文章编号：1000-5773(2011)05-0429-06

非定常欠膨胀射流的正格式数值模拟*

朱孙科[1]，陈二云[2]，马大为[1]，乐贵高[1]

(1.南京理工大学机械工程学院，江苏南京 210094；
2.上海理工大学能源与动力工程学院，上海 200093)

摘要：采用二阶正格式方法对非定常欠膨胀射流进行了数值模拟。将二维守恒方程的正格式方法推广到轴对称 Euler 方程组的求解，并对不同马赫数下的燃气射流进行了数值计算。计算结果表明，该方法能够较好地捕捉到包含膨胀波、入射激波、反射激波、马赫盘、射流边界以及三波点等复杂射流流场的波系结构，与实验照片反映的流动特征以及已有的数值结果相吻合。表明该方法对间断解具有较强的捕捉能力，在激波阵面上不会出现数值振荡。

关键词：计算流体力学；燃气射流；正格式；数值模拟
中图分类号：O354；V211 **文献标识码**：A

1 引 言

在过去的几十年间，与射流相关的流场问题一直是人们关注的课题。准确地确定火箭导弹喷口的射流流场波系结构，对发射装置的操作安全性和导弹的探测与跟踪具有十分重要的作用[1]。相关的实验研究为人们认识此类流动的特征提供了有价值的参考，但是由于射流实验条件的限制，不能提供较详细的流场细节，促使人们寻找其它解决方法，高分辨率数值格式的模拟是研究燃气射流的有效手段。

目前，模拟此类流动的数值格式主要有 TVD、NND、ENO、CE/SE 和 DG-FEM 等[1-5]。20 世纪 90 年代末，Liu 等[6-7] 提出了一种求解双曲守恒律的时间和空间均具有二阶精度的正格式(Positive Schemes)，其数值通量由一个采用中心差分格式的数值通量和一个包含弱耗散和强耗散的上风格式数值通量组成，时间上利用 Runge-Kutta 方法进行离散。该格式构造过程简单，计算经济性好，是一种性能优良的计算格式。

本研究在 Liu 等人工作的基础上，将双曲守恒方程的正格式发展到轴对称 Euler 方程组的求解，并对非定常欠膨胀燃气射流问题进行了数值模拟。计算结果与实验照片反映的流动特征基本吻合，与高精度、高分辨率间断有限元方法的计算结果吻合较好，马赫盘位置的误差较小，表明该方法具有较强的激波捕捉能力。

2 控制方程和离散方法

2.1 控制方程

在忽略粘性和热传导效应的假设下，轴对称流动 Euler 方程组的守恒形式为[2,5,8]

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F(U)}{\partial x}+\frac{\partial G(U)}{\partial y}=S(U),\quad \Omega\times(0,T) \tag{1}$$

* **收稿日期**：2010-05-04；**修回日期**：2010-09-30
基金项目：国防基础科研资助项目(A2620061288)；上海高校选拔培养优秀青年教师科研专项基金(slg09003)；上海市教育委员会重点学科项目(J50501)
作者简介：朱孙科(1982—)，男，博士研究生，主要从事计算流体力学研究. E-mail：suncobest@163.com
通讯作者：马大为(1953—)，男，教授，博士生导师，主要从事兵器发射理论与技术研究. E-mail：ma-dawei@mail.njust.edu.cn

式中：$\Omega\in R^2$；T 是时间变量；$U=[\rho,\rho u,\rho v,E]^T$，$F(U)=[\rho u,\rho u^2+p,\rho uv,(E+p)u]^T$，$G(U)=[\rho v,\rho uv,\rho v^2+p,(E+p)v]^T$，$S(U)=(-\rho v/y)[1,u,v,(E+p)/\rho]^T$；$\rho$ 是密度；u 和 v 分别为对应于 x 和 y 方向的速度分量；p 是压强；$E=\rho e+\rho(u^2+v^2)/2$，表示单位体积的总能量；e 是单位质量的内能，对于理想气体，状态方程为 $p=(\gamma-1)\rho e$，γ 是比热比。

2.2 空间离散

采用正格式方法对控制方程(1)进行离散，得到如下轴对称 Euler 方程组的半离散有限差分方程

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_{i,j}=-\left[\frac{1}{\Delta x}(F_{i+1/2,j}-F_{i-1/2,j})+\frac{1}{\Delta y}(G_{i,j+1/2}-G_{i,j-1/2})\right]+S_{i,j} \tag{2}$$

式中：Δx 和 Δy 分别为 x 和 y 方向上的空间步长。以通量 $F_{i+1/2,j}$ 为例，构造正格式数值通量。

2.2.1 弱耗散格式构造

将方程(2)中的数值通量 $F_{i+1/2,j}$ 采用一个中心差分通量 $F^{\mathrm{c}}_{i+1/2,j}$ 和一个上风通量 $F^{\mathrm{up}}_{i+1/2,j}$ 组合而成，并引入限制器 $L^0=R\mathrm{diag}[(\varphi^0(\theta^k)]R^{-1}$，限制器函数 $\varphi^0(\theta)$ 满足[9]

$$\begin{cases}0\leqslant\varphi^0(\theta),\quad \varphi^0(\theta)/\theta\leqslant 2\\ \varphi^0(1)=1\end{cases}$$

可以构造如下的数值通量

$$F^0_{i+1/2,j}=F^{0,\mathrm{up}}_{i+1/2,j}+L^0(F^{0,\mathrm{c}}_{i+1/2,j}-F^{0,\mathrm{up}}_{i+1/2,j}) \tag{3}$$

式中：$F^{0,\mathrm{c}}_{i+1/2,j}=\frac{1}{2}[F(U_{i,j})+F(U_{i+1,j})]$，$F^{0,\mathrm{up}}_{i+1/2,j}=\frac{1}{2}[F(U_{i,j})+F(U_{i+1,j})]-\frac{1}{2}\left|\mathring{A}\right|(U_{i+1,j}-U_{i,j})$，这里 $\left|\mathring{A}\right|$ 是 $\boldsymbol{A}=\nabla F$ 的模，它等于 $R\left|\Lambda\right|R^{-1}$，其中 $\left|\Lambda\right|=\mathrm{diag}(\left|\lambda^k\right|)$。这样可以得到数值通量的如下弱耗散格式

$$F^0_{i+1/2,j}=\frac{1}{2}[F(U_{i,j})+F(U_{i+1,j})]-\frac{1}{2}\left|\mathring{A}\right|(U_{i+1,j}-U_{i,j})+\frac{1}{2}L^0\left|\mathring{A}\right|(U_{i+1,j}-U_{i,j}) \tag{4}$$

2.2.2 强耗散格式构造

若 $\boldsymbol{A}=\nabla F$ 的模 $\left|\dot{A}\right|=R\mathrm{diag}(\mu^k)R^{-1}$，这里对角矩阵 $\mathrm{diag}(\mu^k)\geqslant\left|\Lambda\right|$。引入限制器 $L^1=R\mathrm{diag}[\varphi^1(\theta^k)]R^{-1}$，其中，$\varphi^1(\theta)$ 采用 minmod 限制器函数，满足[10]

$$\varphi^1(\theta)=\begin{cases}0 & \theta\leqslant 0\\ \theta & 0<\theta\leqslant 1\\ 1 & \theta>1\end{cases}$$

则可以构造如下的数值通量

$$F^1_{i+1/2,j}=F^{1,\mathrm{up}}_{i+1/2,j}+L^1(F^{1,\mathrm{c}}_{i+1/2,j}-F^{1,\mathrm{up}}_{i+1/2,j}) \tag{5}$$

式中：$F^{1,\mathrm{c}}_{i+1/2,j}=\frac{1}{2}[F(U_{i,j})+F(U_{i+1,j})]$，$F^{1,\mathrm{up}}_{i+1/2,j}=\frac{1}{2}[F(U_{i,j})+F(U_{i+1,j})]-\frac{1}{2}\left|\dot{A}\right|(U_{i+1,j}-U_{i,j})$，可以进一步得到数值通量的如下强耗散格式

$$F^1_{i+1/2,j}=\frac{1}{2}[F(U_{i,j})+F(U_{i+1,j})]-\frac{1}{2}\left|\dot{A}\right|(U_{i+1,j}-U_{i,j})+\frac{1}{2}L^1\left|\dot{A}\right|(U_{i+1,j}-U_{i,j}) \tag{6}$$

2.2.3 正格式数值通量

将以上的弱耗散格式(4)式和强耗散格式(6)式合并，可以构造如下的正格式数值通量

$$F^{\alpha,\beta}_{i+1/2,j}=\frac{1}{2}[F(U_{i,j})+F(U_{i+1,j})]-\frac{1}{2}\left[\alpha\left|\mathring{A}\right|(I-L^0)+\beta\left|\dot{A}\right|(I-L^1)\right](U_{i+1,j}-U_{i,j}) \tag{7}$$

并满足如下的 CFL 条件

$$\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\alpha\max_{1\leqslant k\leqslant n,U}\left|\lambda^k\right|+\beta\max_{1\leqslant k\leqslant n,U}\mu^k\right)\leqslant\frac{1}{2}$$

式中：Δt 是时间步长，常数 α 和 β 满足 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$，且 $\alpha+\beta\geqslant 1$。

2.3 时间离散

为了与空间精度匹配,时间离散采用二阶精度的 Runge-Kutta 方法[11-12],即

$$U_{i,j}^{*}=U_{i,j}^{m}-\left[\frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{i+1/2,j}^{\alpha_x,\beta_x}-F_{i-1/2,j}^{\alpha_x,\beta_x})+\frac{\Delta t}{\Delta y}(G_{i,j+1/2}^{\alpha_y,\beta_y}-G_{i,j-1/2}^{\alpha_y,\beta_y})\right]+\Delta t S_{i,j} \tag{8a}$$

$$U_{i,j}^{**}=U_{i,j}^{*}-\left[\frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{i+1/2,j}^{\alpha_x,\beta_x{}^{*}}-F_{i-1/2,j}^{\alpha_x,\beta_x{}^{*}})+\frac{\Delta t}{\Delta y}(G_{i,j+1/2}^{\alpha_y,\beta_y{}^{*}}-G_{i,j-1/2}^{\alpha_y,\beta_y{}^{*}})\right]+\Delta t S_{i,j}^{*} \tag{8b}$$

$$U_{i,j}^{m+1}=\frac{1}{2}U_{i,j}^{m}+\frac{1}{2}U_{i,j}^{**} \tag{8c}$$

3 计算结果与分析

通过喷管射流任意子午面截得的一半区域如图 1 所示,计算区域取为[−1∶8]×[0∶4],轴向距离为 9,径向取 4,计算网格为 $\Delta x=1/20$,$\Delta y=1/20$。喷流流动参数和外流流动参数如表 1 所示,表中下标“e”表示喷管出口流动参数,下标“a”表示外流流动参数。喷流中心轴 AB、喷管固壁表面 EF 和 FG 采用镜面反射边界条件,喷管出口边界 GH 采用表 1 所示的射流条件,下游边界 BC 采用外推,上游边界 DE 和外边界 CD 采用静止大气条件,初场赋予静止大气条件,在 $t=0$ 时刻喷管出口突然喷出射流。

表 1 喷流流动参数

Table 1 Parameters of fluid flow

Case	Ma_e	p_e/p_a	T_e/T_a
1	1.0	2.59	1.0
2	0.5	2.59	1.0
3	1.5	2.59	1.0

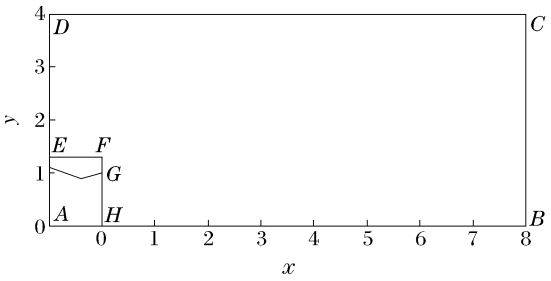


图 1 计算区域

Fig. 1 Calculation domain

图 2 给出了 Case 1 情况下欠膨胀射流在不同时刻(时间为无量纲时间)的密度等值线演化过程。从图 2(a)～图 2(h)可以看出,由喷管喷出的高压气体射入压力较低的大气环境,在喷管出口处迅速膨胀,形成的膨胀波使压力能够逐渐过渡到静止大气条件,膨胀波穿过射流传播并在射流边界处以压缩波的形式被反射回喷流,产生一道入射激波。该入射激波在传播的过程中遇到第一马赫盘,产生一道反射激波,该反射激波与入射激波在马赫盘的边缘相交,形成了三叉激波,出现三波交点,流场继续发展,第一马赫盘上游的流场结构相对稳定。另外,射流在发展过程中形成的涡环在向下游传播的过程中,其尺寸不断增大,从图 2(h)可以看到涡环已经离开计算区域。另外,从图 2(g)可以看到,无量纲时间为 13 时,流场中已经出现了第二马赫盘,由图 2(h)可以更清晰地看到两个马赫盘的结构,以及膨胀波、桶形激波、入射激波、反射激波、射流边界等复杂的流场波系结构。该复杂波系结构与相同流动条件下的 CE/SE[1]、DG-FEM[5]格式的数值结果以及实验照片[13](如图 2(i)所示)所反映的流动特征吻合。另外,从本研究的计算结果可知,第一和第二马赫盘距喷管出口平面的距离分别为 2.56 和 5.69,与三阶 DG-FEM格式相应计算值(2.6 和 5.8)的误差分别为 1.5%和 1.9%,吻合较好。

图 3 和图 4 分别给出了 Case 2 和 Case 3 的密度等值线、压力等值线和马赫数等值线分布。对于 Case 2 的亚音速射流,在喷管出口处未观察到膨胀波,并且射流边界没有出现像 Case 1 和 Case 3 那样的弯曲形状。另外,比较图 2、图 3 和图 4 的密度等值线可以看出,对于给定的喷管,在相同的压力比下,更高的马赫数,会使流场在射流下游的更远处形成直径更大的马赫盘。

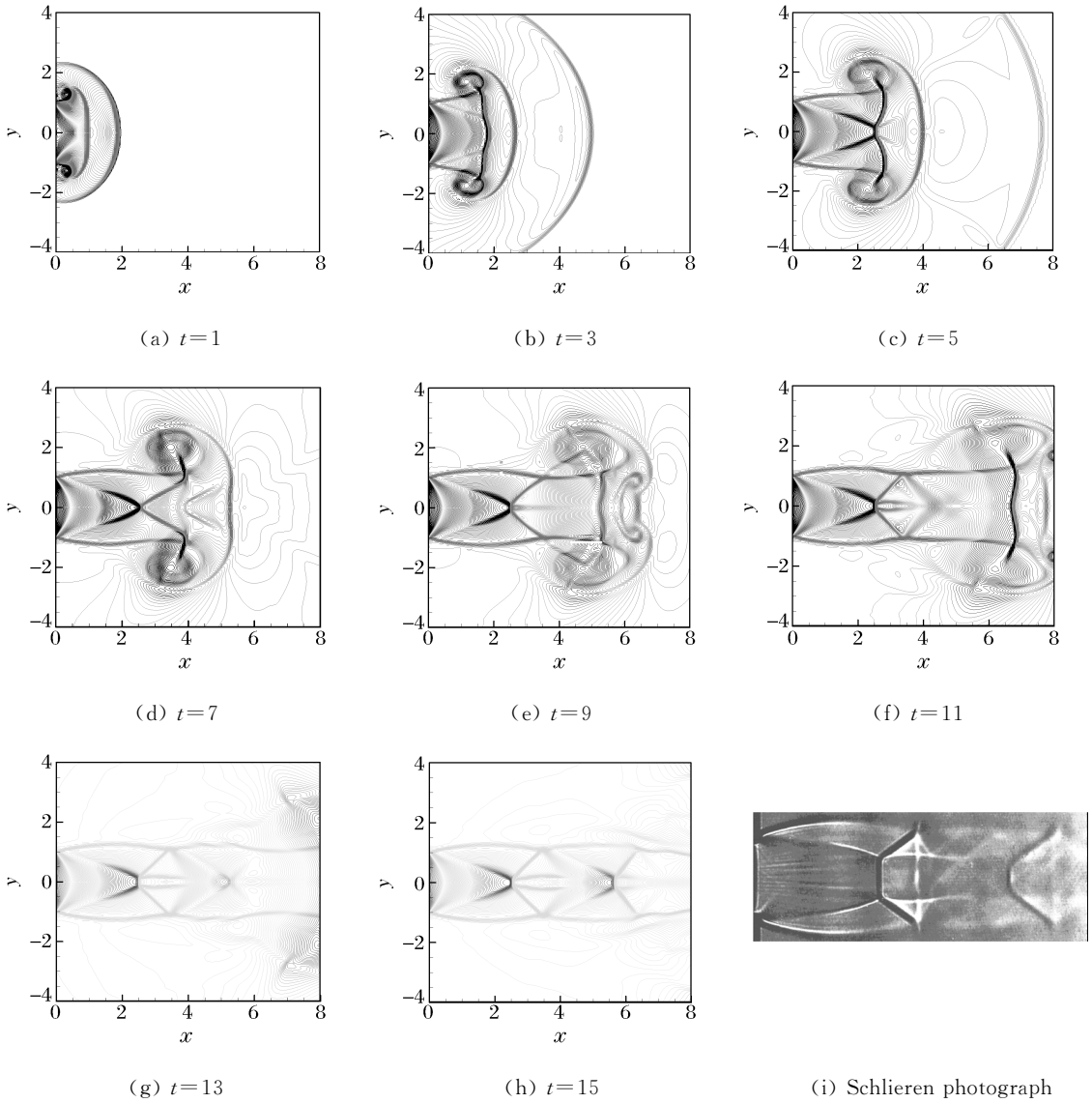


图 2 Case 1 不同时刻密度等值线和纹影照片

Fig. 2 Density contours at different time and schlieren photograph in Case 1

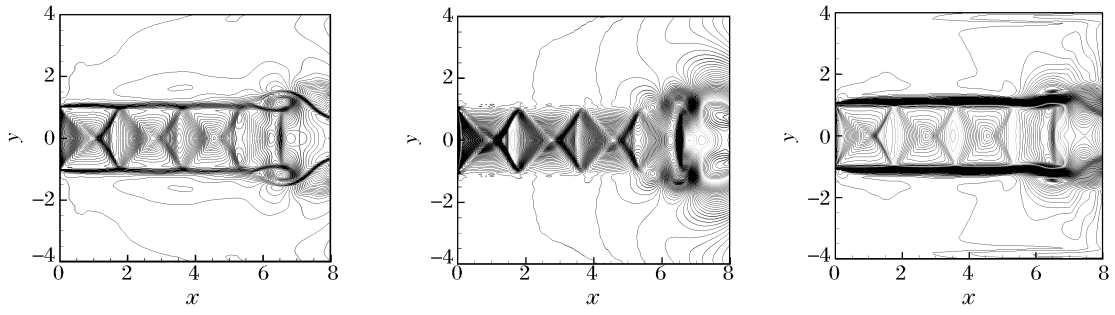
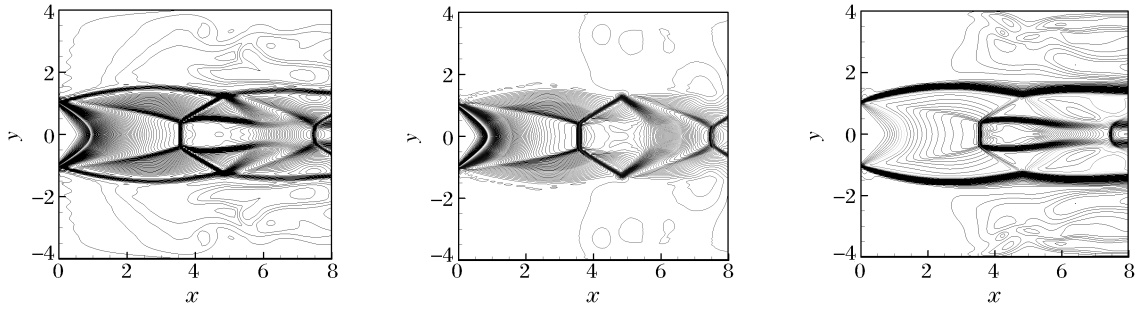


图 3 Case 2 等值线分布

Fig. 3 Contours in Case 2

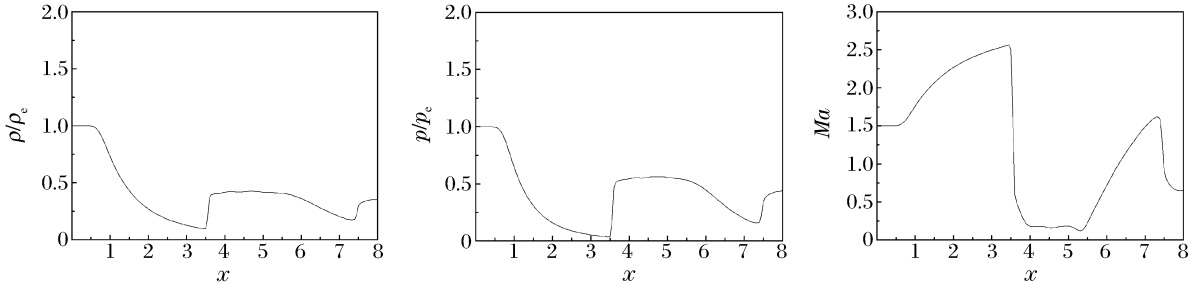
图 5 给出了 Case 3 情况下射流中心轴线上的密度、压力和马赫数的分布曲线。其中 ρ/ρ_e 表示射流中心轴线上局部密度与喷管出口处的密度之比,p/p_e 表示射流中心轴线上局部压力与喷管出口处的压力之比,Ma 是局部马赫数。从图 5 中可以看出,当入射激波遇到马赫盘发生反射时,在第一和第二马赫盘所处位置的密度和压力迅速增加,表明正格式方法具有较强的间断解捕捉能力。另外,从马赫数分布曲线可以看到,两个马赫盘之间的流场变量经历了从第一马赫盘下游的亚音速流动到音速流动,再到第二马赫盘上游的超音速流动的过渡过程。本研究计算得到的第一和第二马赫盘距喷管出口平面的距离分别为 3.5 和 7.4。



(a) Density　　(b) Pressure　　(c) Mach

图 4　Case 3 等值线分布

Fig. 4　Contours in Case 3



(a) Density distribution　　(b) Pressure distribution　　(c) Mach distribution

图 5　Case 3 中心轴线上的流动参数分布

Fig. 5　Flow parameters distribution along the jet axis in Case 3

4　结　论

将二维正格式方法推广到轴对称 Euler 方程组的数值求解,并对 3 种马赫数下的欠膨胀燃气射流进行了数值模拟。计算结果与实验照片所反映的流动特征基本吻合,并与 DG-FEM、CE/SE 格式的数值结果吻合较好。利用该方法捕捉到的第一和第二马赫盘位置,与三阶 DG-FEM 格式数值结果的相对误差均小于 2%,表明推广是成功的。捕捉到的射流复杂流场波系结构清晰,说明正格式具有较高的分辨率,在燃气射流的数值模拟中具有一定的应用前景,值得进一步深入研究。

References:

[1] Chang S I. Unsteady-State Underexpanded Jet Flows [A]//38th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, Indianapolis [C]. United States, 2002: 7-10.

[2] Le G G, Ma D W, Zang G C. Numerical Simulation of Flow in Rocket Base by TVD [J]. Journal of Ballistics, 1995, 7(1): 35-40. (in Chinese)
乐贵高,马大为,臧国才. 火箭底部流动的 TVD 数值模拟 [J]. 弹道学报,1995,7(1):35-40.

[3] Zheng M, Zhang H X. Application of Non-Oscillatory and Non-Free-Parameters Dissipative Finit Difference Scheme to the Calculation of Free-Jet Flows [J]. Acta Aerodynamica Sinca, 1989, 7(3): 273-281. (in Chinese)
郑 敏, 张涵信. 无波动、无自由参数的耗散差分格式(NND)在喷流计算中的应用 [J]. 空气动力学学报, 1989, 7(3): 273-281.

[4] Xu W C, Huang Z Y. Calculation of Jets Flowfield with High Resolution ENO [J]. Acta Aerodynamica Sinca, 2001, 19(4): 401-406. (in Chinese)
徐文灿, 黄振宇. 高精度 ENO 格式在射流数值模拟中的应用 [J]. 空气动力学学报, 2001, 19(4): 401-406.

[5] Chen E Y, Li Z G, Ma D W, et al. Numerical Simulation of Unsteady-State Underexpanded Jet Using Discontinuous Galerkin Finite Element Method [J]. Transactions of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2008, 25(2): 89-93.

[6] Liu X D, Lax P D. Positive Schemes for Solving Multi-Dimensional Hyperbolic Systems of Conservation Laws [J]. CFD Journal, 1996, 5(2): 133-156.

[7] Liu X D, Lax P D. Positive Schemes for Solving Multi-Dimensional Hyperbolic Systems of Conservation Laws Ⅱ [J]. J Comput Phys, 2003, 187(2): 428-440.

[8] Cao Y Z, Lu Z S, Guan H A. Numerical Simulation of Blast Flowfields in Closed Blast-Resistant Containers [J]. Chinese Journal of High Pressure Physics, 2001, 15(2): 127-133. (in Chinese)
曹玉忠, 卢泽生, 管怀安. 抗爆容器内爆炸流场数值模拟 [J]. 高压物理学报, 2001, 15(2): 127-133.

[9] Sweby P K. High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws [J]. SIAM J Numerical Analysis, 1984, 21(5): 995-1011.

[10] Kurganov A, Tadmor E. New High-Resolution Central Schemes for Nonlinear Conservation Laws and Convection-Diffusion Equations [J]. J Comput Phys, 2000, 160(1): 241-282.

[11] Shu C W. Total-Variation-Diminishing Time Discretizations [J]. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 1988, 9(6): 1073-1084.

[12] Shu C W, Osher S. Efficient Implementation of Essentially Non-Oscillatory Shock-Capturing Schemes, Ⅱ [J]. J Comput Phys, 1989, 83(1): 32-78.

[13] Chang S I, Chow W L. Mach Disc from Underexpanded Axisymmetric Nozzle Flow [J]. AIAA J, 1974, 12(8): 1079-1082.

Numerical Simulation of Unsteady-State Underexpanded Jet Using Positive Schemes

ZHU Sun-Ke[1], CHEN Er-Yun[2], MA Da-Wei[1], LE Gui-Gao[1]

(1. *School of Mechanical Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing* 210094, *China*;
2. *School of Energy and Power Engineering, Shanghai University of Science and Technology, Shanghai* 200093, *China*)

Abstract: A numerical simulation of unsteady-state underexpanded jet was carried out using second order positive schemes, which was developed to solve the axisymmetric Euler equations based on two dimensional conservation laws. Computational results indicate that the method can capture the wave structures of jet flowfields including expansion fan, incident shock, reflected shock, Mach disk, jet boundary and the triple point well. Agreements between the numerical results and experimental or existed numerical results are fairly satisfactory. It indicates that the present method has high capability in capturing shocks without numerical oscillation near discontinuous points.

Key words: computational fluid dynamics; gas jet; positive schemes; numerical simulation