文章编号：1000-5773(2010)04-0279-07

冲击动力学研究中实测波信息的解读分析*

王礼立[1,2]，朱 珏[1]，赖华伟[1,3]

(1. 宁波大学力学和材料科学研究中心，浙江宁波 315211；
2. 爆炸科学与技术国家重点实验室，北京 100081；
3. 浙江水电水利高等专科学校土木系，浙江杭州 310018)

摘要：分析了多点测量技术在解读和分析实测冲击波信息时的重要性和难点，提出了将 Lagrange 多点测量反分析与 Hopkinson 压杆技术相结合的新方法，解决了在同一个Lagrange 位置上难以同时测量应力和质点速度波形的难题，对试样上不同 Lagrange 位置处实测质点速度波形进行了解读分析，由 n 个实测质点速度波形信息得到了各 Lagrange 位置处的动态应力-应变关系。以有机玻璃和水泥砂浆两种粘弹性试样为例，进行了数值计算，验证了该方法的可行性和有效性。

关键词：冲击动力学；多点测量；Lagrange 分析；Hopkinson 压杆技术；动态应力-应变关系
中图分类号：O347 **文献标识码**：A

1 引 言

在爆炸和冲击动力学实验中，不论是对结构动态响应的研究还是对材料动态响应的研究，在实验上通常归结为：实测各种波信息后，通过对波信息的解读分析，得出相应的结论。实质上，这就是求解应力波传播的反问题。此时，亟需解决两个问题：(1) 如何精确获得真实的波信息，涉及各种波信息的动测技术和误差分析；(2) 如何解读波信息，涉及应力波理论和材料本构特性。但是，无论是在制定实验方案时还是在分析实测信号时，都应充分重视波信息的解读。本研究对单点测量和多点测量两种情况下的实测波信息进行解读分析。

2 单点测量

在材料本构畸变律可以忽略的高压条件下，问题的控制方程组由守恒方程组和状态方程(流体动力学近似)构成。这时如果初始条件和边界条件已知，并且状态方程的形式确定，则只需有足够精确的单点测量波信息，就可以确定状态方程的材料参数。这是因为在这种情况下，波传播的流体动力学理论已完善建立，所以只要有单点测量的波信息，就足以确定状态方程的材料参数[1]。

但是，单点测量反演的有效性是有条件的。要想研究状态方程(率无关容变律)以外的问题，实际情况要复杂得多[2]。例如，通过单点测量反演研究诸如本构应变率效应(如粘弹性和粘塑性)、本构高压效应(如剪切模量和屈服强度对压力的依赖性)、时间/率相关的层裂准则和损伤演化、加载和卸载本构关系的差别等问题时，由于物理模型和波传播规律(正问题)都还不清楚，只凭单点测量的波信息求解反问题，是根本不可能完全确定材料的本构形式和参数的。换句话说，这时仅凭单点测量的波信息不足以完

* **收稿日期**：2007-08-12；**修回日期**：2007-10-24
基金项目：北京理工大学爆炸科学与技术国家重点实验室基金(KFJJ05-2)；中国工程物理研究院专项科研合作项目；宁波大学王宽诚幸福基金
作者简介：王礼立(1934－)，男，教授，博士生导师，主要从事冲击动力学研究. E-mail：wanglili@nbu.edu.cn

全解读问题。

3 多点测量

基于单点测量技术的不足,人们发展了多点测量技术,其目的在于通过足够多的测量信息对波信息进行正确解读。回顾一下较成功的爆炸和冲击动力学实验的例子:Hopkinson 压杆技术是在 2 个基本假定下(一维应力波假定和试样应力均匀分布假定)的 2 点或多点测量;Taylor 杆实验技术是加载-卸载后的多点测量;多台阶试样的气炮试验技术是多点测量;Lagrange 分析是无须本构假定的多点测量。还可以列举很多实例来说明多点测量优于单点测量[3]。

多点测量反分析的理论基础是应力波传播理论。下面以 Lagrangian 分析方法(拉格朗日分析方法,简称拉氏方法)为代表作进一步的分析讨论。

拉氏方法是由 Fowles[4]、Cowperthwaite 和 Williams[5]以及 Seaman[6]等人在 20 世纪 70 年代初首先提出和发展起来的。其基本思想是:在试件的不同 Lagrange 位置上设置传感器,记录试件中传播的某力学量的波剖面(如应力、应变或质点速度等随时间的变化),通过守恒方程分析得到其它未知力学量,进而得到材料的动态应力-应变曲线,以便进一步确定材料的率相关本构关系。在诸多反分析方法中,该方法的最大优点是不需要事先作任何的本构关系假定。

对于一维应力波(或一维应变波),动量守恒方程和质量守恒方程(即连续性方程)分别为

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \tag{2}$$

式中:ρ_0 为材料密度,v 为质点速度,σ 为应力,ε 为应变,t 为时间。由(1)式、(2)式可知,动态应力 $\sigma(x,t)$和应变 $\varepsilon(x,t)$之间的关系可以通过 $v(x,t)$来建立。但是,由于守恒方程所联系的不是应力、质点速度和应变等力学量本身,而是它们的一阶偏导数,因此在积分时就存在如何正确确定积分常数的问题。也正因为如此,不同的实测波剖面(应力波形、质点速度波形或应变波形)对于问题的求解会有不同的难易程度。

当采用 n 个应力计(或压力计)在不同 Lagrange 坐标 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$上测得一系列应力波剖面 $\sigma(x_i,t)$时,问题是最容易解决的。其一阶偏导数$\partial\sigma/\partial t$ 和$\partial\sigma/\partial x$ 可通过数值计算确定,再根据(1)式即可求得$\partial v/\partial t$。在通常的实验条件下有初始条件:$t=0$ 时 $v=0$。对$\partial v/\partial t$ 进行积分,不难求出 $v(x_i,t)$。这时一阶偏导数$\partial v/\partial x$ 就可以由数值计算确定,再根据(2)式即可求得$\partial\varepsilon/\partial t$。在通常的实验条件下有初始条件:$t=0$ 时 $\varepsilon=0$。对$\partial\varepsilon/\partial t$ 进行积分,即可求得 $\varepsilon(x_i,t)$。于是,最终就建立了 $\sigma(x_i,t)$和 $\varepsilon(x_i,t)$的关系。

如果采用 n 个质点速度计在不同 Lagrange 坐标 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$处测得质点速度波形 $v(x_i,t)$,问题就没有那么简单了。虽然其一阶偏导数$\partial v/\partial t$ 和$\partial v/\partial x$ 仍然可以由数值计算确定,并根据(2)式求得$\partial\varepsilon/\partial t$,进而积分求出 $\varepsilon(x_i,t)$。但是,由(1)式所求得的是应力对 Lagrange 坐标 x 的一阶偏导数$\partial\sigma/\partial x$,积分求解 $\sigma(x_i,t)$时,必须有应力边界条件才能确定积分常数,这就意味着在某个 Lagrange 坐标 x_j 处要同时测得 $v(x_j,t)$和 $\sigma(x_j,t)$,而这正是问题的难点所在。

如果采用 n 个应变计在不同 Lagrange 坐标 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$处测得应变波形 $\varepsilon(x_i,t)$,问题就更复杂了。因为不论是由(2)式求得$\partial v/\partial x$,进而通过积分求出 $v(x_i,t)$,还是由(1)式求得$\partial\sigma/\partial x$,进而积分求出 $\sigma(x_i,t)$,都必须有相应的应变边界条件和应力边界条件,只有这样才能确定相应的积分常数,即问题出现了双重困难。

Cowperthwaite 和 Williams 曾指出,无法在 1 次实验中,至少在 1 个 Lagrange 位置上,同时测量得到应力和质点速度波形[6],这就是问题的症结所在。在未能解决质点速度-应力复合计的情况下,人们发展了各种曲线/曲面拟合法:将待求函数展开为 Taylor 级数,再由实测数据确定待定参数。这时常常

对 Taylor 级数的阶数等作某种假定,实质上也就是对应力边界条件作了某种隐含的假定,这就免不了引入相当大的误差。本研究将拉氏方法与 Hopkinson 杆实验技术相结合,解决了在同 1 个Lagrange位置上同时测量得到应力和质点速度波形的问题。

4　基于路径线法的拉氏方法与 Hopkinson 压杆实验技术的结合

用 $x=x_0$ 表示 Hopkinson 压杆与试件的界面,则该处的应力 $\sigma(x_0,t)$和质点速度 $v(x_0,t)$为

$$\sigma(x_0,t)=E[\varepsilon_I(x_G,t)+\varepsilon_R(x_G,t)] \tag{3}$$

$$v(x_0,t)=c_0[\varepsilon_I(x_G,t)-\varepsilon_R(x_G,t)] \tag{4}$$

式中:E 为杨氏模量,c_0 为杆中的纵波波速,$\varepsilon_I(x_G,t)$和 $\varepsilon_R(x_G,t)$分别为弹性压杆上应变片处($x=x_G$)所测得的入射应变波与反射应变波。通过(3)式和(4)式就可以解决在同一个 Lagrange 位置上同时测量得到应力和质点速度波形的问题。换句话说,Hopkinson 压杆与试件的界面本身提供了一个“质点速度-应力复合计”(以下将此复合计简称为 1sv)。

基于此,如果采用 n 个质点速度计在不同 Lagrange 坐标 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$处测得了质点速度波形 $v(x_i,t)$,再加上界面处提供的“质点速度-应力复合计”,就可以克服如前所述的缺乏应力边界条件的问题。采用基于路径线法的拉氏方法与 Hopkinson 压杆实验技术相结合的新方法(简称 1sv+nv 法),对实测波信息进行具体的解读分析。

首先,由 Hopkinson 压杆实验技术,按(3)式和(4)式计算得到 $x=x_0$ 处的应力波形 $\sigma(x_0,t)$和质点速度波形 $v(x_0,t)$,进而求得其对时间的一阶偏导数$(\partial\sigma/\partial t)|_{x_0}$和$(\partial v/\partial t)|_{x_0}$,由(1)式得到$(\partial\sigma/\partial x)|_{x_0}$。沿路径线(见图 1,其中 Φ 为任意物理量)有

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}\right|_{\mathrm{p}}=\left.\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right|_{t}+\left.\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right|_{x}\left.\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right|_{\mathrm{p}}=\left.\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right|_{t}+\left.\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right|_{x}\left.\frac{1}{x'}\right|_{\mathrm{p}} \tag{5a}$$

式中:下标 p 表示沿路径线的全微分,$x'=(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)|_{\mathrm{p}}$ 为路径线的斜率。根据(5a)式,沿着路径线可由如下的差分近似求解相邻点 x_1 处的应力时程曲线 $\sigma(x_1,t)$,即

$$\sigma_{i,j}=\sigma_{i-1,j}+\left[-\rho_0\frac{\partial v_{i-1,j}}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial\sigma_{i-1,j}}{\partial t}\left(\frac{\mathrm{d}t_{i-1,j}}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}t_{i,j}}{\mathrm{d}x}\right)\right](x_i-x_{i-1}) \tag{5b}$$

路径线的斜率采用前后两点的平均值,以下的算例表明这是简单可行的。依此类推,一旦求得 x_{i-1}位置上的应力 $\sigma(x_{i-1},t)$和质点速度 $v(x_{i-1},t)$,就可求得 x_i 位置处的应力$\sigma(x_i,t)$。(5b)式不仅可以用于加载段,还可以用于卸载段,并且避免了采用相速度法时可能出现的信号丢失。

另一方面,由 n 个 Lagrange 位置处($x=x_i$)的质点速度计测得的质点速度场 $v(x_i,t)$,可求得其对时间的一阶偏导数$(\partial v/\partial t)|_{x_i}$和沿路径线的全微分$(\mathrm{d}v/\mathrm{d}x)|_{\mathrm{p}}$。由全微分定义,可确定$(\partial v/\partial x)|_t$,再由(2)式计算出$(\partial\varepsilon/\partial t)|_{x_i}$。利用初始条件($t=0$时 $\varepsilon=0$),不难求出应变场 $\varepsilon(x_i,t)$。

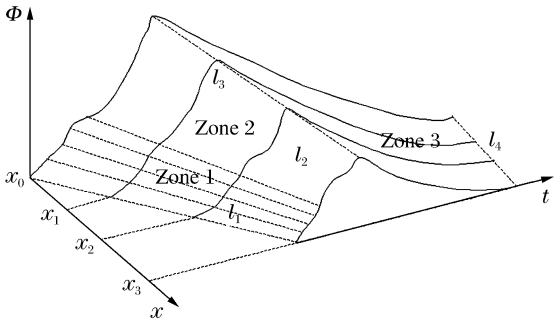


图 1　路径线法示意图

Fig. 1　Schematic of path-line method

由应力场 $\sigma(x_i,t)$和应变场 $\varepsilon(x_i,t)$,消掉时间参量 t 后,就可以得到一族动态应力-应变曲线。

5　算例分析

5.1　有机玻璃

有机玻璃(PMMA)在高应变率条件下的冲击力学特性可用 ZWT 非线性粘弹性本构方程来描述,相关的材料参数已由 Hopkinson 压杆实验确定[7]。当应变小于 1%时,可退化为如下的简化方程

$$\sigma = E_a\varepsilon + E_2\int_0^t \dot{\varepsilon}(t)\exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta_2}\right)\mathrm{d}\tau \tag{6}$$

式中：密度 $\rho_0 = 1\,190\ \mathrm{kg/m^3}$，$E_a = 2.94\ \mathrm{GPa}$，$E_2 = 3.07\ \mathrm{GPa}$，高频松弛时间 $\theta_2 = 95.4\ \mu\mathrm{s}$[7]。

首先采用特征线数值计算方法解一维粘弹性波传播的正问题，不难确定其动态应力场、动态质点速度场和动态应变场。然后，取 $x = x_0$ 处的应力和质点速度作为由 Hopkinson 压杆技术测得的已知边界条件，如图 2(a)所示，令每相距 4 mm 处(即 $x_1 = x_0 + 4$ mm、$x_2 = x_0 + 8$ mm、$x_3 = x_0 + 12$ mm)的质点速度作为由另外 3 个 Lagrange 速度计测得的结果，如图 2(b)所示。

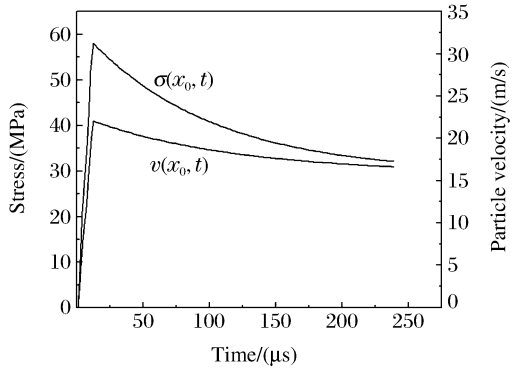


图 2(a) PMMA 试样已知的边界条件

Fig. 2(a) Boundary condition of PMMA specimen

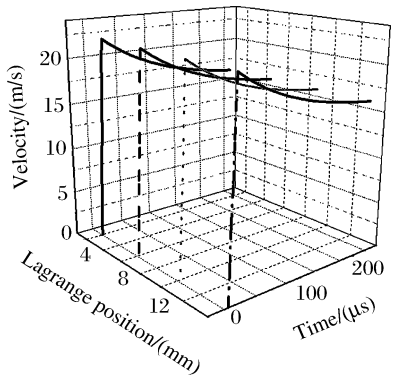


图 2(b) PMMA 试样各 Lagrange 位置的速度时程曲线

Fig. 2(b) Velocity-time curves at different Lagrange positions of PMMA specimen

根据这些数据，采用 1sv+nv 法可反解得到各 Lagrange 位置处的应力波形和应变波形，它们与特征线数值计算得到的正问题精确解的比较如图 3 和图 4 所示。可见，两者之间的符合程度非常好，从而证明了 1sv+nv 法的有效性。

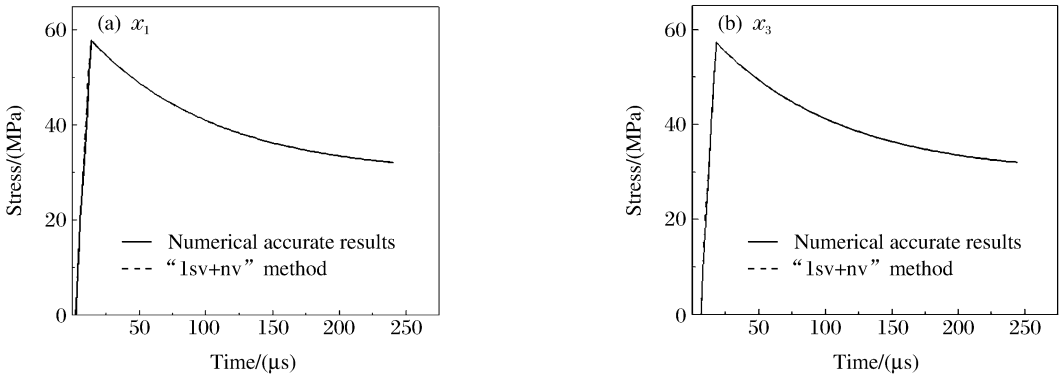


图 3 PMMA 试样不同位置处应力剖面的 1sv+nv 法反解结果与数值计算解正问题精确结果的比较

Fig. 3 Comparisons between the numerical accurate results by solving positive problem and the results by 1sv+nv inverse analysis method at the different stress-profile positions for PMMA specimen

将 1sv+nv 法反解得到的应力和应变中的时间参量 t 消去，得到了各 Lagrange 位置处的动态应力-应变曲线。将此动态应力-应变曲线与由特征线数值计算得到的正问题精确解相比较，如图 5 所示。从图 5 中可以看出，两者的符合程度是令人满意的，其误差远比其它拉氏分析法的误差小。

5.2 水泥砂浆

对于水泥砂浆，由 Hopkinson 压杆实验测得的 ZWT 材料参数为：$\rho_0 = 2\,210\ \mathrm{kg/m^3}$，$E_a = 39.2\ \mathrm{GPa}$，$E_2 = 40.9\ \mathrm{GPa}$，$\theta_2 = 15.0\ \mu\mathrm{s}$[8]。与 PMMA 实例类似，由特征线法得到的 $x = x_0$ 处的应力和质点速度如

图 6 所示,采用 1sv+nv 法反解得到的应力-应变曲线如图 7 所示。从图 7 中可以看出,两种方法得到的结果一致。

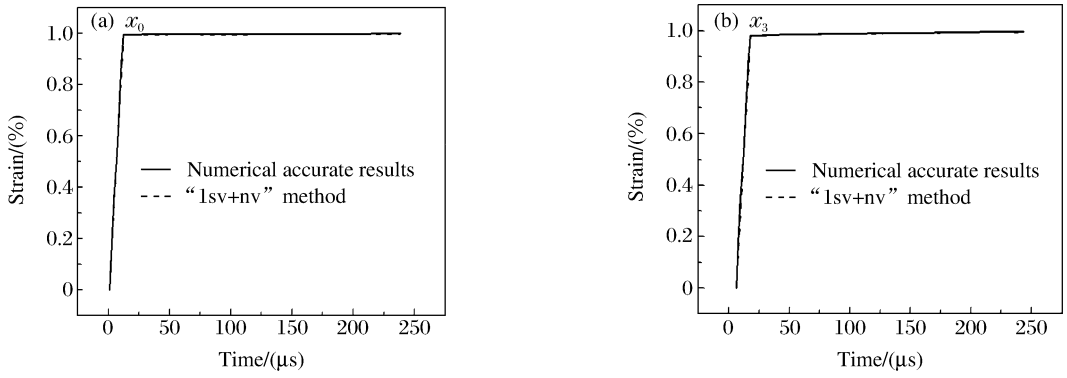


图 4　PMMA 试样不同位置处应变剖面的 1sv+nv 法反解结果与数值计算解正问题精确结果的比较

Fig. 4　Comparisons between the numerical accurate results by solving positive problem and the results by 1sv+nv inverse analysis method at the different strain-profile positions for PMMA specimen

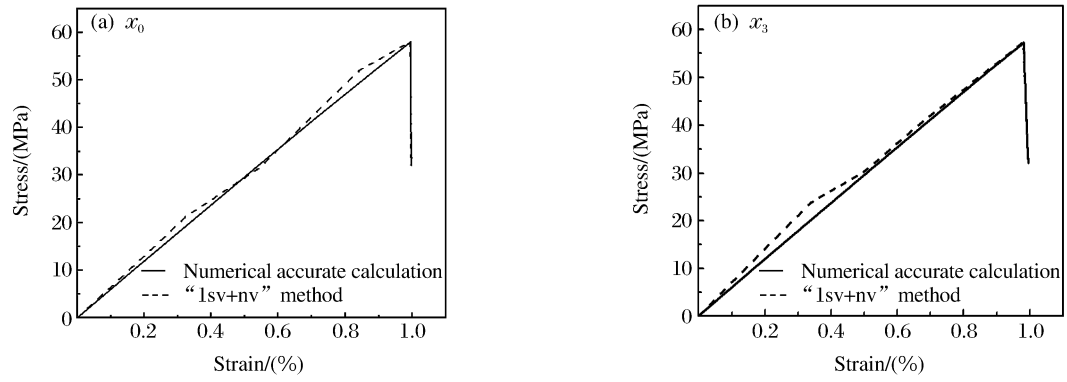


图 5　PMMA 试样不同位置处应力-应变曲线的 1sv+nv 法结果与数值计算解正问题精确结果的比较

Fig. 5　Comparisons between the numerical accurate stress-strain curves by solving positive problem and the stress-strain curves by 1sv+nv reverse analysis method for PMMA specimen

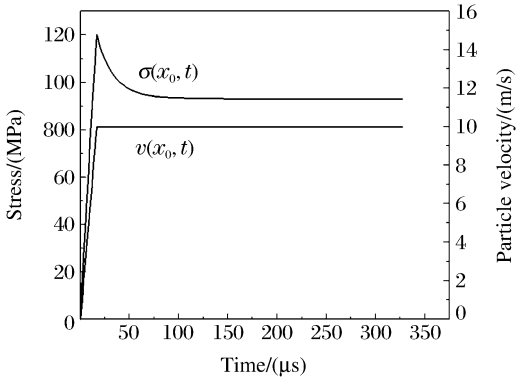


图 6(a)　水泥砂浆已知的边界条件

Fig. 6(a)　Boundary condition of cement mortar specimen

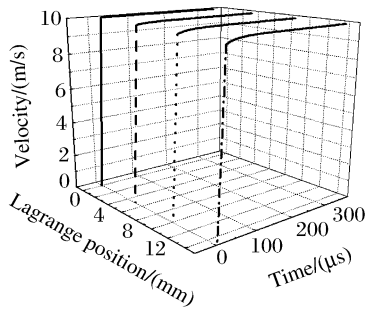


图 6(b)　水泥砂浆各 Lagrange 位置的速度时程曲线

Fig. 6(b)　Velocity-time curves at different Lagrange positions of cement mortar specimen

基于同样的原理，如果采用 n 个应变计在不同 Lagrange 坐标 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 处测量得到应变波形 $\varepsilon(x_i,t)$，结合 Hopkinson 压杆界面处提供的“质点速度-应力复合计”，还可以发展相应的 1sv＋nε 法[9]，这里不作详细讨论。

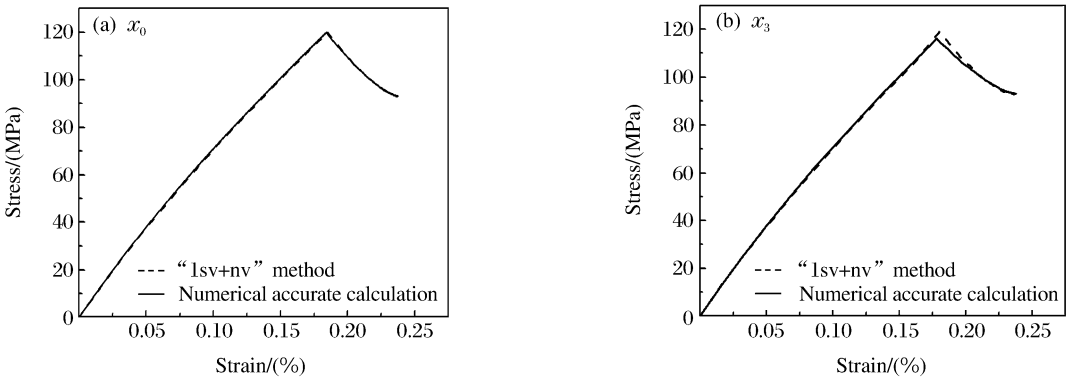


图 7 水泥砂浆不同位置处应力-应变曲线的 1sv＋nv 法结果与数值计算解正问题精确结果的比较

Fig. 7 Comparisons between the numerical accurate stress-strain curves by solving positive problem and the stress-strain curves by 1sv＋nv reverse analysis method for cement mortar specimen

6 结 论

在材料的物理模型还不明确的情况下，相应的波传播规律(正问题)并不清楚，这时仅凭单点测量的波信息来解决反问题，是根本不可能完全确定材料的本构形式和参数的。多点测量弥补了单点测量的不足，为正确解读实测波信息提供了足够多的信息。在多点测量中，利用拉氏反分析方法求解的关键是如何至少在一个 Lagrange 位置上同时测量到应力和质点速度波形。基于此，提出了将拉氏反分析方法与 Hopkinson 杆实验技术相结合的新方法，解决了在同一个 Lagrange 位置上难以同时测量应力和质点速度波形的难题。利用该方法，计算分析了 PMMA 和水泥砂浆两种粘弹性材料的波信息，结果令人满意，验证了新方法的可行性和有效性。

References:

[1] Wang L L. Foundation of Stress Waves [M]. 2nd ed. Beijing: National Defence Industry Press, 2005. (in Chinese)
王礼立. 应力波基础 [M]. 第 2 版. 北京：国防工业出版社，2005.

[2] Wang L L, Wang Y G. The Important Role of Stress Waves in the Study on Dynamic Constitutive Behavior of Materials by SHPB [J]. Explosion and Shock Waves, 2005, 25(1): 17-25. (in Chinese)
王礼立，王永刚. 应力波在用 SHPB 研究材料动态本构特性中的重要作用 [J]. 爆炸与冲击，2005，25(1)：17-25.

[3] Xu S L, Tang Z P, Hu X J, et al. Experimental Investigation on Dynamic Properties of the Polypropylene Micro-Fiber Reinforced Cement (FCEM) under Impact Load [J]. Explosion and Shock Waves, 2004, 24(3): 251-260. (in Chinese)
徐松林，唐志平，胡晓军，等. 聚丙烯短微纤维增强水泥冲击特性研究 [J]. 爆炸与冲击，2004，24(3)：251-260.

[4] Fowles R. Conservation Relations for Spherical and Cylindrical Stress Waves [J]. J Appl Phys, 1970, 41: 2740-2741.

[5] Cowperthwaite M, Williams R F. Determination of Constitutive Relationships with Multiple Gauges in Nondivergent Waves [J]. J Appl Phys, 1971, 42: 456-462.

[6] Seaman L. Lagrangian Analysis for Multiple Stress or Velocity Gages in Attenuating Waves [J]. J Appl Phys, 1974, 45: 4303-4314.

[7] Wang L L, Yang L M. A Class of Nonlinear Viscoelastic Constitutive Relation of Solid Polymeric Materials [M]//

Wang L L, Yu T X, Li Y C. Progress in Impact Dynamics. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 1992: 88-116. (in Chinese)
王礼立,杨黎明. 固体高分子材料非线性粘弹性本构关系 [M]//王礼立,余同希,李永池. 冲击动力学进展. 合肥:中国科技大学出版社,1992:88-116.

[8] Wang L L, Shi S Q, Chen J Y, et al. Influences of Strain-Rate and Stress-State on Dynamic Response of Cement Mortar [J]. Int J Struct Stab Dyn, 2003, 3(3): 419-433.

[9] Zhu J. On SHPB Technique and Lagrangian Analysis Used for Studying the Impact Response of Concrete-Like Materials [D]. Hefei: University of Science and Technology of China, 2006. (in Chinese)
朱　珏. 混凝土类材料冲击本构特性的 SHPB 技术及 Lagrange 反解法的研究 [D]. 合肥:中国科学技术大学, 2006.

Understanding and Interpreting of the Measured Wave Signals in Impact Dynamics Studies

WANG Li-Li[1,2], ZHU Jue[1], LAI Hua-Wei[1,3]

(1. *Mechanics & Materials Science Research Center, Ningbo University, Ningbo* 315211, *China*;
2. *State Key Laboratory for Explosion Science and Technology, Beijing Institute of Technology, Beijing* 100081, *China*;
3. *Department of Civil Engineering, Zhejiang Water Conservancy and Hydropower College, Hangzhou* 310018, *China*)

Abstract: The significance and difficulty of the multi-position measuring were analyzed when understanding and interpreting the wave signals measured in impact dynamic experiments. By combining the Lagrange inverse analysis with the Hopkinson pressure bar technique, a new method was proposed, which substantially resolves the problem of measuring simultaneously both stress wave and particle velocity at a Lagrange position in impact tests. When the particle velocity wave signals at n ($n \geqslant 3$) Lagrange positions are measured, by using this new method, the dynamic stress-strain curves at n Lagrange positions of specimen can be determined and interpreted. The feasibility and validity of this new method was consistently confirmed by numerical tests for two viscoelastic materials (PMMA and cement mortar).

Key words: impact dynamics; multi-position measurement; Lagrange analysis; Hopkinson pressure bar technique; dynamic stress-strain relationship