文章编号：1000-5773(2006)01-0093-04

基于黎曼解的粒子间接触算法在 SPH 中的应用*

徐志宏，汤文辉，张若棋

（国防科学技术大学理学院技术物理研究所，湖南长沙 410073）

摘要：采用光滑粒子流体动力学(SPH)方法模拟大变形问题具有明显的优点，但传统的 SPH 方法在模拟冲击波与接触界面的作用时，往往会出现压力的反常跳动。采用黎曼解描述粒子间相互作用的接触算法对传统 SPH 方法进行修正，计算了激波管和飞片碰撞(包含接触界面)问题中波的传播，并将计算结果与解析解作比较。结果表明，与传统的光滑粒子法相比，该改进的光滑粒子法无需引入人工粘性项和人工热流项，程序结构简洁，且能较好地处理接触界面问题，从而能有效提高计算精度。

关键词：黎曼解；接触算法；可变光滑长度

中图分类号：O347；O242 **文献标识码**：A

1 引 言

光滑粒子流体动力学(Smoothed Particle Hydrodynamics，简称 SPH)方法是近 20 多年来发展起来的一种纯 Lagrange 粒子方法，材料用自由移动的质点而非固定的空间网格单元近似。该方法于 1977 年提出，最初应用于天体物理领域。1990 年，Libersky[1] 在 Monaghon 等人[2-3] 工作的基础上，将材料强度效应引入 SPH 方法，成功地开展了高速碰撞数值模拟的计算。之后，Johnson[4] 等又将 SPH 方法与有限元方法相结合，在侵彻贯穿方面的数值计算也取得了有意义的结果。近年来，SPH 方法在界面流、多相流、反应流、冲击和断裂等领域得到了广泛的应用。但是最早建立的 SPH 方法在处理高速碰撞问题时存在严重的缺陷，这主要表现在界面计算的精度难以保证。为此，Johnson[5] 和 Campbell[6] 先后进行了改进研究，取得了一定的效果。2000 年，Parshikov[7] 基于黎曼解的思想，提出用黎曼解来描述粒子之间的相互作用，有效地缓解了各动力学量在界面的异常跳跃，并且该算法无需引入人工粘性项、人工热流项及归一化核函数，程序结构简洁。

我们将改进后的 SPH 方法应用于激波管问题和理想弹塑性介质中波的传播等问题，取得了与解析解符合很好的结果。

2 修正的 SPH 方程

SPH 方法的核心是插值计算。在 SPH 中任意宏观变量(如密度、压力、温度等) $f(\boldsymbol{r})$ 在空间某一点 $\boldsymbol{r}$ 上的核估计可以通过函数 $f(\boldsymbol{r})$ 在域 Ω 中的积分获得

$$\langle f(\boldsymbol{r})\rangle = \int_{\Omega} f(\boldsymbol{r}')W(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',h)\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{1}$$

式中：$W(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',h)$ 称为核函数，它应该满足

$$\int_{\Omega} W(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',h)\mathrm{d}\boldsymbol{r}' = 1 \tag{2}$$

* **收稿日期**：2004-11-29；**修回日期**：2005-05-09

作者简介：徐志宏(1977—)，女，博士研究生，主要研究方向为冲击动力学的数值模拟.
E-mail：xuzhihong_mm@163.com

$$\lim_{h\to 0} W(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',h)=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{3}$$

设函数 $f(\boldsymbol{r})$ 在粒子 j 上的值为 f_j,(1)式可以写成粒子求和形式

$$f_i(r_i)=\sum_{j=1}^{N} m_j f_j W_{ij}/\rho_j \tag{4}$$

式中:N 为计算区域内的粒子总数,m_j、f_j、ρ_j 分别代表位于空间点 $\boldsymbol{r}_j$ 处粒子 j 的质量、待求参数和密度,W_{ij} 表示离散核函数,$W_{ij}=W(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j,h)$。

设基本粒子 i 与每个位于 $2h$(h 是光滑长度)范围内的粒子 j 交换动量和能量,这种相互作用存在于粒子间的接触表面上。定义 A_{ij} 为粒子 i、j 接触点,则点 A_{ij} 的位置矢量 $\boldsymbol{r}_{ij}$ 由 $|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_{ij}|/|\boldsymbol{r}_{ij}-\boldsymbol{r}_j|=D_i/D_j$ 确定。A_{ij} 处粒子间的相互作用与连续介质中的接触间断的处理相似。所以,在 A_{ij} 处的法向速度 U_{ij}^{*R} 和压力 p_{ij}^{*} 可以用黎曼问题解的声速近似来表示。根据这种近似,设任意一个接触间断面左右两边的各参数为 U_i^R、ρ_i、p_i 及 U_j^R、ρ_j、p_j,该间断从初始间断面出发,各自以声速 C_i、C_j 向左、向右传播。在波后区域中,速度和压力相等。由质量和动量守恒方程可以得到

$$U_{ij}^{*R}=\frac{U_j^R\rho_jC_j+U_i^R\rho_iC_i-p_j+p_i}{\rho_jC_j+\rho_iC_i} \tag{5}$$

$$p_{ij}^{*}=\frac{p_i\rho_jC_j+p_j\rho_iC_i-\rho_iC_i\rho_jC_j(U_j^R-U_i^R)}{\rho_jC_j+\rho_iC_i} \tag{6}$$

式中:$U^R=\boldsymbol{U}\cdot\frac{\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i}{|\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i|}$,$C$ 是流体声速。

再将下面两个近似

$$U_i^R+U_j^R\to 2U_{ij}^{*R} \tag{7}$$

$$p_i+p_j\to 2p_{ij}^{*} \tag{8}$$

代入 SPH 方程,得到修正后的 SPH 方程

$$\frac{\mathrm{d}\rho_i}{\mathrm{d}t}=-2\sum_j\frac{m_j\rho_i}{\rho_j h}(U_i^R-U_{ij}^{*R})W'_{ij} \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}_i}{\mathrm{d}t}=2\sum_j\frac{m_jp_{ij}^{*}}{\rho_j\rho_i h}W'_{ij}\frac{\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i}{|\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i|} \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}e_i}{\mathrm{d}t}=-2\sum_j\frac{m_jp_{ij}^{*}}{\rho_j\rho_i h}(U_i^R-U_{ij}^{*R})W'_{ij} \tag{11}$$

(11)式中:e_i 为比内能。文中所采用的光滑核为 B 样条函数

$$W_{ij}=\begin{cases}(1-1.5\varphi^2+0.75\varphi^3)/\beta & 0\leqslant\varphi<1\\ 0.25(2-\varphi)^3/\beta & 1\leqslant\varphi<2\\ 0 & 2\leqslant\varphi\end{cases}$$

式中:$\varphi=|r_i-r_j|/h$,对一维问题,$\beta=1.5h$;二维问题,$\beta=0.7\pi h^2$;三维问题,$\beta=\pi h^3$。其中光滑长度 h 是可变的,由基本粒子 i 及其近邻粒子 j 的直径决定

$$h_{ij}=0.5(D_i+D_j) \tag{12}$$

由于粒子间距不断发生变化,所以为了高效地搜索近邻粒子,需要有合适的搜索范围,用 H_i 表示。它也是可变的,表示为

$$\mathrm{d}H_i/\mathrm{d}t=(H_i/d)\nabla\cdot\boldsymbol{U}_i \tag{13}$$

式中:d 表示问题的维数。

3 计算实例

3.1 激波管问题

考虑一维激波管问题,设研究对象是完全气体,其初始参数分布如下:

$$-0.6\ \mathrm{cm}\leqslant r\leqslant 0,p=3\ \mathrm{GPa},\rho=1.5\ \mathrm{g/cm^3},\gamma=3;$$

$$0\leqslant r\leqslant 0.6\ \mathrm{cm},p=1\ \mathrm{GPa},\rho=1.2\ \mathrm{g/cm^3},\gamma=3。$$

其 γ 为气体绝热指数。$t=4\ \mu s$ 时的计算结果如图 1 所示,其中实线代表解析解,空心圆代表数值解。

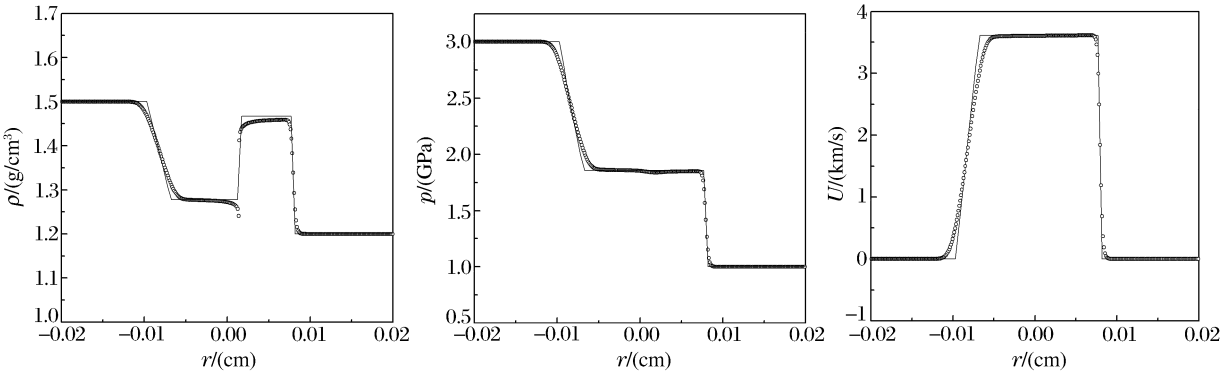


图 1　用修正的 SPH 方法计算激波管问题得到的流体参数分布曲线

Fig. 1　Flow parameter distribution in shock tube problem computed by modified SPH method

3.2　同种材料的飞片撞靶问题

设飞片和靶板均为铝,厚度均为 0.4 cm,飞片速度为 1 km/s。$t=0.3\ \mu s$ 时刻的计算结果如图 2 所示。其中实线代表解析解,空心圆代表数值解。

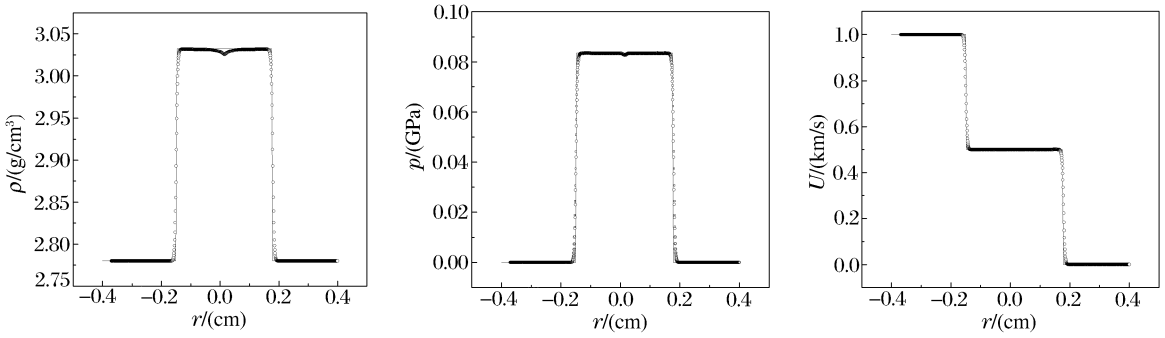


图 2　用修正的 SPH 方法计算两块铝板碰撞时得到的参数分布曲线

Fig. 2　Parameter distribution during aluminum plate impact on aluminum plate computed by modified SPH method

3.3　不同材料的飞片撞靶问题

设飞片为钢,靶板为铝,厚度均为 0.4 cm,飞片速度为 500 m/s。$t=0.3\ \mu s$ 时刻的计算结果如图 3 所示。

在图 3 所示的压力图像中,上三角连线表示计算过程中搜索近邻粒子的范围 H_i 取常数时的结果,圆点连线表示的则是搜索范围 H_i 按(13)式变化时得到的结果。通过与解析解的对照可知,搜索范围可变时的计算结果明显优于搜索范围不变时的结果。

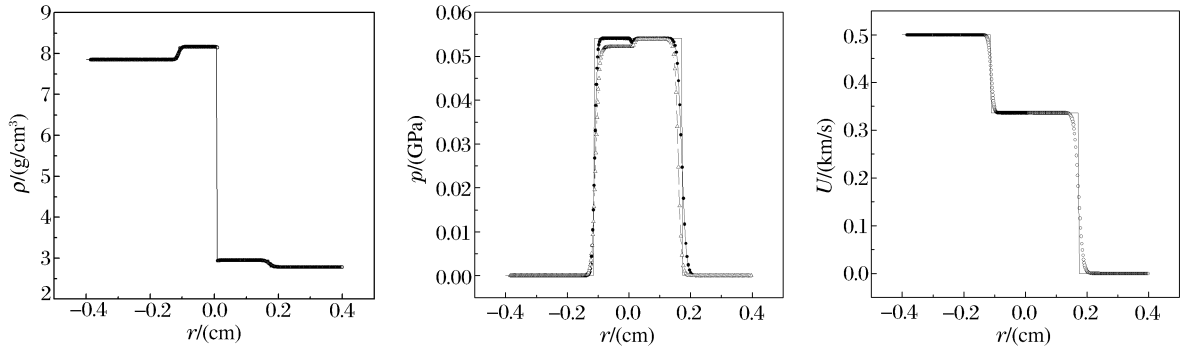


图 3　用修正的 SPH 方法计算钢板碰撞铝板时得到的参数分布曲线

Fig. 3　Parameter distribution during steel plate impact on aluminum plate computed by modified SPH method

4 结 束 语

从给出的以上计算结果可以看出,基于黎曼解的思想提出的粒子间接触算法,在计算激波管问题以及理想弹塑性介质中波的传播问题时,取得了与解析解符合很好的结果,并且较传统的引入人工粘性项和人工热流项的方法,更有效地降低了界面处的震荡。此外,在搜索近邻粒子时,采用可变的搜索范围也有效地提高了计算精度。

References:

[1] Libersky L D, Petschek A G. Smoothed Particle Hydrodynamics with Strength of Materials [A]. //Trease H, Fritts J, Crowley W. Lecture Notes in Physics [C]. New York: Springer, 1991: 248-257.

[2] Monaghan J J. Shock Simulation by the Particle Method SPH [J]. J Comput Phys, 1983, 52: 374-389.

[3] Noh W F. Errors for Calculations of Strong Shocks Using an Artificial Viscosity and an Artificial Heat Flux [J]. J Comput Phys, 1987, 72: 78-120.

[4] Johnson G R, Petersen E H, Stryk R A. Incorportation of an SPH Option in the EPIC Code for a Wide Range of High Velocity Impact Computations [J]. Int J Impact Eng, 1993, 14: 385-394.

[5] Johnson G R, Beissel S R. Normalized Smoothed Functions for SPH Impact Computations [J]. Int J Numer Meth Eng, 1996, 39: 2725-2741.

[6] Campbell J, Vignjevic R, Libersky L D. A Contact Algorithm for Smoothed Particle Hydrodynamics [J]. Comput Meth Appl Mech Eng, 2000, 184: 49-65.

[7] Parshikov A N, Medin S A, Loukashenko I I, et al. Improvements in SPH Method by Means of Interparticle Contact Algorithm and Analysis of Perforation Tests at Moderate Projectile Velocities [J]. Int J Impact Eng, 2000, 24: 779-796.

Application of Interparticle Contact Algorithm Based on Riemann Solution in SPH

XU Zhi-Hong, TANG Wen-Hui, ZHANG Ruo-Qi

(*Institute of Technical physics, College of Science, National University of Defense Technology, Changsha* 410073, *China*)

Abstract: Smooth particle hydrodynamics (SPH) is a new effective numerical method for modeling problems involving large deformation. However when the SPH method is used to simulate shock waves come across contact interface, tensile instability occurs at the contact interface. In this paper we use contact algorithm which describes contact interaction between SPH particles by means of Riemann solution to simulate the propagation of wave in shock tube and projectile impact problems, and compare the numerical results with the analytical solutions. From the compared results, we can conclude that the modified SPH method do well in removing instabilities and improving accuracy of calculation. And due to the introduce of Riemann solution, there is no need to use artificial viscosity and heat flux, which simplifies the program code.

Key words: Riemann solution; contact algorithm; variable smoothing distance