第 17 卷 第 4 期
2003 年 12 月

高 压 物 理 学 报
CHINESE JOURNAL OF HIGH PRESSURE PHYSICS

Vol. 17, No. 4
Dec., 2003

文章编号：1000-5773(2003)04-0268-07

一种捕捉可压缩流体多重交汇界面的改进型 LS 方法*

柏劲松，陈森华

（中国工程物理研究院流体物理研究所，四川绵阳 621900）

摘要：在普通 Level Set(LS)方法基础上，给出了一种捕捉多重交汇界面的改进型 LS 方法，该方法能够大大减小多重交汇界面之间因光滑而产生的空穴区域，而不影响多重交汇以外区域的界面位置。同时对改进算法进行了测试，并与可压缩流体耦合，给出了多介质流体多重交汇界面的计算结果。

关键词：LS 方法；可压缩多介质流；Euler 界面跟踪

中图分类号：O35　　**文献标识码**：A

1 引 言

LS(Level Set)方法是一种描述物质界面或者相界面运动的有效方法，能描述结晶面，燃烧阵面，非理想爆轰波阵面和不同流体界面等多种具有拓扑性质变化的界面运动[1,2]，它是基于 Euler 坐标系的计算方法[3]，通常的做法是将 LS 函数 Ψ 定义为距离函数，界面定义为 $\Psi=0$ 的位置，Ψ 满足 $|\nabla\Psi|=1$ 性质。由于流体质点上的 LS 函数不是实际的物理量，它仅仅需要满足一个额外的 LS 方程，因此 LS 函数的加入不会对流体力学方程组产生影响。

由于 LS 函数是连续性函数，对于光滑的物质界面，应用高阶格式和重新初始化方法可以较好地捕捉到界面位置[4,5]，但是对于多重交汇界面的捕捉，如果不对 LS 方法进行改进，普通的 LS 函数经光滑化后得到的界面误差会很大，在多重交汇处界面之间形成较大的空穴(即 LS 方法对界面的摸平作用)。要消除 LS 方法对多重交汇界面的摸平作用是很困难的，但是通过对 LS 方法改进，可以大大地减小这种摸平作用，从而捕捉到比较理想的多重交汇界面位置。我们在普通的 LS 方法基础上，给出一种捕捉可压缩流体多重交汇界面的改进型 LS 方法，基本思想是在每一个时间循环步，保持 LS 函数始终为距离函数的基础上对 LS 函数进行修正，在多重交汇界面以外的区域，修正不改变界面位置，而只是减小多重交汇界面之间因摸平产生的空穴区域。其中，LS 方程组和流体动力学方程组均运用非维数分裂的二阶精度有限体积差分格式计算，界面的重新初始化采用五阶 WENO 格式计算。文中对改进算法进行了对流计算测试，并对可压缩流体的多重交汇界面捕捉结果进行了比较。

2 捕捉多重交汇界面的改进型 LS 方法

2.1 普通 LS 计算方法

采用普通的 LS 方法捕捉多个界面 $\Sigma^{(m)}$ ($m=1\sim N$ 为介质种类)运动时，需要求解由 LS 函数 $\Psi^{(m)}$ 定义的 N 个方程

* **收稿日期**：2002-09-27；**修回日期**：2002-11-07

作者简介：柏劲松(1968—)，男，博士，副研究员，主要研究方向：计算爆炸力学和计算流体力学方面的理论和数值模拟.

$$\frac{\partial \Psi^{(m)}}{\partial t}+\boldsymbol{D}\cdot\nabla\Psi^{(m)}=0 \tag{1}$$

$\boldsymbol{D}=(u,v)$,$\Psi^{(m)}$ 的初值为距离函数,其定义如下

$$\Psi^{(m)}(x,y,0)=\begin{cases} d_{\min}^{(m)} & (x,y)\in\Omega^{(m)} \\ 0 & (x,y)\in\Sigma^{(m)} \\ -d_{\min}^{(m)} & (x,y)\notin\Omega^{(m)} \end{cases} \tag{2}$$

式中:$\Omega^{(m)}$ 是 $\Sigma^{(m)}$ 包围的区域(不包含 $\Sigma^{(m)}$ 本身),$d_{\min}^{(m)}$ 是(x,y)到 $\Sigma^{(m)}$ 的最小距离。当 $t>0$ 时,界面 $\Psi^{(m)}=0$ 沿其法线方向运动,但是由于方程(1)不可避免的差分近似误差,计算得到的 $\Psi^{(m)}$ 并不保持距离函数的性质,因此需要求解一个校正方程,使得 $\Psi^{(m)}$ 始终保持距离函数性质,在 t_0 时刻,校正值 $\varphi^{(m)}$ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi^{(m)}(x,y,\tau)}{\partial\tau}+S(\varphi_0^{(m)})(|\nabla\varphi^{(m)}|-1)=0 \\ \varphi^{(m)}(x,y,0)=\varphi_0^{(m)}(x,y)=\Psi^{(m)}(x,y,t_0) \end{cases} \tag{3}$$

式中 $S(\varphi_0^{(m)})$表示为

$$S(\varphi_0^{(m)})=\varphi^{(m)}/\sqrt{(\varphi^{(m)})^2+\theta^2} \tag{4}$$

在二维时取 $\theta=\min(\Delta x,\Delta y)$。(3)式中 τ 为演化变量,当 τ 趋于无穷时,$\varphi^{(m)}$ 相对于初值 $\Psi^{(m)}(x,t_0)$中 Level Set 函数值为零的面保持距离函数性质,即$|\nabla\varphi^{(m)}|=1$。

应用上述方法计算多个无多重交汇界面运动时,可以得到比较理想的结果[4],但是对于如图 1 的多重交汇界面,方程(1)～(4)给出的计算结果如图 2 所示。显然图 2 中三条光滑曲线之间的空穴就是由于 LS 函数光滑摸平作用所产生的,因此改进型 LS 方法的主要目的就是设法减小图 2 中的空穴区域,从而比较理想地描述多重交汇界面的形状。

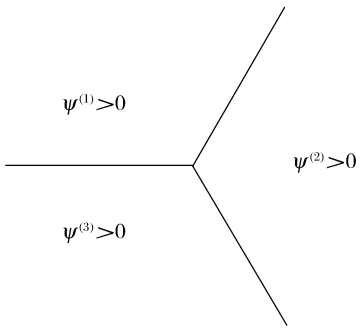


图 1　实际界面

Fig. 1　Real interface configuration

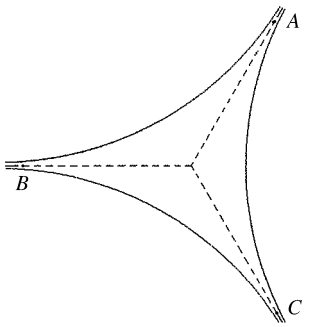


图 2　普通 LS 方法给出的界面

Fig. 2　interface configuration obtained by general LS method

2.2　改进型 LS 计算方法

我们以最常见的三重交汇界面情况进行讨论(即 $N=3$),如图 1 所示,普通 LS 方法计算出的界面形状由图 2 中的实线给出,改进型 LS 方法希望大大减小这三条实线之间的空穴,迫使界面形状尽可能接近图 2 中的虚线位置。

根据(2)式定义的 LS 距离函数值情况,在图 2 的空穴中,有 $\Psi^{(1)}<0$、$\Psi^{(2)}<0$、$\Psi^{(3)}<0$,而且在远离交汇区域处相邻两种介质的 LS 函数值非常接近,另一种介质的 LS 函数值则很小,例如,在 A 点处,$\Psi^{(1)}\approx\Psi^{(2)}$,$\Psi^{(3)}$ 远小于 $\Psi^{(1)}$ 和 $\Psi^{(2)}$,在 B 点及 C 点处,分别有 $\Psi^{(1)}\approx\Psi^{(3)}$ 和 $\Psi^{(2)}\approx\Psi^{(3)}$。图 2 中的虚线表示实际界面位置,其 LS 函数值应为零,即在 A 点 $\Psi^{(1)}=\Psi^{(2)}$,在 B 点 $\Psi^{(1)}=\Psi^{(3)}$,在 C 点 $\Psi^{(2)}=\Psi^{(3)}$。因此,对于普通 LS 方法计算出来的 $\Psi^{(m)}$ 需要经过如下修正

$$\Psi^{(m)}:=\Psi^{(m)}-\max_{m\neq k}[\Psi^{(k)}] \tag{5}$$

可以迫使修正后 $\Psi^{(m)}$ 中 LS 函数值为零的点的位置与实际界面上 LS 函数值为零的点的位置保持不变。(5)式给出修正后的 $\Psi^{(m)}$，在远离交汇区域的界面附近实际上是将原来的 $\Psi^{(m)}$ 增大了 1 倍，为减小数值误差，还需对 $\Psi^{(m)}$ 进行还原，即

$$\Psi^{(m)} := \Psi^{(m)}/2 \tag{6}$$

(6)式并不改变经(5)式修正后的界面位置。普通 LS 方法加上(5)式、(6)式修正，保证了改进型 LS 方法只是减小多重交汇界面之间因摸平产生的空穴，而不影响多重交汇以外区域 LS 函数值为零的界面位置。

3 改进型 LS 方法与可压缩流体的耦合求解及其差分格式

二维无粘性、无热传导守恒律控制方程组如(7)式，其中，ρ、u、v、p 分别表示密度、x 方向速度分量、y 方向速度分量和压力，E 表示单位质量的总能量。对于大多数气体、液体和用冲击 Hugoniot 曲线描述的弹性密实介质，可以采用“Stiffen Gas”状态方程来描述这一类物质性质。根据混合网格中各组分压力平衡、速度连续基本假定，运用介质的状态方程推导描述界面的有效方程(组)，与 LS 方程一起由方程(8)给出。方程(3)～方程(8)构成本研究的基本控制方程。若用 e 表示比内能，则“Stiffen Gas”状态方程表示为(9)式，其中 $E=e+(u^2+v^2)/2$，对于气体 γ 为比热比($\gamma>1$)，对于液体和弹性密实介质 γ 为拟合常数，π 为具有粘性张量量纲的材料常数，γ 和 π 在边界附近为连续可微函数，在区域内部为该种物质的状态方程参数。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t}+\dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\dfrac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\dfrac{\partial(\rho u^2+p)}{\partial x}+\dfrac{\partial(\rho uv)}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\dfrac{\partial(\rho uv)}{\partial x}+\dfrac{\partial(\rho v^2+p)}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial(\rho E)}{\partial t}+\dfrac{\partial[(\rho E+p)u]}{\partial x}+\dfrac{\partial[(\rho E+p)v]}{\partial y}=0 \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{1}{\gamma-1}\right)+\boldsymbol{D}\cdot\nabla\left(\dfrac{1}{\gamma-1}\right)=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\gamma\pi}{\gamma-1}\right)+\boldsymbol{D}\cdot\nabla\left(\dfrac{\gamma\pi}{\gamma-1}\right)=0 \\ \dfrac{\partial \Psi^{(m)}}{\partial t}+\boldsymbol{D}\cdot\nabla\Psi^{(m)}=0 \qquad (m=1,\cdots,N) \end{cases} \tag{8}$$

$$\rho e=\frac{p+\gamma\pi}{\gamma-1} \tag{9}$$

方程(7)、方程(8)可以写成矢量形式

$$\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t}+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial x}+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial y}=\boldsymbol{0} \tag{10}$$

$\boldsymbol{q}$ 为矢量，$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为系数矩阵，按特征值为正和负可以分别将矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 分成两个对应的矩阵 $\boldsymbol{A}^+$、$\boldsymbol{A}^-$ 和 $\boldsymbol{B}^+$、$\boldsymbol{B}^-$。其有限体积差分格式可以统一写成

$$\boldsymbol{q}_{ij}^{n+1}=\boldsymbol{q}_{ij}^{n}+\boldsymbol{\Delta}_{ij}^{\mathrm{up}}-\frac{\Delta t}{\Delta x}(\boldsymbol{F}_{i+1,j}^{n}-\boldsymbol{F}_{ij}^{n})-\frac{\Delta t}{\Delta y}(\boldsymbol{G}_{i,j+1}^{n}-\boldsymbol{G}_{ij}^{n}) \tag{11}$$

$\boldsymbol{F}_{ij}^{n}$、$\boldsymbol{G}_{ij}^{n}$ 为 x、y 方向流量的二阶修正项，$\boldsymbol{\Delta}_{ij}^{\mathrm{up}}$ 为 Godunov 型迎风计算格式

$$\boldsymbol{\Delta}_{ij}^{\mathrm{up}}=-\frac{\Delta t}{\Delta x}(\boldsymbol{A}^{+}\,\Delta\boldsymbol{q}_{ij}+\boldsymbol{A}^{-}\,\Delta\boldsymbol{q}_{i+1,j})-\frac{\Delta t}{\Delta y}(\boldsymbol{B}^{+}\,\Delta\boldsymbol{q}_{ij}+\boldsymbol{B}^{-}\,\Delta\boldsymbol{q}_{i,j+1}) \tag{12}$$

对于重新初始化方程(3)、方程(4)采用五阶 WENO 差分格式求解，差分格式为

$$\varphi^{(m)}(i,j,n+1)=\varphi^{(m)}(i,j,n)-\Delta\tau\cdot s_{i,j}\left[1-\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi^{(m)}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi^{(m)}}{\partial y}\right)^2}\right] \tag{13}$$

$$\frac{\partial\varphi^{(m)}}{\partial x}=\begin{cases}\mathrm{WENO5}(\varphi^{(m)}{}^{x-}_{i-2,j},\varphi^{(m)}{}^{x-}_{i-1,j},\varphi^{(m)}{}^{x-}_{i,j},\varphi^{(m)}{}^{x-}_{i+1,j},\varphi^{(m)}{}^{x-}_{i+2,j}) & s_{i,j}\geqslant 0\\ \mathrm{WENO5}(\varphi^{(m)}{}^{x+}_{i+2,j},\varphi^{(m)}{}^{x+}_{i+1,j},\varphi^{(m)}{}^{x+}_{i,j},\varphi^{(m)}{}^{x+}_{i-1,j},\varphi^{(m)}{}^{x+}_{i-2,j}) & s_{i,j}<0\end{cases}$$

$$\frac{\partial\varphi^{(m)}}{\partial y}=\begin{cases}\mathrm{WENO5}(\varphi^{(m)}{}^{y-}_{i,j-2},\varphi^{(m)}{}^{y-}_{i,j-1},\varphi^{(m)}{}^{y-}_{i,j},\varphi^{(m)}{}^{y-}_{i,j+1},\varphi^{(m)}{}^{y-}_{i,j+2}) & s_{i,j}\geqslant 0\\ \mathrm{WENO5}(\varphi^{(m)}{}^{y+}_{i,j+2},\varphi^{(m)}{}^{y+}_{i,j+1},\varphi^{(m)}{}^{y+}_{i,j},\varphi^{(m)}{}^{y+}_{i,j-1},\varphi^{(m)}{}^{y+}_{i,j-2}) & s_{i,j}<0\end{cases}$$

其中一阶差分算子定义为

$$\varphi^{(m)}{}^{x-}_{i,j}=\frac{\varphi^{(m)}(i,j,n)-\varphi^{(m)}(i-1,j,n)}{\Delta x}\qquad \varphi^{(m)}{}^{x+}_{i,j}=\frac{\varphi^{(m)}(i+1,j,n)-\varphi^{(m)}(i,j,n)}{\Delta x}$$

$$\varphi^{(m)}{}^{y-}_{i,j}=\frac{\varphi^{(m)}(i,j,n)-\varphi^{(m)}(i,j-1,n)}{\Delta y}\qquad \varphi^{(m)}{}^{y+}_{i,j}=\frac{\varphi^{(m)}(i,j+1,n)-\varphi^{(m)}(i,j,n)}{\Delta y}$$

WENO5 的定义为

$$\mathrm{WENO5}(a,b,c,d,e)=\frac{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}$$

$$\beta_1=\frac{a}{3}-\frac{7b}{6}+\frac{11c}{6},\quad \beta_2=-\frac{b}{6}+\frac{5c}{6}+\frac{d}{3},\quad \beta_3=\frac{c}{3}+\frac{5d}{6}-\frac{e}{6}$$

$$\alpha_1=1/(\varepsilon+IS_1)^2,\quad \alpha_2=6/(\varepsilon+IS_2)^2,\quad \alpha_3=3/(\varepsilon+IS_3)^2$$

$$IS_1=13(a-2b+c)^2+3(a-4b+3c)^2$$

$$IS_2=13(b-2c+d)^2+3(d-b)^2$$

$$IS_3=13(c-2d+e)^2+3(3c-4d+e)^2$$

式中:IS_1、IS_2、IS_3 称为光滑因子,ε 为小量,在本计算中取 $\varepsilon=10^{-6}$。

4　数值算例

4.1　三重交汇界面的对流算例

计算模型如图 3,“T”型三重交汇界面以单位速度 1 沿 x 方向运动。交汇点位置为(0.5,0.5),计算网格为 200×200。应用本文的改进型 LS 方法计算出 $t=0.4$ 时刻的界面形状如图 4 所示,图 5 给出该时刻改进前后两种算法在交汇处的比较结果。其中实线为改进 LS 方法计算结果,虚线为普通 LS 方法计算结果。从图 5 可见,改进型 LS 方法能够大大减小普通 LS 方法在三重交汇界面处因光滑而产生的空穴区域,将交汇区域限制在一个计算网格之中。

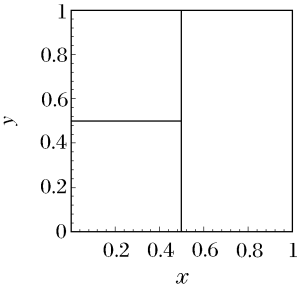


图 3　计算模型

Fig. 3　Computational model

4.2　三种流体相互作用的多重交汇界面捕捉算例

三种流体的初始界面位置如图 3,计算区域为[0,1]×[0,1],计算网格为 200×200,其初始流场分布如下

$$(p,\rho,u,v,\gamma,\pi)=\begin{cases}(1,1,0,0,1.1,0) & 0.5\leqslant x<1.0\\ (2.5,2.5,0,0,1.2,0) & 0.0\leqslant x<0.5,0.5\leqslant y<1.0\\ (5.0,5.0,0,0,1.4,0) & 0.0\leqslant x<0.5,0.0\leqslant y<0.5\end{cases}$$

改进型 LS 方法和普通 LS 方法计算的结果如图 6 所示,其中标号 0～5 分别表示 $t=0$、0.1、0.2、0.3、0.4、0.5 时刻计算得到的界面形状。从两中 LS 方法比较可见,普通 LS 方法捕捉到的多重交汇区界面之间的空穴,是随计算时间的增长而扩大的;改进型 LS 方法捕捉到的多重交汇界面,不仅界面之间的空穴大大减小,而且空穴不会扩大。

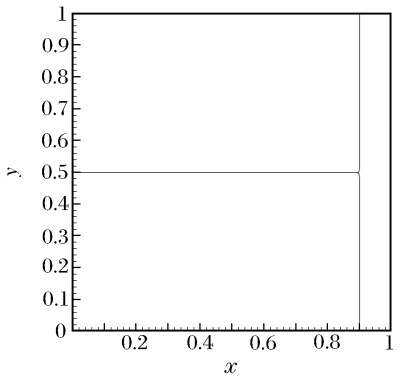


图 4 $t=0.4$ 时刻改进型 LS 方法捕捉的界面

Fig. 4 Multi-interfaces captured by using the improved LS method at $t=0.4$

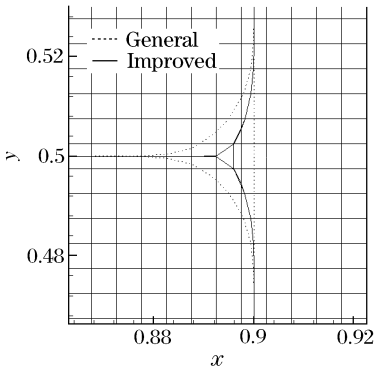
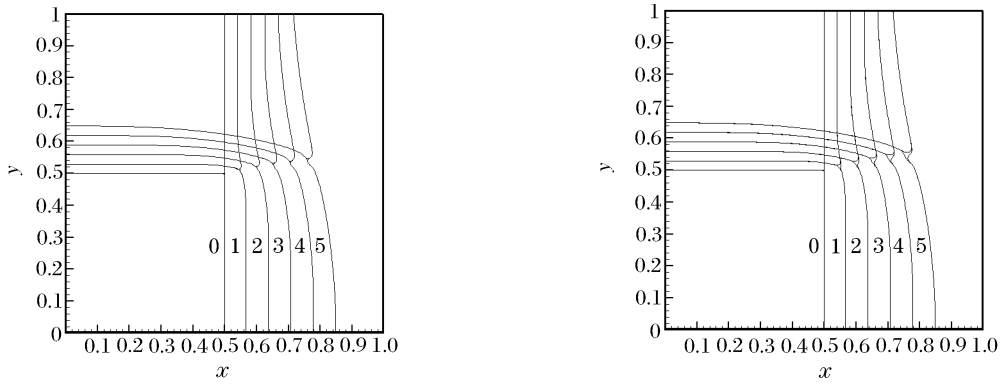


图 5 两种 LS 方法计算的界面位置

Fig. 5 Comparison of interfaces calculated by two LS methods



(a) Improved LS method (b) General LS method

图 6 三种流体相互作用的界面计算

Fig. 6 Computation of interface for the interactions of three fluids

4.3 四种、五种流体相互作用的多重交汇界面捕捉算例

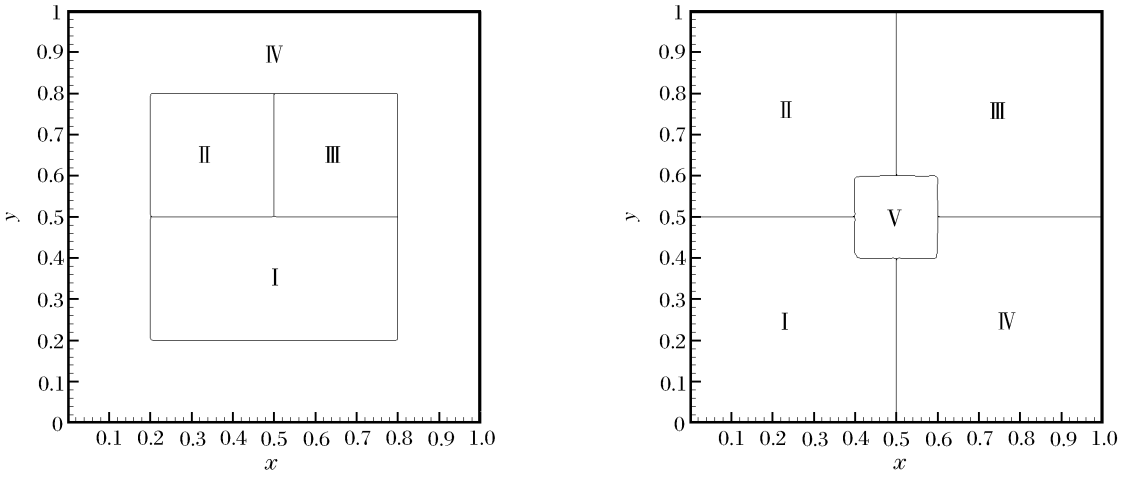
作为推广,本文的改进型 LS 方法可以应用到多种介质的多重交汇界面计算,这里给出四种和五种介质相互作用的界面计算算例。

四种和五种介质相互作用的流场初始分布如下(对照图 7 中的区域定义)

$$(p,\rho,u,v,\gamma,\pi)=\begin{cases}(2.5,2.5,0,0,1.3,0) & \text{在 Ⅰ 内}\\(5.0,5.0,0,0,1.4,0) & \text{在 Ⅱ 内}\\(0.5,0.5,0,0,1.2,0) & \text{在 Ⅲ 内}\\(10.0,10.0,0,0,1.1,0) & \text{在 Ⅳ 内}\end{cases}$$

$$(p,\rho,u,v,\gamma,\pi)=\begin{cases}(0.5,0.5,0,0,1.4,0) & \text{在 Ⅰ 内}\\(1.0,1.0,0,0,1.3,0) & \text{在 Ⅱ 内}\\(2.0,2.0,0,0,1.2,0) & \text{在 Ⅲ 内}\\(4.0,4.0,0,0,1.1,0) & \text{在 Ⅳ 内}\\(16,16,0,0,1.05,0) & \text{在 Ⅴ 内}\end{cases}$$

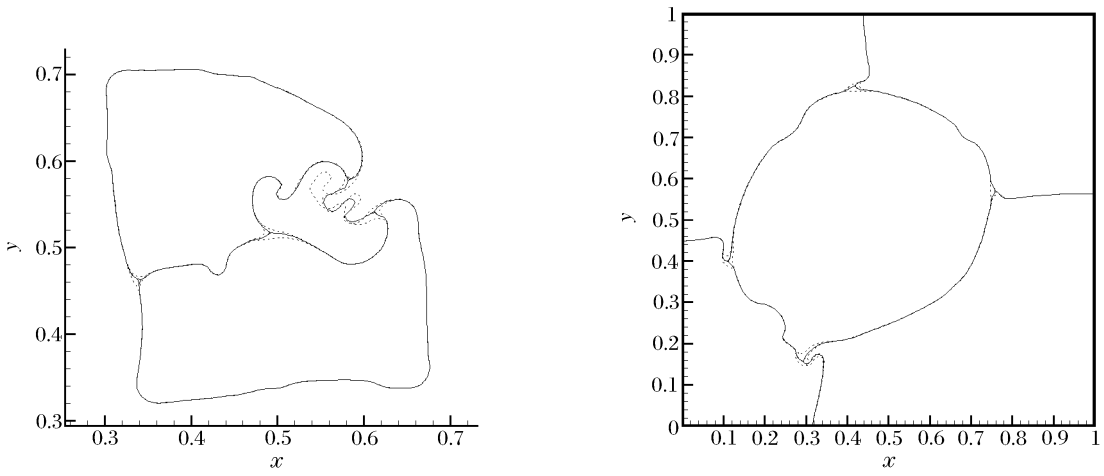
改进型 LS 方法和普通 LS 方法计算的结果如图 8 所示。



(a) Case of four fluids　　(b) Case of five fluids

图 7　初始流场分布

Fig. 7　Initial fluids distribution



(a) Case of four fluids at t=0.4　　(a) Case of five fluids at t=0.2

Dashed line: General LS method　　Solid line: Improved LS method

图 8　改进型 LS 方法和普通 LS 方法计算结果

Fig. 8　Results from the improved LS and general LS method

5　结 束 语

我们针对多重交汇界面提出了一种改进型 LS 方法,能够大大减小普通 LS 方法在交汇处因光滑摸平形成的空穴区域,并在多介质可压缩流体计算中得到了具体应用,有利于提高欧拉方法对界面的捕捉精度。

References:

[1]　Aslam T D, Bdzil J B, Stewart D S. Level Set Methods Applied to Modeling Detonation Shock Dynamics [J]. J

Comput Phys,1996,126:390－409.

[2] Chen S H, Zhang X, Bai J S. LS Method in Boddy-Fitted Coordinate System for Multi-Dimensional Non-Ideal Detonation Propagation [J]. Chinese Journal of High Pressure Physics,2000,14(4):280－284. (in Chinese)
陈森华,张 旭,柏劲松. 贴体坐标系中多维非理想爆轰波阵面传播计算的 LS 方法 [J]. 高压物理学报,2000,14(4):280－284.

[3] Chang Y C, Hou T Y, Merriman B, et al. A Level Set Formulation of Eulerian Interface Capturing Methods for Incompressible Fluid Flows [J]. J Comput Phys,1996,124: 449－464.

[4] Bai J S, Chen S H. Re-Initial Level Set Method for Capturing 2D Compressible Multi-Fluid Interfaces [J]. Chinese Journal of High Pressure Physics,2003,17(1):22－28. (in Chinese)
柏劲松,陈森华. 重新初始化的 LS 方法跟踪二维可压缩多介质流界面运动 [J]. 高压物理学报,2003,17(1):22－28.

[5] Aslam T D. A Level Set Algorithm Tracking Discontinuities in Hyperbolic Conservation Laws Ⅰ: Scalar Equations [R]. LA-UR-98-2194,1998.

Improved LS Method for Capturing Compressible Fluid with Multi-Interface Interactions

BAI Jing-Song, CHEN Sen-Hua

(*Institute of Fluid Physics, CAEP, Mianyang* 621900, *China*)

Abstract: Based on the general LS method, an improved LS method for capturing compressible fluid with multi-interface interactions is given. This method can decrease the void region near the multi-interactions point, but not change the others. Both the LS equations capturing the material interface quality and the Eulerian conservative equations are solved by using a high resolution unspliting finite volume scheme, and fifth order WENO scheme for re-initialization level set equations. Some examination and application examples in capturing conjunct multi-fluid interfaces cases are simulated.

Key words: Level Set method; compressible multi-fluid; Euler interface capture

第 12 届全国高压学术讨论会第二轮通知

经中国物理学会高压物理专业委员会决定,第 12 届全国高压学术讨论会改为 2004 年 10 月中旬举行,会期约一周,地点待定。会议由中国工程物理研究院流体物理研究所承办。

会议内容包括:(1) 高压加载和测试技术,(2) 高压下材料的物理和力学性质,(3) 物态方程和相变,(4) 人工合成新材料(包括纳米材料),(5) 高压地学,(6) 冲击和爆轰现象,(7) 流体动力学现象,(8) 断裂。

参加会议的人员请将论文写成 1000～1500 字的详细摘要,说明研究的目的、方法、结果和结论(可含有图、表),并于 2004 年 3 月 30 日前用电子邮件发送至《高压物理学报》编辑部(也可邮寄软盘),以便刊登在会议文集上,供会议交流用。

投稿联系人:周菁菁

E-mail: gywl@chinajournal.net.cn; gaoya@caep.ac.cn

地 址: 四川绵阳 919 信箱 110 分箱《高压物理学报》编辑部,邮政编码: 621900

电 话: (0816) 2490042