文章编号：1000-5773(2006)03-0249-08

多介质流动数值计算中的界面处理方法*

张学莹[1]，赵 宁[2]，王春武[3]

(1. 河海大学理学院，江苏南京 210098；
2. 南京航空航天大学航空宇航学院，江苏南京 210016；
3. 南京航空航天大学理学院，江苏南京 210016)

摘要：求解 Riemann 问题得到界面接触间断的流动状态，并以此构造带状区域的虚拟流体状态，对于多维问题设计了一种方便有效的算法。同时求解耦合的守恒形式欧拉方程组和非守恒界面捕捉方程，并用 Level-Set 函数捕捉界面，数值计算采用高分辨率 MWENO 格式。最后对可压缩多介质流动问题进行了数值模拟。

关键词：多介质流体界面；Riemann 问题；虚拟流动方法；γ-model 方法；MWENO 格式
中图分类号：O354；V211 **文献标识码**：A

1 引 言

可压缩多介质流动界面边界条件的处理方法是数值模拟的关键技术，标准的激波捕捉格式几乎在整个流场采用相同的计算格式，期望保持间断的精确和锐利，使数值耗散限制在有限的过渡网格内。该方法是通过格式自身的重构策略或者人为添加数值耗散项来抑制间断附近的非物理振荡。间断捕捉方法的优点是在程序上容易实现并且易于推广到多维问题，如 TVD、MUSCL、WENO[1-2] 等数值格式是比较稳定的高分辨率激波捕捉方法。但是在处理界面问题时常常会在界面附近引起虚假数值振荡，给数值计算带来较大的误差甚至使计算无法进行下去。为了克服这种困难，Karni、Abgrall、Saurel、Fedkiw等人提出了相应的处理方法[3-8]。Liu 提出了一种改进的虚拟流动方法(MGFM)[9]，该方法是在求解 Riemann 问题的基础上，用界面处的流动状态构造虚拟流体的等压装配变量、压强和法向速度。间断跟踪方法把间断作为移动的内边界进行处理，该算法把间断在法向和切向上分别推进，通常用 Riemann问题解获得间断的流动状态。由于界面拓扑结构的变化，该方法在处理多维问题时非常复杂，并且常常引起 CFL 条件难以满足的“小网格”问题。Level-Set 方法是定义一个距离函数，用于捕捉界面的运动变化，能够处理复杂界面拓扑结构的变化，并且容易推广到多维问题。

本工作采用双激波近似求解 Riemann 问题，并用界面处流动状态定义虚拟流体，给出了多维情况下 Riemann 问题的构造和虚拟流体的定义方法。数值计算采用 MWENO 插值重构网格单元边界点上的数值通量值，利用通量分裂，根据流动的方向选择数值通量[2,10]。最后用 γ-model 方法和 MGFM 对一维和二维界面不稳定性问题进行数值模拟，以验证方法的有效性。

2 界面边界条件的构造

2.1 界面流动状态的计算

Fedkiw 在多介质流体的数值模拟中提出了虚拟流体的概念[4]，虚拟流体的压强和法方向速度用网格点上真实流体的压强和法方向速度、密度由等压装配技术单侧熵插值求得。这种传统的虚拟流动方

* **收稿日期**：2005-07-06；**修回日期**：2005-09-02
基金项目：国家自然科学基金(10576015)；国防科技重点实验室基金(51479010205HK0207)
作者简介：张学莹(1973—)，男，博士，主要从事计算流体力学方面的研究. E-mail：xynuaa@yahoo.com.cn

法(GFM)在处理弱激波与界面作用的问题时取得了非常满意的效果,但是在处理强间断问题时遇到一定的困难。当诱导波从一种介质进入另一种介质时,在界面上会产生反射波,一部分诱导波传入另一种介质,形成穿透波;一部分被反射回来形成反射波。一般来说,穿透波为激波,而反射波的波系结构依赖于介质的特性、诱导波的强度以及入射角度等因素。由于初始条件 $U_{\mathrm{l}}=(\rho_{\mathrm{l}},u_{\mathrm{l}},p_{\mathrm{l}})$ 和 $U_{\mathrm{r}}=(\rho_{\mathrm{r}},u_{\mathrm{r}},p_{\mathrm{r}})$ 的不同,Riemann 问题可以分为多种情况,Riemann 问题可以分解为非线性左行波 λ_{l},称为 1-波;右行波 λ_{r},称为 3-波;中间的接触间断波 λ^{*},它是线性退化的。于是流场划分为左右常数状态 U_{l} 和 U_{r} 以及接触间断的左右状态 U_{l}^{*} 和 U_{r}^{*},其中 U_{l} 和 U_{l}^{*} 由 1-波相连接,U_{l}^{*} 和 U_{r}^{*} 由线性退化的 2-波相连接,U_{r}^{*} 和 U_{r} 由 3-波相连接。求解 Riemann 问题的关键是求接触间断的左右状态,即 $U_{\mathrm{l}}^{*}=(\rho_{\mathrm{l}}^{*},u_{\mathrm{l}}^{*},p_{\mathrm{l}}^{*})$ 和 $U_{\mathrm{r}}^{*}=(\rho_{\mathrm{r}}^{*},u_{\mathrm{r}}^{*},p_{\mathrm{r}}^{*})$。由于法向速度和压强通过 2-波是连续的,而密度一般是不连续的,所以界面处的流动状态满足 $u_{\mathrm{l}}=u_{\mathrm{l}}^{*}=u_{\mathrm{r}}^{*}$,$p_{\mathrm{l}}=p_{\mathrm{l}}^{*}=p_{\mathrm{r}}^{*}$,并记 $\rho_{\mathrm{lL}}=\rho_{\mathrm{l}}^{*}$,$\rho_{\mathrm{lR}}=\rho_{\mathrm{r}}^{*}$。通过求解 Riemann 问题得到界面处的流动状态 p_{I}、u_{I}、ρ_{IL} 和 ρ_{IR},并用界面处流体状态构造每种流体在界面另一侧的虚拟流体。Riemann 问题的求解方法有多种,在这里用双激波近似 Riemann 问题求解方法。

非线性特征形式的方程组写成如下形式

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial t}+u\dfrac{\partial S}{\partial x}=0\\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{1}{\rho c}\dfrac{\partial p}{\partial t}\right)+(u+c)\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{1}{\rho c}\dfrac{\partial p}{\partial x}\right)=0\\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{1}{\rho c}\dfrac{\partial p}{\partial t}\right)+(u-c)\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{1}{\rho c}\dfrac{\partial p}{\partial x}\right)=0\end{cases}\tag{1}$$

式中:S 表示熵,理想气体的热力学熵可以简单表示为 $S=p/\rho^{\gamma}$;c 表示声速。满足上述特征形式方程组的第一个方程的解是下面一对常微分方程的解,$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=u$,$\mathrm{d}S/\mathrm{d}t=0$,即沿着此积分曲线确定的流线熵为常数。同样对于方程组的第二和第三个方程,沿着 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=u+c$ 确定的积分曲线有

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+\rho c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=0\tag{2}$$

沿着 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=u-c$ 确定的积分曲线

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}-\rho c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=0\tag{3}$$

如果界面位于网格点 i 和 $i+1$ 之间,即满足 $\Phi_i\cdot\Phi_{i+1}<0$,对方程(2)和方程(3)进行如下形式的离散

$$\frac{p_{\mathrm{I}}-p_{i-1}^{n}}{w_{\mathrm{L}}^{n}}+(u_{\mathrm{I}}-u_{i-1}^{n})=0,\quad \text{其中 } (w_{\mathrm{L}}^{n})^{2}=\rho_{\mathrm{IL}}\rho_{i-1}\frac{p_{\mathrm{I}}-p_{i-1}^{n}}{\rho_{\mathrm{IL}}-\rho_{i-1}^{n}}\tag{4}$$

$$\frac{p_{\mathrm{I}}-p_{i+2}^{n}}{w_{\mathrm{R}}^{n}}-(u_{\mathrm{I}}-u_{i+2}^{n})=0,\quad \text{其中 } (w_{\mathrm{R}}^{n})^{2}=\rho_{\mathrm{IR}}\rho_{i+2}\frac{p_{\mathrm{I}}-p_{i+2}^{n}}{\rho_{\mathrm{IR}}-\rho_{i+2}^{n}}\tag{5}$$

为求(4)式和(5)式中 ρ_{IL} 和 ρ_{IR},根据波前和波后之间的 Hugoniot 关系式

$$e_2-e_1+0.5(p_2+p_1)(1/\rho_2-1/\rho_1)=0\tag{6}$$

其中下标“1”和“2”表示波前和波后状态。并利用状态方程

$$\rho e=f(\rho)p+g(\rho)\tag{7}$$

有

$$\rho_{\mathrm{IL}}=\frac{f(\rho_{\mathrm{IL}})p_{\mathrm{I}}+g(\rho_{\mathrm{IL}})+0.5(p_{\mathrm{I}}+p_{i-1}^{n})}{f(\rho_{i-1}^{n})p_{i-1}^{n}+g(\rho_{i-1}^{n})+0.5(p_{\mathrm{I}}+p_{i-1}^{n})}\rho_{i-1}^{n}\tag{8}$$

同样对于 ρ_{IR} 有

$$\rho_{\mathrm{IR}}=\frac{f(\rho_{\mathrm{IR}})p_{\mathrm{I}}+g(\rho_{\mathrm{IR}})+0.5(p_{\mathrm{I}}+p_{i+2}^{n})}{f(\rho_{i+2}^{n})p_{i+2}^{n}+g(\rho_{i+2}^{n})+0.5(p_{\mathrm{I}}+p_{i+2}^{n})}\rho_{i+2}^{n}\tag{9}$$

在(8)式和(9)式中,如果流体为水应该用 Tait 状态方程[4,9]进行描述,特别地,对于理想气体状态方程,$\rho e=p/(\gamma-1)$,(8)式和(9)式有如下更为简单的形式

$$\rho_{\mathrm{IL}}=\frac{(\gamma+1)p_{\mathrm{I}}+(\gamma-1)p_{i-1}^{n}}{(\gamma-1)p_{\mathrm{I}}+(\gamma+1)p_{i-1}^{n}}\rho_{i-1}^{n} \tag{10}$$

$$\rho_{\mathrm{IR}}=\frac{(\gamma+1)p_{\mathrm{I}}+(\gamma-1)p_{i+2}^{n}}{(\gamma-1)p_{\mathrm{I}}+(\gamma+1)p_{i+2}^{n}}\rho_{i+2}^{n} \tag{11}$$

在计算过程中,对于不同的流体,(10)式和(11)式中的 γ 应该取不同的值。通过迭代法求解方程(4)、方程(5)、方程(8)和方程(9),可以得到近似 Riemann 问题的解,从而得到界面处的状态 p_{I}、u_{I}、ρ_{IL} 和 ρ_{IR}。在界面附近的带状区域内,每一侧的带状区域宽度一般为 3～5 个网格,用界面处流体的状态定义两种流体的虚拟状态值。假设 $\Phi_i\cdot\Phi_{i+1}<0$,即界面位于网格点 i 和 $i+1$ 之间,并假设界面左侧为流体 1,界面右侧为流体 2。在界面右侧的网格点上定义流体 1 的压强和速度虚拟值为 p_{I} 和 u_{I}。选择熵 S_{IL} 作为等压装配变量,用来组装流体 1 在网格点 i 及界面右侧带状区域内网格点上的密度虚拟值。类似地可以构造流体 2 的虚拟状态。

2.2　多维问题

对于多维问题,为了确定界面接触间断两侧流体的状态,需要沿着界面的法方向求解一维 Riemann 问题,界面的法方向 $\boldsymbol{N}$ 由 Level-Set 函数给出,$\boldsymbol{N}=\nabla\Phi/|\nabla\Phi|$ 是单位法向量。沿着法方向定义每种流体的界面边界条件,在界面附近的带状区域内求解 Riemann 问题。第 n 时间层上 Riemann 问题的左右状态按如下的方法构造,首先求解外插方程

$$I_\tau\pm\boldsymbol{N}\cdot\nabla I=0 \tag{12}$$

在界面附近的带状区域内把两种流体的状态从界面的一侧外推到另一侧,其中 I 为密度、压强和法向速度等物理量,这样在界面附近带状区域内的网格点上存在真实值和外推值。在这些网格点的法方向上构造 Riemann 问题

$$U_{t=t^n}=\begin{cases}U^{\mathrm{real}}=(\rho^{\mathrm{l}},V_N^{\mathrm{l}},p^{\mathrm{l}})\\ U^{\mathrm{ext}}=(\rho^{\mathrm{r}},V_N^{\mathrm{r}},p^{\mathrm{r}})\end{cases} \tag{13}$$

式中:U^{real} 和 U^{ext} 分别表示网格点上的真实变量和外推变量。求解方程(13),得到带状区域内每个网格点上的 Riemann 解 $\rho_{\mathrm{L},(i,j)}^{\mathrm{I}}$、$\rho_{\mathrm{R},(i,j)}^{\mathrm{I}}$、$V_{\mathrm{N},(i,j)}^{\mathrm{I}}$、$p_{(i,j)}^{\mathrm{I}}$,并以此定义虚拟流体状态。虚拟流体速度值 $V_{(i,j)}^{\mathrm{G}}$ 可以表示为界面的法向速度和流体的切向速度之和,即

$$V^{\mathrm{G}}=V_N^{\mathrm{I}}N+[V-(V\cdot N)N] \tag{14}$$

由于在界面处流体的法向速度和压强是连续的,在求解流体 1 时,用流场中流体 1 的真实值和界面右侧网格点上的虚拟值 $S_{\mathrm{L},(i,j)}^{\mathrm{I}}$、$V_{(i,j)}^{\mathrm{G}}$ 和 $p_{(i,j)}^{\mathrm{I}}$ 进行求解;在求解流体 2 时,用流体 2 的真实值和界面左侧网格点上的虚拟值 $S_{\mathrm{R},(i,j)}^{\mathrm{I}}$、$V_{(i,j)}^{\mathrm{G}}$ 和 $p_{(i,j)}^{\mathrm{I}}$ 进行求解。其中 S 为等压装配变量,这里 S 表示热力学熵。同时推进 Level-Set 函数,并根据网格点上 LS 函数值的符号决定流场的真实状态。重复上面的过程直到需要的时间步为止。

3　γ-model 方法[8]

由于接触间断两侧的压强和法向速度是一致的,据此可以推导出关于比热比 γ 和材料常数 π 的界面捕捉方程,我们把守恒形式欧拉方程组和非守恒界面捕捉方程耦合求解,计算采用 WENO5 数值格式。满足的状态方程为 $p=(\gamma-1)\rho e-\gamma\pi$,这里 p 为压强;ρ 为密度;e 为单位质量的内能;π 为具有粘性张量量纲的材料常数;对于气体,γ 为比热比,对于液体和弹性密实介质,γ 为材料的拟合常数。在计算中,γ 和 π 在界面附近的区域表现为很窄的无振荡的过渡层。非守恒形式的界面捕捉方程写为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{1}{\gamma-1}\right)+u\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{\gamma-1}\right)+v\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{\gamma-1}\right)=0\\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\gamma\pi}{\gamma-1}\right)+u\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\gamma\pi}{\gamma-1}\right)+v\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\gamma\pi}{\gamma-1}\right)=0\end{cases} \tag{15}$$

4　数值方法

记网格单元 $I_i=[x_{i-1/2},x_{i+1/2}]$,$u_i^n=u(x_i,t^n)$ 表示第 n 时间层上网格点值,$\bar{u}_i^n$ 是第 n 时间层上网格

单元 I_i 上的平均值，$\bar{u}_i^n=\frac{1}{\Delta x_i}\int_{I_i}u(x,t^n)\mathrm{d}x$。定义 $\boldsymbol{A}^{\pm}=\boldsymbol{R}\cdot\mathrm{diag}(\lambda_1^{\pm},\cdots,\lambda_m^{\pm})\cdot\boldsymbol{L}$，$\boldsymbol{\lambda}_s^{+}=\max(\boldsymbol{\lambda}_s,0)$，$\boldsymbol{\lambda}_s^{-}=\min(\boldsymbol{\lambda}_s,0)$，$s=1,\cdots,m$。设右特征矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_1,\cdots,r_m)$，左特征矩阵 $\boldsymbol{L}=(l_1,\cdots,l_m)^T$。其中 $\boldsymbol{r}_s$ 为列向量，$\boldsymbol{l}_s$ 为行向量，$s=1,\cdots,m$。守恒形式的双曲守恒律方程组写成如下半离散形式

$$\frac{\mathrm{d}U_i(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{\Delta x}(F_{i+1/2}-F_{i-1/2}) \tag{16}$$

对数值通量 $F_{i+1/2}$ 进行局部线性化 Lax-Friedrichs(LF) 分解。在(16)式中，一阶迎风通量为 $F_{i+1/2}=\sum_{s=1}^{m}(f_{i+1/2}^{s;+}+f_{i+1/2}^{s;-})r_{i+1/2}^{s}$。如果 $\lambda_i^s\geqslant 0$、$\lambda_{i+1}^s\geqslant 0$，那么 $f_{i+1/2}^{s;+}=l_{i+1/2}^s\cdot F_i$，$f_{i+1/2}^{s;-}=0$；如果 $\lambda_i^s<0$、$\lambda_{i+1}^s<0$，那么 $f_{i+1/2}^{s;+}=0$，$f_{i+1/2}^{s;-}=l_{i+1/2}^s\cdot F_{i+1}$；其它情况，$f_{i+1/2}^{s;+}=l_{i+1/2}^s\cdot\frac{1}{2}(F_i+\bar{\lambda}_{i+1/2}^s U_i)$，$f_{i+1/2}^{s;-}=l_{i+1/2}^s\cdot\frac{1}{2}(F_{i+1}-\bar{\lambda}_{i+1/2}^s U_{i+1})$，其中 $\bar{\lambda}_{i+1/2}^s=\max(|\lambda_i^s|,|\lambda_{i+1/2}^s|,|\lambda_{i+1}^s|)$。

对于通量分裂的高分辨率 WENO 数值格式，按如下方式 WENO 插值重构网格单元边界点的左右状态值。第 l 个网格模板记为

$$S_{\mathrm{T}_{i;l}}(i)=\{I_{i+l-k+1},I_{i+l-k+2},\cdots,I_{i+l}\},\ l=0,1,\cdots,k-1$$

共有 k 个子网格模板，在每个子网格模板上构造 k 阶 Lagrange 插值多项式，并对这 k 个插值多项式按照适当的权系数进行加权组合。在网格单元 I_i 边界 $i+1/2$ 上，WENO 插值重构算子用符号 $\mathrm{Re}c$ 表示

$$\mathrm{var}_{i+1/2}^{+}=\mathrm{Re}c(\mathrm{var}_{i-k+1},\cdots,\mathrm{var}_{i+k-1}),\ \mathrm{var}_{i+1/2}^{-}=\mathrm{Re}c(\mathrm{var}_{i-k+2},\cdots,\mathrm{var}_{i+k})$$

比如 $k=3$ 时，WENO5 重构为

$$\mathrm{var}_{i+1/2}^{+}=\mathrm{Re}c_{\mathrm{WENO5}}(\mathrm{var}_{i-2},\cdots,\mathrm{var}_{i+2}),\ \mathrm{var}_{i+1/2}^{-}=\mathrm{Re}c_{\mathrm{WENO5}}(\mathrm{var}_{i-1},\cdots,\mathrm{var}_{i+3})$$

其中 var 表示需要重构的变量，可以是密度、压强、速度等物理量，本文中对数值通量进行插值重构。设 $f_i^{s;\pm}=\boldsymbol{l}^{s;\pm}\cdot\boldsymbol{F}_i$，$\omega_i^{s;\pm}=\boldsymbol{l}^{s;\pm}\cdot\boldsymbol{U}_i$，如果 $\lambda_i^s>0$、$\lambda_{i+1}^s>0$，那么 $\hat{f}_{i+1/2}^{s;+}=\mathrm{Re}c(f_{i-k+1}^{s;+},\cdots,f_{i+k-1}^{s;+})$，$\hat{f}_{i+1/2}^{s;-}=0$；如果 $\lambda_i^s<0$、$\lambda_{i+1}^s<0$，那么 $\hat{f}_{i+1/2}^{s;+}=0$，$\hat{f}_{i+1/2}^{s;-}=\mathrm{Re}c(f_{i-k+2}^{s;-},\cdots,f_{i+k}^{s;-})$；其它情况，令 $\alpha_s=\max(|\lambda_i^s|,|\lambda_{i+1}^s|)$，有

$$\hat{f}_{i+1/2}^{s;+}=\mathrm{Re}c\left[\frac{1}{2}(f_{i-k+1}^{s;+}+\alpha_s\omega_{i-k+1}^{s;+}),\cdots,\frac{1}{2}(f_{i+k-1}^{s;+}+\alpha_s\omega_{i+k-1}^{s;+})\right]$$

$$\hat{f}_{i+1/2}^{s;-}=\mathrm{Re}c\left[\frac{1}{2}(f_{i-k+2}^{s;-}-\alpha_s\omega_{i-k+2}^{s;-}),\cdots,\frac{1}{2}(f_{i+k}^{s;-}-\alpha_s\omega_{i+k}^{s;-})\right]$$

所以(16)式中的数值通量为

$$\boldsymbol{F}_{i+1/2}=\sum_{s=1}^{m}\left(\hat{f}_{i+1/2}^{s;+}\boldsymbol{r}_{i+1/2}^{s;+}+\hat{f}_{i+1/2}^{s;-}\boldsymbol{r}_{i+1/2}^{s;-}\right) \tag{17}$$

式中：$\boldsymbol{F}_{i+1/2}$、$\boldsymbol{r}_{i+1/2}^{s;\pm}$为列向量，$\hat{f}_{i+1/2}^{s;\pm}$为第 s 个分量。$\boldsymbol{r}_{i+1/2}^{s;\pm}$用 WENO 插值重构得到。

多重加权基本无振荡(MWENO)格式的构造通过引进各个 k 阶网格模板和高于 k 阶的网格模板，并在相应的网格模板上构造高阶插值多项式，并按照适当的权系数对插值多项式进行一次凸组合，从而得到网格单元边界上的插值多项式。由于 MWENO 格式利用了更高阶网格模板上插值多项式的信息，理论上应该比 WENO 格式有更强的捕捉间断的能力。下面给出在网格模板 $S_{\mathrm{T}}=\{i-2,i-1,i+1,i+2\}$上 MWENO5 重构 $p_{i-1/2}^{+}$的过程。

$$p_{i-1/2}^{(0),+}=-\frac{1}{12}u_{i-2}+\frac{7}{12}u_{i-1}+\frac{7}{12}u_i-\frac{1}{12}u_{i+1},\quad p_{i-1/2}^{(1),+}=\frac{1}{6}u_{i-2}+\frac{5}{6}u_{i-1}+\frac{1}{3}u_i$$

$$p_{i-1/2}^{(2),+}=\frac{1}{3}u_{i-1}+\frac{5}{6}u_i-\frac{1}{6}u_{i+1},\quad p_{i-1/2}^{(3),+}=\frac{11}{6}u_i-\frac{7}{6}u_{i+1}+\frac{1}{3}u_{i+2}$$

$$p_{i-1/2}^{(4),+}=\frac{1}{4}u_{i-1}+\frac{13}{12}u_i-\frac{5}{12}u_{i+1}+\frac{1}{12}u_{i+2}$$

$$s_0=\frac{3}{10},\ s_1=\frac{3}{20},\ s_2=\frac{3}{10},\ s_3=\frac{1}{20},\ s_4=\frac{1}{5},\ w_l=\frac{s_l}{(\varepsilon+IS_l)^2},\ l=0,1,2,3,4$$

IS_l 为插值多项式在 l 个网格模板上的光滑因子。所以 $p_{i-1/2}^{+}=\sum_{l=0}^{k-1}w_l p_i^{(l),+}(x)$。$p_{i+1/2}^{-}$ 的重构过程可以

类似地得到。

5　数值算例

下面对一维和二维界面不稳定性问题进行数值试验,数值计算采用 WENO5 和 MWENO5 格式,Fedkiw-GFM 表示传统的虚拟流动方法[4],Riemann-GFM 表示用 Riemann 问题的解定义虚拟流体。

5.1　一维气-气激波管问题

当 $x<0.5$ 时,$(\rho,u,p)=(3.0,0.0,2.0\times10^5)$;当 $x\geqslant0.5$ 时,$(\rho,u,p)=(1.583\,17,0,980\,66.5)$,用 400 网格点计算到 $t=0.001$ 时的密度分布见图 1。

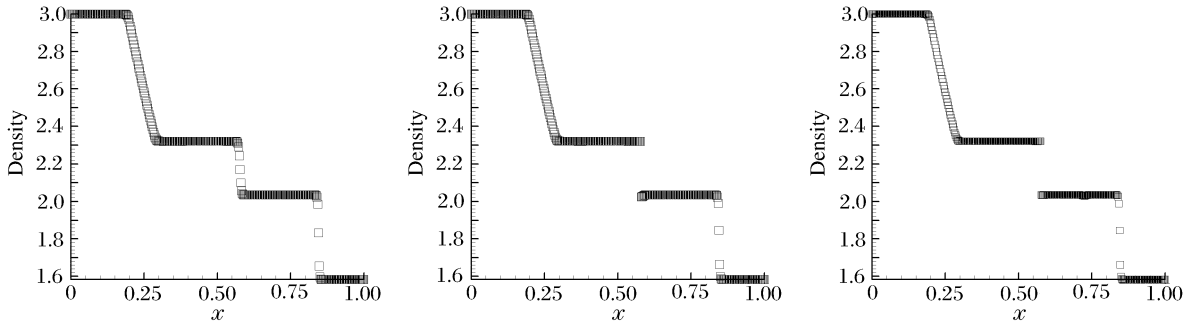


图 1　$t=0.001$,密度,400 网格点

Fig. 1　$t=0.001$, density, 400 points

5.2　一维激波管问题

设初始间断位于 $x=0.5$ 处,左右状态分别为$(\rho_l,u_l,p_l)=(2.0,0.0,9.8\times10^5,1.4)$,$(\rho_r,u_r,p_r)=(1.0,0.0,2.45\times10^5,1.67)$,计算结果见图 2。

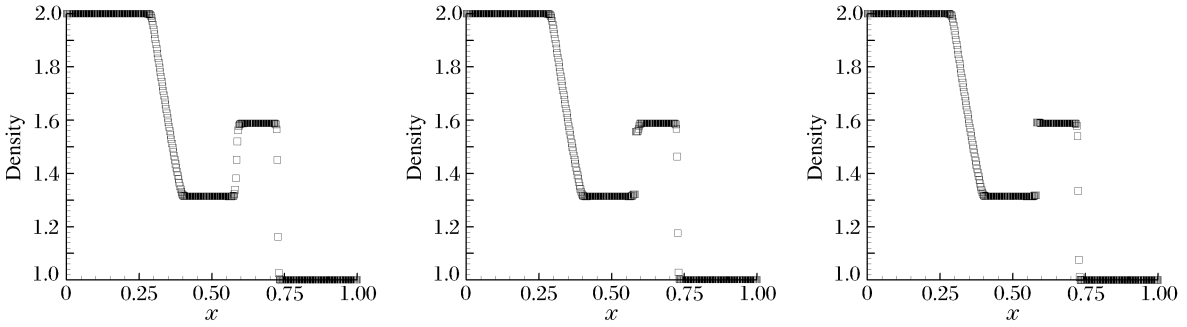


图 2　$t=0.000\,25$,密度,400 网格点

Fig. 2　$t=0.000\,25$, density, 400 points

5.3　两种气体相互作用

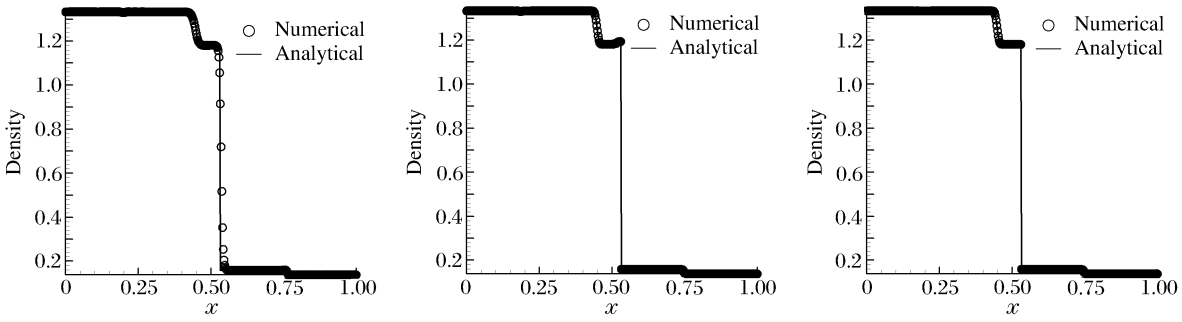
初始时刻间断位于 0.5 处,计算区域为[0,1],初始状态分别为$(\rho_L,u_L,p_L,\gamma_L,\pi_L)=(1.333\,3,0.353\,5\sqrt{10^5},1.5\times10^5,1.4,0)$,$(\rho_M,u_M,p_M,\gamma_M,\pi_M)=(1,0,10^5,1.4,0)$,$(\rho_R,u_R,p_R,\gamma_R,\pi_R)=(0.137\,9,0,10^5,1.67,0)$。网格数 400,计算到 $t=0.001\,2$ 时的密度分布如图 3 所示。

5.4　一维气液界面不稳定性问题

马赫数为 1.95 的激波在 $x=0.6$ 处由右向左运动,初始界面位置位于 $x=0.5$ 处,波前和波后初始状态分别为$(\rho,u,p,\gamma,\pi)=(5,0,1,4,1)$和$(\rho,u,p,\gamma,\pi)=(7.093,0.728\,8,10,4,1)$,左边静止的气体状态为$(\rho,u,p,\gamma,\pi)=(1,0,1,1.4,0)$,计算区域取为[0,1],数值模拟结果见图 4。

以上 4 个一维问题的计算结果表明,γ-model 方法计算的密度和 γ 值在介质界面处出现了数值混

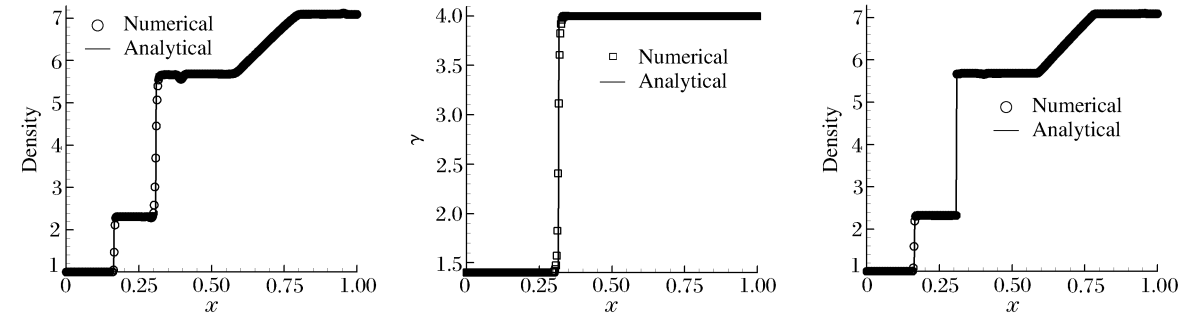
合的情况。GFM 计算的密度在被界面附近两侧的区域中基本上没有过渡点，Riemann-GFM 计算结果显得更为理想，这是由于本工作选用正确的界面流动状态构造虚拟流体，使得该方法更加稳健。



γ-model，WENO5　　Fedkiw-GFM，MWENO5　　Riemann-GFM，MWENO5

图 3　$t=0.0012$，密度，400 网格点

Fig. 3　$t=0.0012$，density，400 points



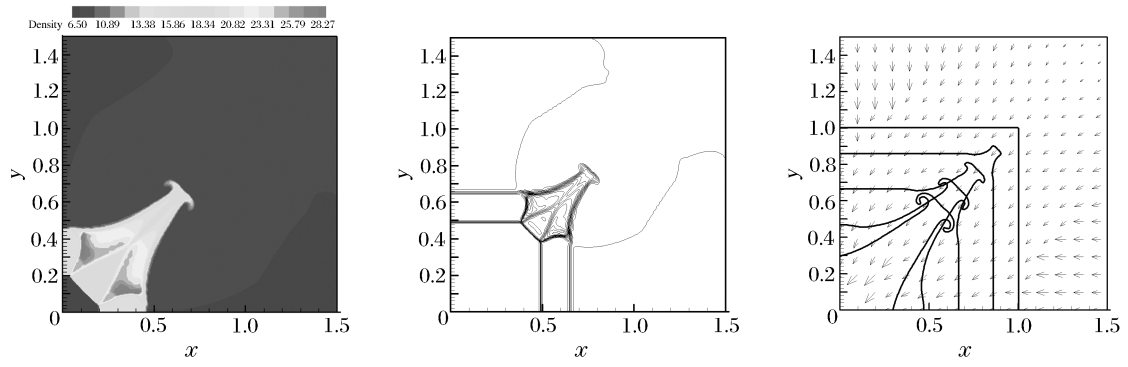
Density，γ-model，WENO5　　Distribution of γ，γ-model，WENO5　　Density，Riemann-GFM，MWENO5

图 4　$t=0.2$，400 网格点

Fig. 4　$t=0.2$，400 points

5.5　激波诱导的二维界面不稳定性问题

计算区域为[0，1.5]×[0，1.5]，从里向外各层流体的状态分别记为 1、2、3。$(\rho_1,u_1,v_1,p_1,\gamma_1)=(5,0,0,1,1.67)$，$(\rho_2,u_2,v_2,p_2,\gamma_2)=(1,0,0,1,1.4)$，$(\rho_3,u_3,v_3,p_3,\gamma_3)=(10,0,0,33.59,1.4)$，其中最外层采用高压气体。数值计算采用 200×200 网格，用 Level-Set 函数捕捉内层交界面，计算结果见图 5。



$t=0.48$，density　　$t=0.33$，density　　Interface locations at different times and velocity vectorgraph at $t=0.48$

图 5　密度和界面

Fig. 5　Density and interface profile

5.6　Richtmyer-Meshkov 界面不稳定性问题

假设马赫数为 1.95 的激波与受扰动的气液界面相互作用,交界面为一个有扰动的余弦界面,波前和波后的液体状态分别为$(\rho,u,v,p,\gamma,\pi)=(5,0,0,1,4,1)$,$(\rho,u,v,p,\gamma,\pi)=(7.093,-0.7288,0,10,4,1)$,左侧静止的气体状态为$(\rho,u,v,p,\gamma,\pi)=(1,0,0,1,1.4,0)$。$t=2.0$ 时的密度和不同时刻界面位置见图 6。

把本算例的模拟结果与文献[8]中用 γ-model 方法计算的结果进行比较可见,界面处的密度表现为一个很窄的无振荡过渡层,界面的位置和形状在运动过程中具有较高的分辨率。

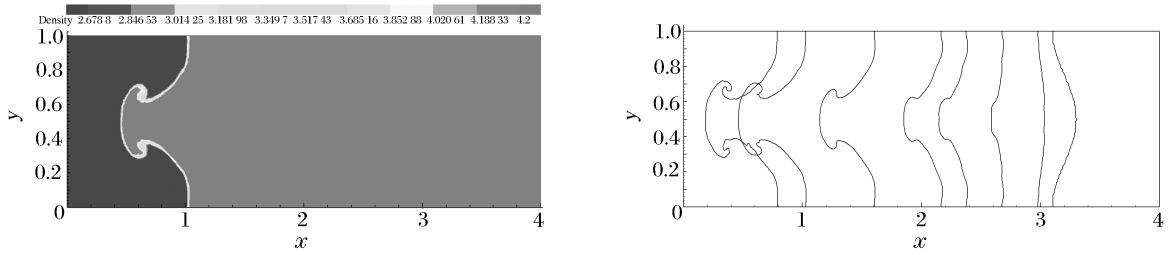


图 6　密度和界面

Fig. 6　Density and interface profile

6　结 束 语

针对可压缩多介质流体的数值计算,根据接触间断处速度和压强一致的特点,求解耦合形式的流体力学方程组。由于该方法计算的 γ 和 π 在界面附近表现为很窄的过渡层,可能产生与实际物理现象不符的情况,比如气液问题的计算,会使液体的性质在界面处变化剧烈。本工作还研究了另一种界面处理方法,通过求解 Riemann 问题获得界面的流动状态,并据此构造相应的虚拟流体。对于多维问题,首先求解定常外插的偏微分方程,在界面附近的带状区域内把界面一侧的流体状态外推到另一侧。在法方向上利用真实值和外推值构造 Riemann 问题,并通过 Riemann 问题解定义界面边界条件。这种方法程序实现相对简单,而且比较稳健。最后采用 WENO 和 MWENO 数值计算格式对一维和二维界面不稳定性问题进行数值模拟,表明了本方法的有效性。

References:

[1] Shu C W. Essentially Non-Oscillatory and Weighted Essentially Non-oscillatory Schemes for Hyperbolic Conservation Laws [R]. ICASE Report No. 97-65, NASA/CR-97-206253, 1997.

[2] Balsara D, Shu C W. Monotonicity Preserving Weighted Essentially Non-oscillatory Schemes with Increasingly High Order of Accuracy [J]. J Comput Phys, 2000, 160: 405-452.

[3] Karni S. Multicomponent Flow Calculations by a Consistent Primitive Algorithm [J]. J Comput Phys, 1994, 112: 31-43.

[4] Fedkiw R, AslamT, Merriman B, et al. A Non-oscillatory Eulerian Approach to Interfaces in Multimaterial Flows (the Ghost Fluid Method) [J]. J Comput Phys, 1999, 152: 457-492.

[5] Fedkiw R. Coupling an Eulerian Fluid Calculation to a Lagrangian Solid Calculation with the Ghost Fluid Method [J]. J Compt Phys, 2002, 175: 200-224.

[6] Caiden R, Fedkiw R, Anderson C. A Numerical Method for Two-Phase Flow Consisting of Separate Compressible and Incompressible Regions [J]. J Comput Phys, 2001, 166: 1-27.

[7] Fedkiw R, AslamT, Merriman B, et al. The Ghost Fluid Method for Deflagration and Detonation Discontinuities [J]. J Comput Phys, 1999, 154: 393-427.

[8] Shyue K M. An Efficient Shock-Capturing Algorithm for Compressible Multicomponent Problems [J]. J Comput Phys, 1998, 142: 208-242.

[9] Liu T G, Khoo B C, Yeo K S. Ghost Fluid Method for Strong Shock Impacting on Material Interface [J]. J Comput Phys, 2003, 190: 651-681.

[10] Marquina A, Mulet P. A Flux-Split Algorithm Applied to Conservative Models for Multicomponent Compressible Flows [J]. J Comput Phys, 2003, 185: 120-138.

Interface Treatment Method for Multi-Component Fluids Numerical Simulation

ZHANG Xue-Ying[1], ZHAO Ning[2], WANG Chun-Wu[3]

(1. *College of Science, Hohai University, Nanjing* 210098, *China*;
2. *College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing* 210016, *China*;
3. *College of Science, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing* 210016, *China*)

Abstract: Two interface treatment methods are applied to simulate multi-component flows. A simple and robust algorithm is provided for solving Riemann problem in 2-D. At each node of a narrow strip of the interface, Riemann problems are solved using iterative numerical method. Predicted isobaric values and ghost fluid states are provided. Comparing original GFM, this method is robust and effective. Conservative Euler equations and interface capturing equations are solved respectively. Level-set equation is applied to capture interface. Numerical computations are performed with MWENO scheme and compared with the results by γ-model method, original GFM and modified GFM.

Key words: multi-component fluid interface; Riemann problem; ghost fluid method; γ-model method; MWENO scheme