文章编号：1000-5773(2008)01-0072-07

三维弹塑性流体力学自适应欧拉方法研究*

刘 军[1]，何长江[2]，梁仙红[2]

（1. 中国工程物理研究院研究生部，北京 100088；
2. 北京应用物理与计算数学研究所，北京 100088）

摘要：研究了三维多介质弹塑性流体力学欧拉数值方法的网格自适应技术，编制了可计算多介质弹塑性流体力学问题的三维自适应欧拉程序，解决了计算弹塑性问题时应用网格自适应方法所遇到的一系列关键问题，如网格细分和合并规则，父网格或子网格物理量的填充，幻影网格的选择、填充及存储方案，插值函数的选择及如何选择时间步长等问题。给出了侵彻、爆轰等弹塑性问题的数值算例，验证了方法的有效性。

关键词：流体力学；弹塑性；欧拉方法；多介质；自适应；三维
中图分类号：O344.3；O385 **文献标识码**：A

1 引 言

对网格自适应(AMR)方法的研究起始于 20 世纪 80 年代早期，该方法对感兴趣的区域使用密布的细网格，对其它区域用较粗的网格，在相同的网格存储和计算工作量的前提下，可有效地提高流场数值计算的分辨率和计算精度。AMR 方法分为以下几类：(1) 移动网格，具有固定的网格点数，网格的位置则根据所需的要求进行调整，从而使网格的几何特性变好或局部网格变密(或变粗)，达到网格优化的目的，网格的拓扑结构一般不发生变化；(2) 点关联结构[1]，以网格元作为树结构的单元，针对每个网格单元进行细分，这种方法非常灵活，但是由于需要大量的不规则内存访问，其代码执行效率不高；(3) 块结构方法[2-3]，由逻辑笛卡尔网格和子网格覆盖计算区域，这些网格可以互相重叠、有任意形状，Quirk[4]、de Zeeuw 等人[5]提出了一种简化的版本，它让分级的嵌套网格在每一个坐标方向上对分，让这种分级关系形成一种逻辑上的节点树的结构，这是一个灵活高效的方法。

弹塑性流体力学研究，尤其是高速碰撞问题的研究，在兵器工业和国民经济的许多领域有着广阔的应用前景。对于弹塑性流体力学问题，其数值计算方法可分为 Lagrange 方法、Euler 方法以及两种方法的结合。由于 Lagrange 方法是随物质运动而变形网格，所以 Lagrange 网格自适应细分合并技术难度较大，且网格在细分时更容易发生网格畸变；而 Euler 方法不仅能适应大变形问题的计算，而且适合采用网格细分和合并的自适应技术。

三维弹塑性流体力学欧拉程序 MEPH3D[6]是可以用于高速碰撞、侵彻、炸药爆轰等问题的三维欧拉数值模拟应用程序，在实际应用中发挥了重要的作用。MEPH3D 程序采用 Euler 方法，适合计算大变形问题；运用 Youngs 界面处理技术对多介质问题进行界面重构，较好地解决了多介质问题的计算。但是，对于实际问题的计算来说，三维欧拉方法需要的网格数十分庞大，因而十分有必要把三维欧拉方法和网格自适应技术结合起来。

本工作研究了 MEPH3D 程序的网格自适应技术。根据程序所用的数值方法及程序实现的特点，采用块结构 AMR 方法，开发了可计算多介质弹塑性流体力学问题的三维自适应欧拉程序，并给出了数

* **收稿日期**：2007-03-08；**修回日期**：2007-04-25
基金项目：国家重点基础研究专项经费资助项目(2005CB321703)；中国工程物理研究院科学技术基金(20050106)
作者简介：刘 军(1981—)，男，硕士研究生，主要从事计算力学研究. E-mail：caepcf@126.com

值算例。

2　流体动力学物理模型和数值方法

2.1　物理模型

本方法可以模拟高速碰撞、爆轰、射流侵彻等弹塑性流体力学多介质大变形问题。模型的建立需要较准确地描述每种介质的本构方程、状态方程以及各种运动参数等。理论模型建立在以下几个基本假定之上:(a) 连续介质假定;(b) 局部热动平衡假定;(c) 介质均匀和各向同性假定;(d) 服从弹性广义 Hooke 定律假定;(e) 金属介质忽略介质热力学量和时间对物质变形的影响。当满足 Von-Mises 屈服条件时,介质进入塑性流状态,对应力计算作相应修正;当内能大于或等于熔化能时,进入流体状态,应力偏量为零。因此,物理模型包括以下方程和条件。

(1) 守恒方程。包括质量守恒方程、动量守恒方程和能量守恒方程[7]。

(2) 弹性本构方程。服从弹性广义 Hooke 定律假定。

(3) 状态方程

$$p=(\gamma-1)\rho e+c_0^2(\rho-\rho_0)$$

式中:c_0 为初始声速,ρ_0 为初始密度。

(4) Von-Mises 屈服条件

$$s_{xx}^2+s_{yy}^2+s_{zz}^2+2(s_{xy}^2+s_{yz}^2+s_{zx}^2)\leqslant\frac{2}{3}(Y^0)^2$$

式中:s_{xx}、s_{yy}、s_{zz}、s_{xy}、s_{yz}、s_{zx} 为应力偏量,Y^0 为材料的屈服强度。当介质应力状态满足 Von-Mises 屈服条件时,介质进入塑性流状态。

(5) 熔化条件。当 $e\geqslant e_m$(物质熔化能)时,物质熔化,物质强度消失,$Y^0=0$,此时物质进入粘性流体状态,弹塑性消失;当 $e<e_m$ 时,物质屈服强度通常取如下形式 $Y^0=Y^0(1-e/e_m)$。

(6) 人为粘性。在用差分方法计算弹塑性问题时,除了用二次的 N-R 人为粘性外,一般还需加上线性人为粘性。本工作采用一次与二次粘性的结合。

(7) 爆轰波计算。初始能量为 e_0+Q,其中化学能 $Q=D_J^2/2(\gamma^2-1)$,D_J 为 C-J 爆速。用燃烧函数 F 把凝固炸药和爆炸产物的状态方程联结起来

$$p=(\gamma-1)\rho eF,\qquad F=[\max(F_1,F_2)]^{n_b}$$

$$F_1=\begin{cases}0 & t\leqslant t_b\\ \dfrac{v_0-v}{v_0-v_J} & t_b\leqslant t<t_b+\Delta L,\\ 1 & t\geqslant t_b+\Delta L\end{cases}\qquad F_2=\begin{cases}0 & t\leqslant t_b\\ \dfrac{t-t_b}{\Delta L} & t_b\leqslant t<t_b+\Delta L\\ 1 & t\geqslant t_b+\Delta L\end{cases}$$

式中:$v_J=\gamma v_0/(\gamma+1)$ 为 C-J 比容。t_b 为爆轰波刚到达计算网格的时间(开始燃烧)。$\Delta L=r_b\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}\big/D_J$。$r_b$ 和 n_b 为可调参数,通常取 $r_b=3\sim6$,$n_b=2\sim3$。

(8) 断裂判别。当 $p<p_s$(断裂压力极限)或 $\rho<\rho_s$(断裂密度)时,物质发生断裂。

2.2　数值方法[7]

计算采用显式差分格式,在均匀或非均匀欧拉网格上进行,应力、密度、比内能、速度、应力偏量等均定义在网格中心。MEPH3D 程序采用 Lagrange-Remapping 两步算法求解多介质流问题,用维数分裂的方法将三维问题分解为多个一维问题进行处理,Lagrange 步采用 FLIC 格式计算,输运步用 Youngs 界面处理技术进行混合网格的界面计算。

维数分裂可以表示为 $\boldsymbol{U}^{n+1}=\delta z\,\delta y\,\delta x\cdot\boldsymbol{U}^n$,($\boldsymbol{U}$ 为解向量,δcoor 表示对 coor 方向求解一次)。本程序中让整个计算过程在三维的 3 个坐标方向上交替进行,即有

$$\boldsymbol{U}^{n+3}=(\delta x\,\delta z\,\delta y)\cdot(\delta y\,\delta x\,\delta z)\cdot(\delta z\,\delta y\,\delta x)\cdot\boldsymbol{U}^n$$

这样做的好处是可以减少逻辑关系的复杂性,并且尽量保持流场计算的对称性。

3 MEPH3D 计算的网格自适应技术

本工作采用块结构 AMR 方法。让分级的嵌套网格在每一个坐标方向上对分,让这种分级关系形成一种逻辑上的节点树的结构。下面详细给出 MEPH3D 程序在实现网格自适应过程中碰到的一系列问题及解决方案,如网格结构和数据结构、幻影网格的实施方案、网格的细分与合并、守恒插值函数等。

3.1 网格结构和数据结构

网格结构采用分级嵌套网格块结构,这些网格块彼此关联,形成了逻辑上的四叉树(二维)或八叉树(三维)结构,图 1 为二维情况下的网格结构和数据结构。所有网格块包含相同的网格数,其逻辑结构也相同;处在同一细分层级上的网格块的网格步长也相同;此外,每个网格块存储有自己的块中心坐标、父块块号、子块块号、邻居块块号等。所有这些信息构成了整个计算区域的网格信息数据结构,并维持了网格的逻辑树型结构。

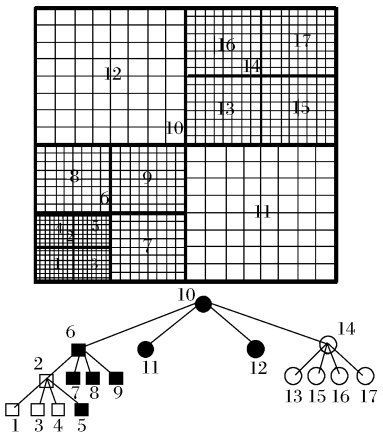


图 1 8×8 网格块覆盖二维区域和其树型结构图

Fig. 1 2D area filled by 8×8 blocks, and the quad-tree structure

由于 MEPH3D 程序的所有解变量都定义在网格中心,因此在自适应网格上,我们把所有的解变量都定义在网格块的网格中心,形成了存储模型计算结果的数据结构。

3.2 幻影网格(Ghost Cell)的实施方案

网格块的幻影网格的功能类似于真实计算区域虚设的外边界网格,但是它不一定就是整个计算区域虚设的外边界网格,它也可能是计算区域的内部网格。如果幻影网格是计算区域的外边界网格,那么可根据外边界条件直接计算出幻影网格中的物理量;如果幻影网格是计算区域的内部网格,那么对其物理量进行赋值就较为复杂,涉及块与块之间的数据传递以及数据的插值计算,具体的过程如下。

(1) 当本块与邻块为同一细分级时,邻块中的变量值可直接赋值到此块相应的幻影网格中。

(2) 当邻块的细分层级高(低)于本块的细分层级时,则先插值计算出邻块上父(子)块网格中的变量值,再把该值赋给本块相应的幻影网格中的变量。

对于幻影网格的存储,我们不对所有块都分配幻影网格,而是另外定义一个带有幻影网格的工作空间数组。当计算到某块的时候,再将此块的值复制到带有幻影网格的工作空间中,在工作空间中完成对幻影网格的赋值,并完成整个块的数值计算,最后再将工作空间中的计算结果返回给该块。根据 MEPH3D 程序所使用的数值方法和程序实现的特点,需要在块的周围设置两层幻影网格。由于 MEPH3D 程序在计算过程中所涉及的变量众多,因而内存耗费相当大,我们选择的这种幻影网格存储方案可以最大限度地节省内存和存储空间。

3.3 网格的细分或合并

在物理模型初始化之后,计算过程中将根据流场的变化不断地对网格进行细分和合并,以实现网格自适应技术,为此将会有以下几个与细分和合并有关的问题:即网格细分与合并判据、规则,及细分或合并后数据结构的调整。

3.3.1 细分合并判据

针对不同的计算模型,结合 MEPH3D 程序所用数值方法和程序实现的特点,我们给出了以下几个判据,这些判据可单独使用,也可几个判据组合使用。

(1) 为了能更准确地模拟流场变化剧烈处的物理量的情形,以压力梯度或密度梯度值作为网格细分或合并的判据。

(2) 对多介质流场来说,在物质界面处加密,将网格块的体积份额和介质种数作为网格细分与合并的判据。

(3) 在爆轰计算中,爆轰燃烧函数 F 描述了炸药的起爆情况,在爆轰波面加密网格,把燃烧函数 F 作为网格细分或合并的判据。

3.3.2 细分合并规则

对需要细分或合并的块进行标记,最终是否进行细分或合并还要遵循以下的细分合并规则。

(1) 相邻网格块的细分级别相差不能大于 1。如果某块被标志成细分,而细分后与它的邻块相差大于一级,则细分过程中将忽略此块的细分标志。

(2) 若某网格块被标记为细分,同时它又是父块,则此块细分标志被忽略。

(3) 若某块被标记为合并,但与其同一父块的兄弟块有未被标记为合并的,则此块的合并标志被忽略。

(4) 若网格块已经处在最大细分层级上,则该网格块的细分标志被忽略;若网格块已经处在最小细分层级上,则该网格块的合并标志也被忽略。

3.3.3 细分合并后数据结构的调整

细分或合并后还需要对数据结构进行调整,即树的长度的延长或缩短。当一个块被细分后,新的子块只是被临时放在树列表的末尾;而当 8 个块被合并时,也只是简单地从树结构中移出。这样会破坏树的结构,所以在每一次细分合并后还要调整树的结构,具体数据调整的步骤如下:(1) 填充新生成的叶节点块的幻影网格;(2) 通过调用插值函数生成新叶节点块的网格值;(3) 使父网格和子网格上的数据值相互吻合以保持守恒性;(4) 网格块树结构的重新排列。

3.4 插值函数

生成幻影网格值和新网格块上的变量值都需要用到插值函数。对于单一介质上的插值,为了能在计算中保持各物理量的守恒性,针对 MEPH3D 程序给出了以下的一阶精度的插值函数。带“~”的变量是新生成块上的变量,下标为 f 的变量是父块上的变量,而下标为 ch 的变量则是子块上的变量。

由父块生成子块中的变量的插值函数有两个:$\tilde{a}_{\mathrm{ch},i}=a_{\mathrm{f}}/8, i=1,\cdots,8$, 其中 a 代表的是质量和体积;$\tilde{b}_{\mathrm{ch},i}=b_{\mathrm{f}}, i=1,\cdots,8$, 其中 b 代表的是物质号、体积份额、密度、内能、速度、应力偏量等。子块中的压力则根据状态方程计算得到。

由子块生成父块中的变量的插值函数为 $\tilde{M}_{\mathrm{f}}=\sum_{i=1}^{8}M_{\mathrm{ch},i}$, $\tilde{a}_{\mathrm{f}}=\left(\sum_{i=1}^{8}M_{\mathrm{ch},i}a_{\mathrm{ch},i}\right)\Big/\tilde{M}_{\mathrm{f}}$, $i=1,\cdots,8$, 其中 M 代表网格块质量,a 代表内能和速度;$\tilde{b}_{\mathrm{f}}=\left(\sum_{i=1}^{8}b_{\mathrm{ch},i}\right)\Big/8, i=1,\cdots,8$, 其中 b 代表密度、体积份额和应力偏量。压力则根据状态方程计算得到。这样能保证计算过程中的质量、动量和内能的守恒。

对于多介质问题,在生成初始网格时就使物质界面处在最细的块上,并在以后的细分合并过程中总保持其处在细分级数最高的位置上,因而计算过程中对于含有物质界面的混合网格并不进行细分或合并,从而避免了在含有多介质物质界面的混合网格上进行插值时而带来的界面弥散问题。

4 算　例

4.1 炸药起爆及爆轰波传播问题

长方体炸药块:100 mm×50 mm×50 mm,四周均为固壁,炸药参数 $\rho_0=1.842\ \mathrm{g/cm^3}$, $\gamma=2.827$, $D_{\mathrm{CJ}}=8.8\ \mathrm{km/s}$。分别计算了平面起爆、一点起爆、多点起爆情况下爆轰波的传播过程。

(1) 平面起爆。凝聚炸药由一端平面起爆,以爆轰燃烧函数 F 为自适应判据进行细分,网格块规模为 4×4×4,计算结果如图 2、图 3 所示。

通过比较相同时刻本程序和 MEPH3D 程序的物理量得知,在相同最细网格步长情况下的计算结果是相符的,但本程序在自适应后平均所需的网格数仅为 MEPH3D 程序的 1/3 左右,计算时间也明显减少。

(2) 一点起爆。分两种情况:(a) 由角点起爆,计算结果如图 4 所示;(b) 端面中心起爆,计算结果如图 5 所示。以爆轰燃烧函数 F 和压力梯度为自适应判据进行细分。

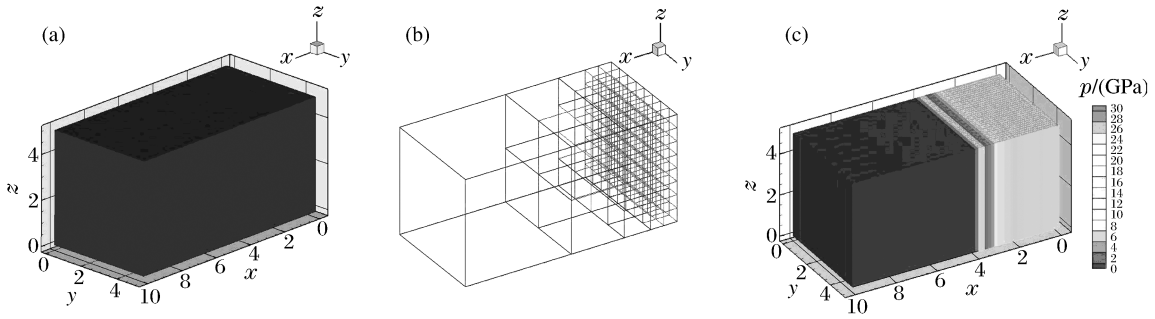


图 2 (a) 炸药形状,(b) 初始状态 3 级优化网格细分情况,(c) 5 μs 时刻压力图像

Fig. 2 (a) The initial shape of the explosive, (b) The initial block-structure with refine-level 3, (c) The figure of pressure at $t=5$ μs

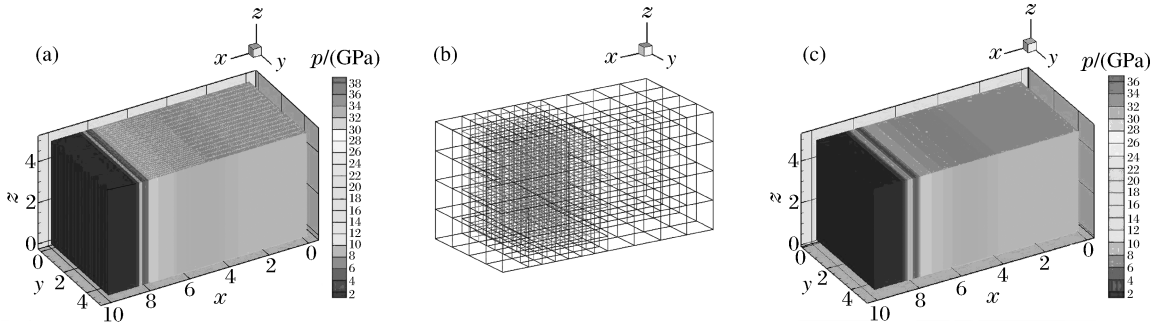


图 3 (a)、(b)、(c)分别为 10μs 时刻自适应计算压力图像 、自适应网格图、统一网格计算压力图像

Fig. 3 (a), (b) show the figures of pressure and the block-structure at $t=10$ μs, (c) The figure of pressure at $t=10$ μs using the uniform grid structure

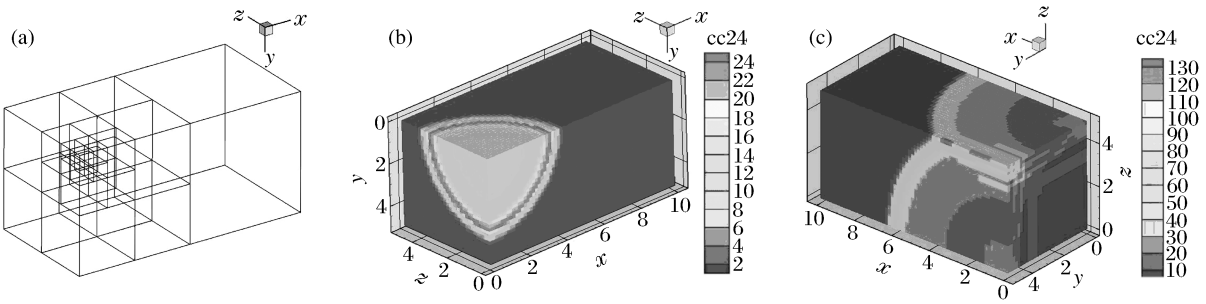


图 4 (a) 角点起爆情况下初始状态网格 3 级细分图,(b) 5 μs 时刻压力图像,(c) 10 μs 时刻压力图像

Fig. 4 (a) The initial block-structure initiated at a corner point with refine-level 3, (b) The figure of pressure at $t=5$ μs, (c) The figure of pressure at $t=10$ μs

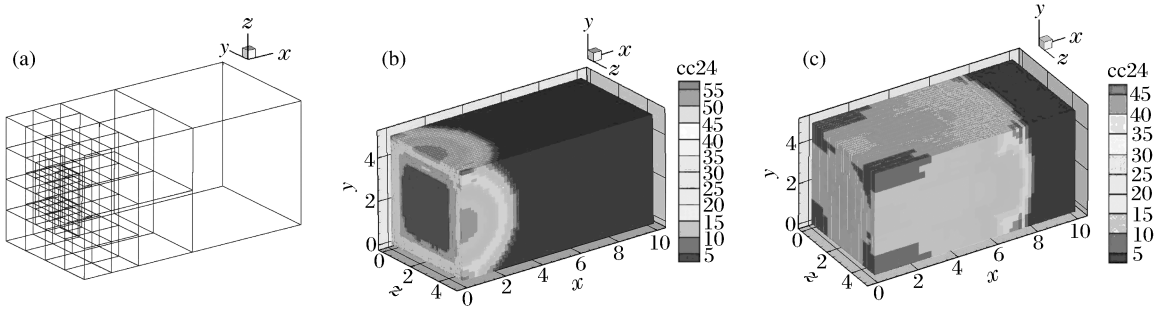


图 5 (a) 端面中心点起爆情况下初始网格 3 级细分图,(b) 5 μs 时刻压力图像,(c) 10 μs 时刻压力图像

Fig. 5 (a) The initial block-structure initiated at the midpoint of an end face with refine-level 3, (b) The figure of pressure at $t=5$ μs, (c) The figure of pressure at $t=10$ μs

(3) 多点起爆。由端面上 4 个角点同时起爆，以爆轰燃烧函数 F 和压力梯度为自适应判据细分，计算结果如图 6 所示。

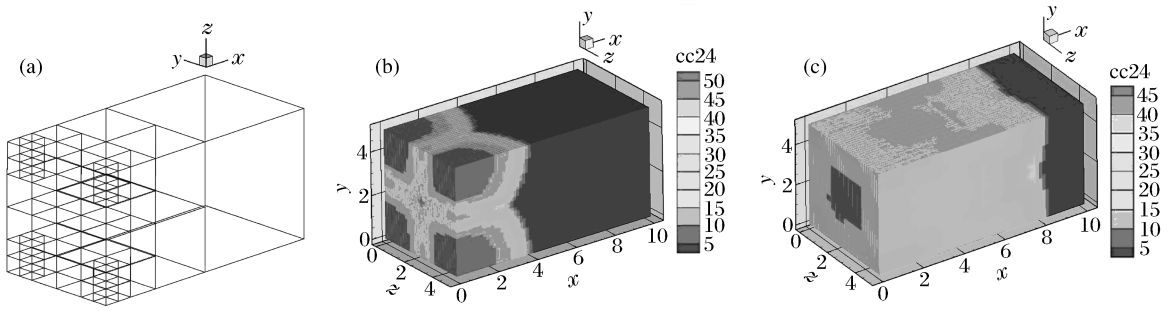


图 6　(a) 多点起爆情况下初始网格 3 级细分图，(b) 5 μs 时刻压力图像，(c) 10 μs 时刻压力图像

Fig. 6　(a) The initial block-structure initiated at the four corner points of an end face with refine-level 3, (b) The figure of pressure at $t=5$ μs, (c) The figure of pressure at $t=10$ μs

4.2　高速碰撞问题

一个长 12.45 cm、直径为 2.54 cm 的铜杆以 2 km/s 速度和 45°角撞击 0.95 cm 厚的钢靶。自适应网格划分及计算图像如图 7 所示。

由计算结果得知，弹体速度在 30 μs 之后趋于稳定，计算的剩余平均速度为：$\overline{v}_i=\sum(mv_i)\Big/\sum m\approx 1.895$ km/s$(i=x,y,z)$，即平均速度为弹体总动量除以弹体总质量。本程序与 MEPH3D 和 EPIC3 程序计算此问题的剩余速度的比较见表 1。

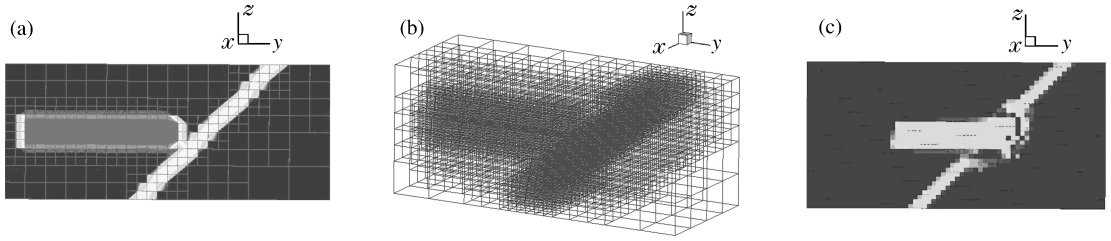


图 7　(a) 初始网格剖面图，(b) 三维自适应网格划分图，(c) 30 μs 时刻弹靶剖面图

Fig. 7　(a) The section of the initial block-structure with refine-level 3, (b) The initial block-structure with refine-level 3, (c) The section at $t=30$ μs

表 1　30 μs 后剩余速度和所需块数比较

Table 1　Comparison of residual speed and blocks number at $t=30$ μs

Method	Initial speed/(km/s)	Residual speed at $t=30$ μs/(km/s)	Needed blocks number with the same precision
Our program	2	1.895	3 314
MEPH3D	2	1.865	8 192
EPIC3	2	1.950	—

5　总　结

给出了三维多介质弹塑性流体力学欧拉自适应数值模拟方法的总体设计思想，包括数据结构、细分合并判据、网格数据填充、外边界处理等内容，并给出了部分计算结果。结果表明，自适应方法可以成功地应用于爆轰和高速碰撞等弹塑性问题的计算，大大节省了计算成本。自适应方法和弹塑性计算的有效结合扩大了弹塑性流体力学问题的计算范围，使得三维弹塑性流体力学欧拉方法在现有的计算条件下能够更广泛地应用于实际问题的计算。

References:

[1] Kravtsov A V, Klypin A A. Adaptive Refinement Tree—A New High-Resolution N-Body Code for Cosmological Simulations [J]. Astrophys J Suppl, 1997, 111: 73-94.

[2] Berger M J, Oliger J. Adaptive Mesh Refinement for Hyperbolic Partial Differential Equations [J]. J Comput Phys, 1984, 53: 484-512.

[3] Berger M J, Colella P. Local Adaptive Mesh Refinement for Shock Hydrodynamics [J]. J Comput Phys, 1989, 82: 64-84.

[4] Quirk J J. An Adaptive Grid Algorithm for Computational Shock Hydrodynamics [D]. Cranfield Institute of Technolog, 1991.

[5] de Zeeuw D, Powell K G. An Adaptively Refined Cartesian Mesh Solver for the Euler Equations [J]. J Comput Phys, 1993, 104: 56-68.

[6] He C J, Yu Z L, Feng Q J. 3D Eulerian Numerical Simulation Method of High Speed Impact [J]. Explosion and Shock Waves, 1999, 19(3): 216-221. (in Chinese)
何长江, 于志鲁, 冯其京. 高速碰撞的三维欧拉数值模拟方法 [J]. 爆炸与冲击, 1999, 19(3): 216-221.

An Eulerian Adaptive Mesh Refinement Method for Three Dimensional Elastic-Plastic Hydrodynamic Simulations

LIU Jun[1], HE Chang-Jiang[2], LIANG Xian-Hong[2]

(1. *Graduate School of CAEP, Beijing* 100088, *China*;
2. *Institute of Applied Physics and Computational Mathematics* (*IAPCM*), *Beijing* 100088, *China*)

Abstract: Based on three dimensional elastic-plastic program MEPH3D, we design a three dimensional multi-component block-structured AMR program and solve many important problems which are encountered in combining block-structured AMR with the uniform-grid program MEPH3D, such as the rule of refinement and derefinement, how to fill in the new blocks or ghost cells, the storage of the ghost cell, how to choose the interpolation functions and how to construct a timestep routine. Here we present two methods to store the ghost cell, and three kinds of interpolation function. We define a variable to control the selection of the boundary condition, and we give three kinds of boundary condition to choose. The numerical results indicate that the program has the ability to computing high-speed impact and explosion problems, and spends less time when getting the same precision.

Key words: hydrodynamics; elastic-plastic; Eulerian method; multi-component; adaptive mesh refinement; 3D