文章编号:1000-5773(2006)04-0353-06

岩石 Hopkinson 层裂的流形元法模拟*

黄 涛[1],陈鹏万[1],张国新[2],杨 军[1]

(1. 北京理工大学爆炸科学与技术国家重点实验室,北京 100081;
2. 中国水利水电科学院结构材料研究所,北京 100038)

摘要:利用二阶流形元法,通过引入裂纹产生及扩展判据,对冲击载荷作用下岩石Hopkinson动态层裂过程进行了数值模拟,再现了拉伸波作用下 Hopkinson 层裂过程,计算得到的层裂片厚度和速度等与理论值符合较好,验证了流形元法在模拟冲击载荷作用下材料动态破坏过程方面的有效性和优越性。

关键词:Hopkinson 层裂;冲击载荷;流形元;数值模拟
中图分类号:O347.4 **文献标识码**:A

1 引 言

应力波在传播过程中如果遇到杆或板的自由面,则入射的压缩波经反射后会形成拉伸波。同时这些反射回来的拉伸波将与入射压缩波的后续部分相互作用,将可能在邻近自由表面的某处产生相当高的拉应力,一旦满足动态断裂准则,就会在该处引起材料的层裂。裂口足够大时,整块裂片便带着获得的能量飞出。这种由于压应力在自由表面反射造成的动态断裂称为层裂或剥落(Spalling)。最早发现这种动态剥落现象的是 Hopkinson,因此这种破坏现象也称为 Hopkinson 层裂。是否发生层裂与材料的动态断裂强度、应力波应力大小、波形及作用时间有关。关于应力波作用下 Hopkinson 层裂问题已有较详尽的理论分析[1]。由于岩石、混凝土材料的拉压严重不对称性,其层裂现象比较金属材料等表现的更为明显,研究岩石、混凝土类脆性材料的层裂强度有着重要的学术和应用价值。目前,采用Hopkinson杆研究岩石等脆性材料的动态力学性质及层裂强度已有很多的实验研究[2-5]。

传统的基于连续介质力学的 FEM、BEM 等可以很好的计算连续介质内的应力与位移,但对于裂缝扩展的模拟却遇到了很大的困难,更难以模拟块体运动等大变形问题。建立在非连续力学基础之上的DEM、DDA 可以模拟块体运动、接触等不连续问题,但却难以给出块体内部尤其是连续介质内部的合理应力分布,更难以模拟连续块体内裂缝的发生和扩展[6]。流形元法(Manifold Method)是石根华继不连续变形分析方法(Discontinuous Deformation Analysis,DDA)之后,提出的另一种新的数值分析方法[7-8],它将基于连续介质力学的有限单元法和基于不连续变形分析方法的 DDA 结合起来,可分析结构的应力分布和破坏之后的块体运动规律,具有很强的适应性。流形元法不仅可以像 DDA 那样有效地模拟不连续面的接触和块体的运动,而且可以像有限元法那样精确地求解块体内部的应力分布,可以处理不连续面的张开、闭合、多裂缝扩展、多缝面接触等问题。目前,流形元法已经在岩土工程的裂纹扩展、边坡滑动等方面得到了成功的应用[9-10]。最初提出的数值流形方法是利用一次位移函数作为覆盖函数的,这在研究一些对位移和应力分布有较高精度要求的问题时就存在局限性。张国新对流形元进行了扩展,提出了二阶流形元法[11-12],采用二次权函数和单元上的常位移函数形成二次覆盖位移函数,能更精确地对材料的破坏和断裂过程进行模拟,拓展了流形元法的适用性。本工作尝试采用二阶流形

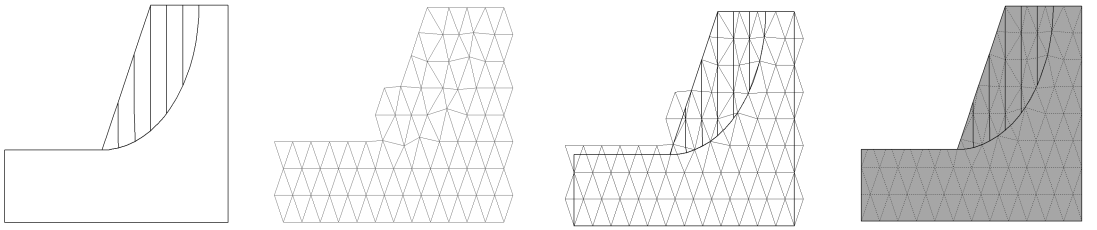
* **收稿日期**:2005-12-21;**修回日期**:2006-02-14
作者简介:黄 涛(1978—),男,硕士研究生.
通讯作者:陈鹏万,博士,副教授,主要从事爆炸力学研究. E-mail:pwchen@bit.edu.cn

元法对岩石 Hopkinson 动态层裂这一典型问题进行模拟，并验证流形元法在模拟此类问题的有效性。

2 流形元法的基本原理

2.1 流形元的覆盖和两套网格

流形元法提出了覆盖的概念并使用了两套网格，这是流形元法与有限元法的一个主要区别。图 1 所示为流形元的覆盖和采用的两套网格示意图。物理网格(图 1(a))由定义材料区域的边界线和解理裂隙等不连续面组成，用以定义所分析问题的物理域。数学网格(图 1(b))是由贴在物理网格之上的一层规则的三角形网格单元组成，并形成数学覆盖，同时用来定义插值函数。两层网格贴在一起构成计算网格(图 1(c))。从中可以看出，只要插值网格完全覆盖物理域，物理域与插值函数的插值域就可以完全分离，最后形成流形单元(图 1(d))，其形状任意，也就是积分单元。流形元采用单纯形积分法，是一种解析积分。单纯形积分可以对任意多边形积分，以多边形代替曲边。



(a) Physical mesh (b) Mathematical mesh (c) Calculation mesh (d) Physical elements

图 1 流形元覆盖和两套网格

Fig. 1 Cover and two sets of meshes of NMM

2.2 二阶流形元法

2.2.1 二阶流形元的位移函数

模拟裂纹的扩展要求应力场、位移场结果具有较高的精度，一阶流形元法是难以胜任的。适用于流形元法的高阶位移函数的构造常用两种方法：一种是利用线性权函数与高阶覆盖函数；另一种是用高阶权函数和常数覆盖函数。由于裂纹向任意可能方向扩展后，可能产生很小的单元，第一种方法在遇到很小单元的时候容易使计算发散，且当变形较大时易使物理单元的积分误差增大，因此借鉴有限元的思路，用 6 节点三角形单元构造二阶插值函数，即用二阶权函数和数学网格 6 个顶点上的常量位移构成二阶位移函数，即

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{6} w_i(x,y) \begin{Bmatrix} u_i(x,y) \\ v_i(x,y) \end{Bmatrix} \tag{1}$$

式中：$u(x,y)$和 $v(x,y)$是总体的位移函数，$w_i(x,y)$是节点的权函数，$u_i(x,y)$和 $v_i(x,y)$是节点的位移函数。各种矩阵的构成及计算方法可参见文献[11-12]。

2.2.2 瞬态平衡方程

流形元法中，动力学问题的模拟采用结构动力学方程

$$\boldsymbol{M}\ddot{d} + \boldsymbol{C}\dot{d} + \boldsymbol{K}\Delta d = \Delta \boldsymbol{F} \tag{2}$$

式中：$\boldsymbol{M}$ 为质量矩阵，$\boldsymbol{C}$ 为阻尼矩阵，Δd 为位移增量，$\dot{d}$、$\ddot{d}$ 分别是位移速度和加速度。$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}_e+\boldsymbol{K}_{cn}+\boldsymbol{K}_{cs}+\boldsymbol{K}_f$，$\boldsymbol{K}_e$是刚度矩阵，$\boldsymbol{K}_{cn}$、$\boldsymbol{K}_{cs}$分别为块体及不连续面之间的法向和切向接触矩阵，$\boldsymbol{K}_f$是约束矩阵。$\Delta \boldsymbol{F}$ 为总载荷向量，$\Delta \boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_p+\boldsymbol{F}_b+\boldsymbol{F}_f-\boldsymbol{F}_0+\boldsymbol{F}_{cn}+\boldsymbol{F}_{cs}+\boldsymbol{F}_{fr}$，$\boldsymbol{F}_p$是外载荷向量，$\boldsymbol{F}_b$是体积力向量，$\boldsymbol{F}_f$是已知约束位移引起的等效载荷向量，$\boldsymbol{F}_0$是初应力向量，$\boldsymbol{F}_{cn}$、$\boldsymbol{F}_{cs}$分别为法向和切向接触引起的等效载荷向量，$\boldsymbol{F}_{fr}$为接触面之间的摩擦力引起的等效载荷向量。

2.2.3 动力学方程的求解

方程(2)可以用 Newmark 法求解。设

$$\dot{d}_{t+\Delta t}=\dot{d}_t+[(1-\beta)\ddot{d}_t+\beta\ddot{d}_{t+\Delta t}]\Delta t \tag{3}$$

$$d_{t+\Delta t}=d_t+\dot{d}_t\Delta t+\left[\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\ddot{d}_t+\alpha\ddot{d}_{t+\Delta t}\right]\Delta t^2 \tag{4}$$

式中:α、β 是按积分精度和稳定性要求而决定的两个参数。当 $\beta\geqslant 0.5$,$\alpha\geqslant 0.25(0.5+\beta)^2$。将(3)式、(4)式代入动力学方程(2)得

$$\tilde{\boldsymbol{K}}\Delta d=\tilde{\boldsymbol{F}} \tag{5}$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{K}}=\frac{1}{\alpha\Delta t^2}\boldsymbol{M}+\frac{\beta}{\alpha\Delta t}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{K} \tag{6}$$

$$\tilde{\boldsymbol{F}}=\Delta\boldsymbol{F}+\left[\left(\frac{1}{2\alpha}-1\right)\ddot{d}_t+\frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{d}_t\right]\boldsymbol{M}+\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}-1\right)\dot{d}_t+\frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\beta}{\alpha}-2\right)\ddot{d}_t\right]\boldsymbol{C} \tag{7}$$

3　裂纹起裂及扩展判据

流形元可以模拟沿结合面、节点和数学网格的开裂和裂纹沿任意可能方向的扩展,可用于含裂纹材料体的稳定分析、破坏分析、结构的开裂等各种与不连续结构有关的力学问题。由于流形元法采用了两套覆盖,因而在模拟裂纹扩展方面有很强的优势。如果采用有限元网格作为数学覆盖,在模拟裂纹扩展的过程中数学覆盖保持不变,即相当于有限元网格保持不变,则模拟裂纹扩展的问题变得简单。

岩石是一种抗压强度远远大于其抗拉和抗剪强度的脆性材料,其破坏的主要形式为拉伸破坏和剪切破坏。岩石的破坏过程一方面是在外载作用下,材料内部的应力超过了材料的抗拉或抗剪强度而导致材料开裂形成裂纹;另一方面是由于材料内部已形成的裂纹被激活扩展。

在判断新裂纹的起裂和已存在裂纹的扩展问题中,可以采用不同的标准。对于新裂纹的起裂,一般考虑采用以应力为变量的判据。本工作采用摩尔-库仑准则作为裂纹起裂的判据[13]:(1) 当第一主应力大于材料的抗拉强度时,材料被拉伸破坏,产生新裂纹;(2) 当某点的最大剪应力大于材料的抗剪强度时,材料被剪切破坏,产生新裂纹。用 σ_1、σ_3 分别表示第一和第三主应力,T_0 为材料抗拉强度,C 为粘结力,φ 为摩擦角。则以上判据可以表示如下。

(1) 拉伸破坏:

$$\sigma_1=T_0 \tag{8}$$

(2) 剪切破坏:

$$\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}=C\qquad \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}>0,0<\sigma_1<T_0 \tag{9}$$

$$\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}=C\cos\varphi-\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\sin\varphi\qquad \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}<0,0<\sigma_1<T_0 \tag{10}$$

对于已存在的裂纹,根据应力强度因子理论,采用材料的断裂韧性 K_{IC} 作为裂纹是否起裂的判断标准,在裂纹的起裂方向上采用最大环向应力理论来确定裂纹扩展的方向。应力强度因子根据二阶流形元求出的位移场,用带有裂纹尖端奇异解的奇异边界元法求取。裂纹的扩展方向与现有裂纹方向的夹角 θ_0 可由下式来确定

$$K_{\mathrm{I}}\sin\theta_0+K_{\mathrm{II}}(3\cos\theta_0-1)=0 \tag{11}$$

式中:K_{I}、K_{II} 为第Ⅰ、第Ⅱ型应力强度因子。

对于复合型裂纹问题当满足下式时裂缝开始沿 θ_0 方向扩展

$$\cos\frac{\theta_0}{2}\left(K_{\mathrm{I}}\cos^2\frac{\theta_0}{2}-\frac{3}{2}K_{\mathrm{II}}\sin\theta_0\right)=K_{\mathrm{IC}} \tag{12}$$

4　Hopkinson 层裂的模拟

4.1　计算模型及参数

图 2 所示为一岩石长杆,杆长 $L=1$ m,宽 $W=0.03$ m。在杆左端施加一沿整个端面均匀分布的冲

击三角波载荷来模拟爆炸产生的荷载，升压时间为 0.02 ms，降压时间 0.04 ms，压力峰值为 28 MPa。在距离左端 0.2 m、0.6 m 和 0.9 m 的杆中心线处，设置测点 A、B、C 监测压力脉冲。所有边界无约束，不考虑重力作用。岩石的材料参数见表 1。

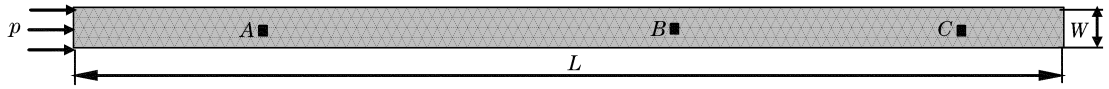


图 2 计算模型

Fig. 2 MM calculation model

表 1 岩石材料参数和计算条件

Table 1 Material pamameter of granite and caculation condition

Elastic modulus /(GPa)	Poisson ratio	Unit mass /(T/m^3)	Tensile strength /(MPa)	Cohesion /(MPa)	Friction angle /(°)	Fracture toughness /(MN/m$^{3/2}$)	Penalty /(GN/m)
62.8	0.3	2.55	18	15	30	2.6	800

4.2 模拟结果及讨论

图 3 为层裂过程的数值模拟结果，图 3(a)、图 3(b)和图 3(c)为不同时刻的应力 σ_x 云图，可以清楚地看到层裂前的入射压缩波传播，层裂时反射拉伸波和压缩应力波相互作用形成拉伸应力波以及层裂后反射拉伸波的传播过程。图 3(d)给出了层裂时裂缝的产生，明显的看出裂缝的起裂位置不在同一个地方，但只有一个位置裂缝的发展最为明显，这条缝最后完全贯通。图 3(e)给出了裂缝完全贯通时的情况。图 3(f)给出了 Hopkinson 层裂后情况，可以看到右端垂直方向贯穿裂纹的形成导致一次层裂的发生。在层裂后，形成的飞片内部残留的应力波能导致飞片内部产生新的裂纹，应力波在杆内继续往复传播也产生新的裂纹。也就是在一次层裂的贯穿主裂纹两边能看到的一些短小的裂纹，这也是反射拉伸波造成的，由于裂纹没有充分扩展，未能形成二次及多次层裂。从理论上讲，只要降压段波长足够长，峰值足够大，就可能发生二次及多次层裂。图 4 为三个测点 A、B、C 的应力 σ_x 随时间变化曲线，图 4 中

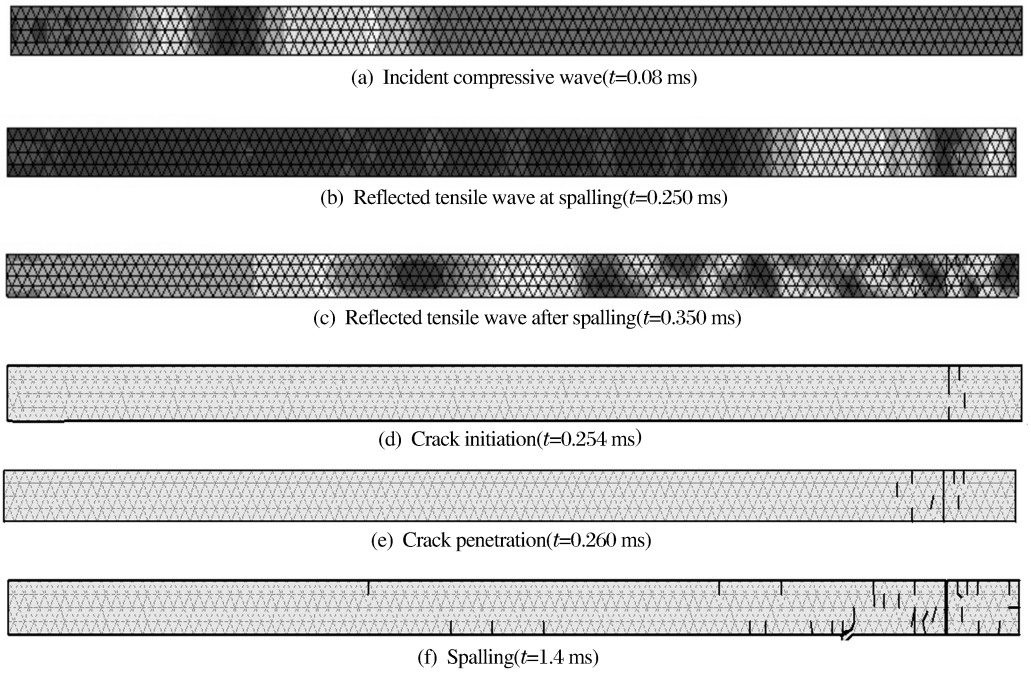


图 3 Hopkinson 层裂的数值模拟结果

Fig. 3 Simulation results of Hopkinson spalling

可以清楚地看到应力波的传播过程，包括在两个自由面来回反射及逐渐衰减的情况。

根据图 4 中的应力波形，A 点在 0.079 ms 时刻达到峰值压力，B 点滞后 A 点，在 0.161 ms 达到峰值压力，可据此得到波速 $C_0=4\,878$ m/s。岩石长杆中纵波传播的理论波速 C_T 为[1]

$$C_T=\sqrt{E/\rho}=4\,963\ \text{m/s} \tag{13}$$

误差为 1.7%。

根据应力波理论[1]，在三角形应力脉冲作用下，首次层裂的裂片厚度 δ 可由下式计算

$$\delta=\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{\sigma_c}{\sigma_m} \tag{14}$$

式中：σ_c 为动态抗拉强度，σ_m 为峰值压力，λ 为波长。由于升压段压缩波在反射时反射拉伸波与入射压缩波的合成波不会产生拉伸波，只有降压段压缩波在反射时合成波才会形成拉伸波，所以使用降压段时间 0.04 ms 计算有效波长 $\lambda=0.1985$ m。将 $\sigma_c=18$ MPa、$\sigma_m=28$ MPa 和 $\lambda=0.1985$ m 带入公式(14)得首次层裂的层裂片厚度 $\delta=0.0638$ m。数值模拟得到的层裂片厚度为 0.0707 m，误差为 10.8%。根据应力波理论[1]，层裂片的速度 v_f 由下式计算

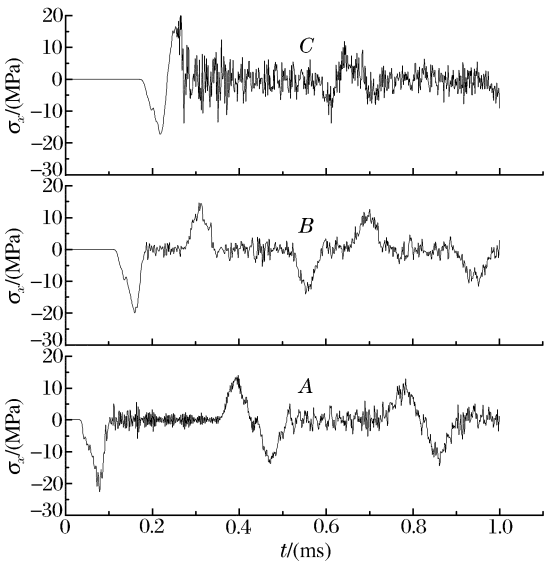


图 4　测点 A、B、C 处的应力 σ_x 随时间的变化图

Fig. 4　σ_x-t curves at points A, B and C

$$v_f=\frac{2\sigma_m-\sigma_c}{\rho_0 C_0} \tag{15}$$

式中：ρ_0 为岩石密度，将各参数带入得层裂片速度的理论值为 3.0 m/s，计算得 v_f 为 2.2 m/s，误差为 26.7%。值得指出的是，应力波理论中对裂片厚度和速度的分析并未考虑杆获得的动能以及应力波传播过程中的能量损失，如果以数值模拟中得到的距离杆左端 0.2 m 处 A 点的应力波波形作为入射波进行理论估算，则理论值和数值模拟值更接近，相应的裂片厚度和速度误差值为 6.8%和 10.0%。

5　结　语

采用流形元法对岩石 Hopkinson 动态层裂过程进行了数值模拟，模拟结果再现了应力波在杆中传播过程以及反射拉伸应力波作用下裂纹起裂及层裂发生过程，有力地解释了脆性材料的层裂现象，计算得到的波速、层裂片厚度和层裂片速度与应力波理论结果符合较好，显示出流形元法在模拟冲击载荷作用下岩石等脆性材料从连续体到不连续体破坏这一复杂过程的有效性及优越性，同时也为研究类似问题提供了新的思路和方法。

References：

[1] Wang L L. Foundation of Stress Waves [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1985. (in Chinese)
王礼立. 应力波基础 [M]. 北京：国防工业出版社，1985.

[2] Hu S S, Zhang L, Wu H J, et al. Experimental Study on Spalling Strength of Concrete [J]. Engineering Mechanics, 2004, 21(4): 128-132. (in Chinese)
胡时胜，张磊，武海军，等. 混凝土层裂强度的实验研究 [J]. 工程力学，2004，21(4)：128-132.

[3] Wang L M, Zhao J, Hua A Z, et al. Research on SHPB Testing Technique for Brittle Material [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2003, 22(11): 1798-1802. (in Chinese)
王鲁明，赵　坚，华安增，等. 脆性材料 SHPB 实验技术的研究 [J]. 岩石力学与工程学报，2003，22(11)：1798-1802.

[4] Li W, Xie H P, Wang Q Z. Experimental Study for Dynamic Tensile Strength and Elastic Modulus of Marble Using SHPB [J]. Journal of Experimental Mechanics, 2005, 20(2): 200-206. (in Chinese)

李 伟,谢和平,王启智.大理岩动态拉伸强度及弹性模量的 SHPB 实验研究 [J].实验力学,2005,20(2):200-206.

[5] Wu X T,Hu S S,Yang B Y,et al. An Improvement in Measuring the Dynamic Properties of Concrete Material by the Traditional SHPB Technique [J]. Journal of Hefei University of Technology,2004,27(1):63-66. (in Chinese)
巫绪涛,胡时胜,杨伯源,等.SHPB 技术研究混凝土动态力学性能存在的问题和改进 [J].合肥工业大学学报,2004,27(1):63-66.

[6] Zhang G X,Zhou L B,Zhu B F,et al. Simulation of Cracking with Manifold Method for Wuqiangxi Shiplock [J]. Journal of Hydraulic Engineering,2003,11:37-42. (in Chinese)
张国新,周立本,朱伯芳,等.五强溪船闸裂缝的流形元模拟 [J].水利学报,2003,11:37-42.

[7] Shi G H. Manifold Method of Material Analysis [A]//Transactions of the Ninth Army Conference on Applied Mathematics and Computing [C]. Minneapolish,Minncsoda,USA,1992:51-76.

[8] Shi G H. Numerical Manifold Method and Discontinuous Deformation Analysis [M]. Translated by Pei J M. Beijing:Tsinghua University Press,1997. (in Chinese)
石根华.数值流形方法与非连续变形分析 [M].裴觉民,译.北京:清华大学出版社,1997.

[9] He C Y,Wu X,Wu Y P. Numerical Simulation of Landslide on the Right Bank at Pingban Station by Using Manifold Method [J]. Journal of China Institute of Water Resources and Hydropower Research,2004,2(2):120-123. (in Chinese)
何传永,武 雄,吴永平.平班水电站右岸滑坡流形元法数值模拟 [J].中国水利水电科学研究院学报,2004,2(2):120-123.

[10] Zhang G X,Sujiura Y,Saito K. Application of Manifold Method to Jointed Dam Foundation [A]//Amadei B. Proceedings of the 3rd International Conference on Analysis of Discontinuous Deformation from Theory to Practice [C]. Vail,Coloraclo:The Montana Oil Journal Inc,1999.

[11] Zhang G X,Sugiura Y,Hasegawa H,et al. The Second Order Manifold Method with Six Node Triangle Mesh [J]. J Struct Mech Earthquake Eng,JSCE,2002,696/Ⅰ-58:1-9.

[12] Zhang G X,Peng J. Second-Order Manifold Method in Structure Failure Analysis [J]. Acta Mechanic Sinica,2002,34(2):261-269. (in Chinese)
张国新,彭 静.二阶流形元与结构变形分析 [J].力学学报,2002,34(2):261-269.

[13] Zhang G X. Sugiura Y,Hasegawa H. Fracture Simulation Using Manifold and Singular Boundary Element Method [J]. J Geotech Eng,JSCE,1999,624/Ⅲ-47:1-10.

Numerical Simulation of Hopkinson Spalling of Rock Using Manifold Method

HUANG Tao[1],CHEN Peng-Wan[1],ZHANG Guo-Xin[2],YANG Jun[1]

(1. *National Key Laboratory of Explosion Science and Technology, Beijing Institute of Technology, Beijing* 100081, *China*;
2. *Institute of Structure Materials, Chinese Academy of Water Resources and Hydropower Research, Beijing* 100038, *China*)

Abstract: The second-order manifold method (MM) is used to simulate the dynamic Hopkinson spalling process of rock under shock loading through introducing a criterion of crack initiation and crack growth. The attenuation of stress waves and the spalling process caused by a reflected tensile stress wave are reproduced. The simulation results are compared with theoretical analysis. The thickness of the formed scab and its velocity obtained from the simulation are in good agreement with the theoretical values. MM has proven to be an effective method in simulating the dynamic failure process of materials under shock loading and exhibits some advantages to conventional numerical methods in the study of dynamic failure and related issues.

Key words: Hopkinson dynamic spalling; shock loading; manifold method; numerical simulation