于网格的数值方法难以求解的。本研究采用 SPH-FEM 接触算法,对三维 Arne Tool 钢制圆柱形弹丸与 Weldox 460 E 钢板正冲击发生的冲塞破坏过程进行三维数值计算。计算模型如图 6 所示,其中:靶板中心区域采用 SPH 粒子离散,粒子间距为 1 mm,粒子总数为 21853;靶板其余部分和子弹采用六面体单元离散,在 SPH 粒子附近的网格尺寸约 1 mm,并向四周逐渐增大,单元总数为 23744。靶板四周施加固支边界条件,靶板内部的有限元与 SPH 粒子交界面采用 SPH-FEM 固结算法[12],计算时间为 160 μs。

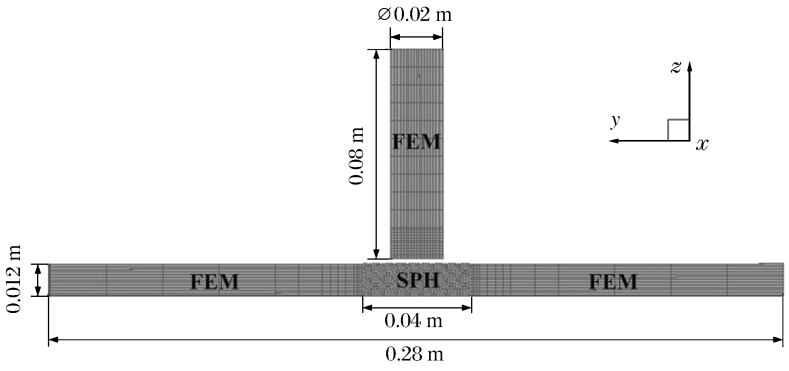


图 6 冲击模型尺寸及离散图

Fig. 6 Model size and discretization mode of impact problem

为了描述靶板材料的屈服应力及损伤演化,引入 Børvik 等人[13]提出的修正 Johnson-Cook 强度模型。该模型中将材料的屈服强度表示为损伤变量、等效应变、等效应变率和温度的函数,即

$$\sigma_{\mathrm{eq}} = (1-D)\{A + B[(1-D)\varepsilon]^{n}\}\{1 + C\ln[(1-D)\dot{\varepsilon}/\dot{\varepsilon}_0]\}(1-T^{*m}) \tag{4}$$

式中:A、B、C、m、n 为材料常数;D 为损伤变量,$D=0$ 表示材料没有损伤,$D=1$ 表示材料完全失效;ε 为累积塑性应变;$\dot{\varepsilon}_0$ 为用户定义的参考应变率;T^* 为无量纲温度,且 $T^* = (T-T_0)/(T_{\mathrm{m}}-T_0)$,其中 T_0 为室温,T_{m} 为材料熔点。实际上材料出现宏裂纹时,损伤变量 D 的临界值小于 1,失效准则可描述为 $D=D_{\mathrm{c}}\leqslant 1$,其中 D_{c} 为损伤变量临界值。损伤变量 D 是累积塑性应变 ε 的函数,可描述为

$$\dot{D} = \begin{cases} 0 & \varepsilon < \varepsilon_{\mathrm{d}} \\ \dfrac{D_{\mathrm{c}}}{\varepsilon_{\mathrm{f}} - \varepsilon_{\mathrm{d}}}\dot{\varepsilon} & \varepsilon \geqslant \varepsilon_{\mathrm{d}} \end{cases} \tag{5}$$

式中:ε_{d} 为损伤阈值;ε_{f} 为断裂等效塑性应变,与材料的应力三轴度、应变率和温度有关。在 Johnson 等人[14]提出的剪切损伤演化模型中,将 ε_{f} 描述为

$$\varepsilon_{\mathrm{f}} = [D_1 + D_2\exp(D_3\sigma^*)][1 + D_4\ln(\dot{\varepsilon}/\dot{\varepsilon}_0)](1 + D_5 T^*) \tag{6}$$

式中:D_1、D_2、D_3、D_4、D_5 为材料常数;$\sigma^* = \sigma_{\mathrm{m}}/\sigma_{\mathrm{eq}}$ 为应力三轴度,其中 $\sigma_{\mathrm{m}} = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$ 为平均正应力。靶板材料参数见表 1,靶板压强采用 Grüneisen 状态方程进行计算。

考虑到子弹在冲击过程中变形较小,因此模拟时采用线弹性模型,子弹材料参数见表 2。

表 1　靶板材料参数

Table 1　Material parameters of target

ρ/(g/cm^3)	E/(GPa)	ν	A/(MPa)	B/(MPa)	n	$\dot{\varepsilon}_0$/(s^{-1})	C	D_c	p_d
7.850	200	0.33	490	807	0.73	5×10^{-4}	0.012	0.3	0
T_m/(K)	c_p/[J/(kg·K)]	α	T_0/(K)	m	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
1800	452	0.9	293	0.94	0.0705	1.732	−0.54	−0.0123	0

表 2　子弹材料参数

Table 2　Material parameters of projectile

ρ/(g/cm^3)	E/(GPa)	ν
7.838	200	0.33

当子弹初速度 $v_0=285.4$ m/s 时,圆柱形钢弹正冲击钢板的数值模拟结果如图 7 所示,子弹、靶塞以及靶板冲塞破坏的实验结果如图 8、图 9 所示[13]。对比图 7、图 8 和图 9 可以看出,计算结果与实验结果吻合较好。观察图 7 可知:当 $t=7$ μs 时,子弹与靶板接触,子弹开始减速,弹头正前方处的靶板开始加速,靶板被挤压产生压缩变形,靶板背部出现隆起,部分粒子出现损伤;接着,靶板变形继续增大,在弹头周围的靶板出现剪切区,靶板背部出现拉伸;随后,由于剪切部位的塑性应变和靶板背部拉伸应力迅速增大,该区域内粒子的损伤变量迅速演化,达到临界值,部分粒子完全失效,裂纹逐渐向靶板背部扩展;在冲击的后期,靶塞逐渐形成,完全与靶板脱离。

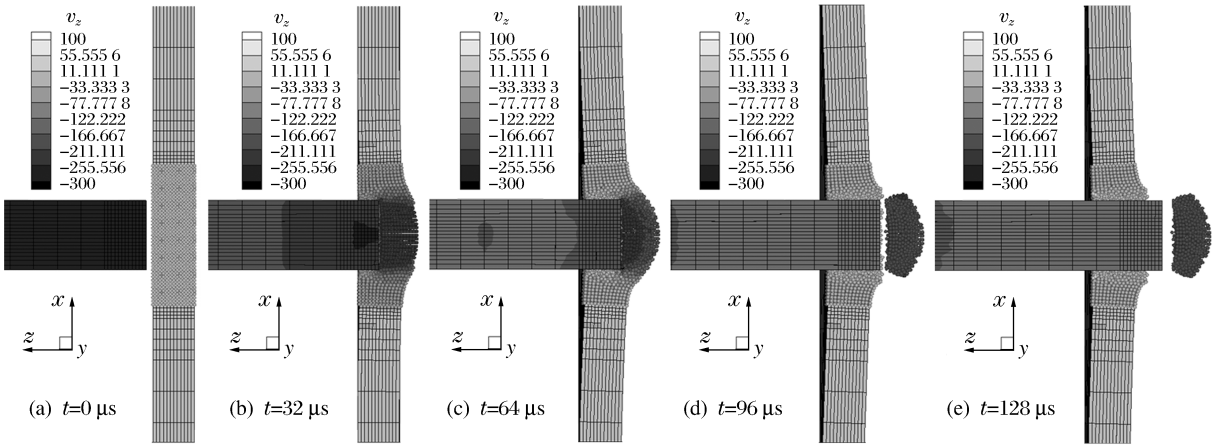


图 7　冲击过程模拟结果

Fig. 7　Simulation results of the impact process



图 8　冲击后的子弹和靶塞

Fig. 8　Projectile and plug after impact

表 3 列出了不同子弹初速度下的计算结果与相关实验数据,其中 v_{pr} 为子弹剩余速度,v_{tr} 为靶塞速



图 9 冲击后的靶板横截面

Fig. 9 Cross-section of target after impact

度，d_f 为靶板前部穿孔直径，d_r 为靶板后部穿孔直径。由表 3 可知，数值计算结果与实验结果之间的误差较小，符合较好。数值上的误差主要源于采用的 SPH-FEM 接触算法中，当粒子与有限元节点间距达到两倍光滑长度时，产生的接触力与实际情况略有不同。通过加密接触部位 SPH 粒子和有限单元设置，可以减小该误差。

表 3 计算值与实验值对比

Table 3 Comparisons between computed results and experimental data

No.	v_0/(m/s)	Numerical results				Experimental results			
		v_{pr}/(m/s)	v_{tr}/(m/s)	d_f/(mm)	d_r/(mm)	v_{pr}/(m/s)	v_{tr}/(m/s)	d_f/(mm)	d_r/(mm)
1	303.5	200.5	265.2	23.77	23.96	199.7	242.3	20.65	20.93
2	285.4	169.0	229.6	23.39	23.89	181.1	224.7	20.59	20.75
3	244.2	139.3	176.6	23.52	23.93	132.6	187.7	20.42	21.18
4	224.7	110.0	160.5	23.08	23.62	113.7	169.0	20.56	20.72

4 结 论

为了解决 SPH 粒子和有限单元之间的接触问题，提出了 SPH-FEM 接触算法。该算法是在有限元节点上设置背景粒子，利用无网格接触算法的思想，计算 SPH 粒子与有限元节点之间的接触力，将接触力以外力的形式分别加入到 SPH 动量方程和 FEM 动力学方程进行积分。该 SPH-FEM 接触算法可以充分利用 SPH 的临近搜索列表，不需要在每个时间步上定义接触界面和界面法线方向，既保留了 SPH 法处理大变形和运动界面的优势，又具有 FEM 的方便施加边界条件、计算效率高、精度高等特点。利用 SPH-FEM 接触算法，数值模拟了两杆撞击和圆柱形钢弹正冲击钢板的冲塞破坏过程。模拟结果与实验结果符合较好。因此，SPH-FEM 接触算法可以应用到冲击动力学、流固耦合等领域中。此外，该算法还可以方便地扩展到 FEM 与其它无网格方法的接触问题，如无网格伽辽金法(EFG)和无网格再生核质点法(RKPM)。

References:

[1] Belytschko T, Liu W K, Moran B. Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures [M]. New York: John Wiley & Sons, 2000: 23-88.

[2] Lucy L B. A Numerical Approach to the Testing the Fission Hypothesis [J]. Astron J, 1977, 82: 1013-1024.

[3] Gingold R A, Monaghan J J. Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory and Application to Non-Spherical Stars [J]. Mon Not R Astr Soc, 1977, 181: 375-389.

[4] Monaghan J J. SPH without a Tensile Instability [J]. J Comput Phys, 2000, 159(2): 290-311.

[5] Monaghan J J. Smoothed Particle Hydrodynamics [J]. Rep Prog Phys, 2005, 68: 1703-1759.

[6] Attaway S W, Heinstein M W, Swegle J W. Coupling of Smoothed Particle Hydrodynamics with the Finite Element Method [J]. Nucl Eng Des, 1994, 150: 199-205.

[7] Johnson G R. Linking of Lagrangian Particle Methods to Standard Finite Element Methods for High Velocity Im-

pact Computations [J]. Nucl Eng Des,1994,150(2-3):265-274.

[8] Johnson G R,Stryk R A,Beissel S R. SPH for High Velocity Impact Computations [J]. Comput Methods Appl Mech Eng,1996,139(1-4):347-373.

[9] Wang J,Wang X J,Bian L. Linking of Smoothed Particle Hydrodynamics Method to Standard Finite Element Method and Its Application in Impact Dynamics [J]. Explosion and Shock Waves,2007,27(6):522-528. (in Chinese)
王　吉,王肖钧,卞　梁. 光滑粒子法与有限元的耦合算法及其在冲击动力学中的应用 [J]. 爆炸与冲击,2007,27(6):522-528.

[10] Vignjevic R,de Vuyst T,Campbell J C. A Frictionless Contact Algorithm for Meshless Methods [A]//International Conference on Computational & Experimental Engineering and Sciences [C]. Miami,USA,2007,3(2):107-112.

[11] Qiang H F,Gao W R. SPH Method with Fully Variable Smoothing Lengths and Implementation [J]. Chinese Journal of Computational Physics,2008,25(5):569-575. (in Chinese)
强洪夫,高巍然. 完全变光滑长度 SPH 法及其实现 [J]. 计算物理,2008,25(5):569-575.

[12] Zhang Z C,Qiang H F,Gao W R. Coupling of Smoothed Particle Hydrodynamics with Finite Element Method Using Attachment Algorithm [A]//International Symposium on Meshfree,Particle and Extended Finite Element Methods [C]. Nanjing,2009:146-154.

[13] Børvik T,Langseth M,Hopperstad O S,et al. Ballistic Penetration of Steel Plates [J]. Int J Impact Eng,1999,22(9-10):855-886.

[14] Johnson G R,Cook W H. Fracture Characteristics of Three Metals Subjected to Various Strains,Strain Rates,Temperatures and Pressures [J]. Eng Fract Mech,1985,21(1):31-48.

Research on Contact Algorithm between Smoothed Particle Hydrodynamics and Finite Element Method

ZHANG Zhi-Chun[1],QIANG Hong-Fu[1],GAO Wei-Ran[2]

(1. *Xi'an Hi-Tech Institute*,*Xi'an* 710025,*China*;
2. *The Second Artillery Equipment Academy*,*Beijing* 100085,*China*)

Abstract: The coupling between smoothed particle hydrodynamics (SPH) and finite element method (FEM) is an effective approach for the simulation of impact dynamics. An alternative algorithm for the treatment of contact problem between SPH particles and finite elements was employed. Background particles were assigned in the position of finite element nodes,and the contact forces on SPH particles and finite element nodes were calculated with the same approach as SPH particles to particle contact algorithm. The contact force was added to the momentum equation for SPH and dynamic equation for FEM respectively. Using the SPH-FEM contact algorithm,the axial impact between two bars and the perforation of a cylindrical steel projectile impacting a plate target were simulated,where the Johnson-Cook material model with damage effect and Grüneisen equation of state were employed. The computed results showed good agreement with the experimental data.

Key words: smoothed particle hydrodynamics; finite element method; contact; background particle; impact