文章编号：1000-5773(2005)03-0201-05

一个新的损伤演化方程及其在层裂中的应用*

周洪强，秦承森，张树道，张凤国，刘文韬，王 裴

（北京应用物理与计算数学研究所，北京 100080）

摘要：采用统计细观损伤力学方法，基于延性金属断裂过程的孔洞演化机理，提出一个新的损伤演化方程，该方程在一定的条件下与由空心球体胞模型导出的损伤方程形式相同。在此基础上，将新的损伤演化方程编入一维 Lagrange 有限差分动力学程序，对 OFHC 铜的平板对称正碰撞层裂实验进行了数值模拟，计算结果与实验吻合得较好。

关键词：统计细观损伤力学；层裂；细观孔洞；孔隙度；数值模拟

中图分类号：O347.3 **文献标识码**：A

1 引 言

层裂现象是材料在冲击压缩过程中，由压缩波在自由面反射形成的稀疏波相互作用引起的[1]。延性金属层裂的物理机制是其内部损伤（即孔洞、裂纹等）的成核、增长和汇合[2,3]。发生层裂的材料再次被压缩时，其损伤状态（即孔洞的分布）将会对材料的压缩性能产生重要影响。因此，延性金属层裂现象的研究需要从其细观机制出发，采用细观损伤力学方法给出损伤演化规律[4]。

目前主要采用两种方式描述损伤（孔洞）的增长过程[5~8]：空心球体胞模型和统计细观损伤力学模型。前者忽略大小、形状均不相同的孔洞的真实分布情况，将含孔洞的材料微元折合成一个含空心球的体胞，通过研究空心球的力学响应得到损伤演化方程，代表性的有 LANL 实验室的 Johnson 损伤演化方程[5]，这种模型间接考虑了孔洞间的相互作用；统计损伤模型考虑了孔洞尺寸和形状的真实分布情况，代表性的有封加波-经福谦损伤演化方程[8]。两种方式虽然不同，但都抓住了材料断裂过程的本质，导出了合理的损伤演化方程。

本工作采用统计细观损伤力学方法给出一个新的损伤演化方程，分析表明，该模型可近似化为由空心球体胞导出的损伤演化方程。应用该模型对 OFHC 铜平板对称正碰撞层裂实验进行了数值模拟，数值模拟计算得到的自由面速度随时间的变化规律与实验结果符合得较好，表明本文的损伤演化方程是合理可用的。

2 损伤演化方程

2.1 从细观统计模型导出宏观损伤演化方程的一般形式

考虑含损伤延性材料的宏观微元，其体积为 $V(x,t,S)$，其中 t 为时间；x 是空间坐标；S 是参数，理解为应力、应变及其它内变量等。该微元含有大量的尺寸随机分布的细观孔洞，该细观损伤系统的演化方式采用统计描述[7]。假设细观孔洞近似呈球形，细观变量取为孔洞体积 v，则该细观损伤系统可由相空间$\{v\}$描述。设 $n(v,t,S)$为相空间中的孔洞数密度函数，则微元孔洞总体积为

$$V_v(x,t,S)=\int_0^\infty n(v,t,S)v\,\mathrm{d}v \tag{1}$$

* **收稿日期**：2004-09-09；**修回日期**：2005-04-17

基金项目：国家自然科学基金项目-NSAF 联合基金(10476027)

作者简介：周洪强(1970—)，男，博士，助理研究员，主要研究方向为材料的动态破坏.
E-mail：zhouhq@mail.iapcm.ac.cn

定义孔洞体积分数 D 为损伤内变量，即以孔隙度为损伤度

$$D(x,t,S)=\frac{V_v(x,t,S)}{V(x,t,S)} \tag{2}$$

孔洞数密度满足 Liouville 方程[7]

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial(n\dot{v})}{\partial v}=n_N \tag{3}$$

$$\dot{v}=\dot{v}(v,s) \tag{4}$$

$$n_N=n_N(v,t,S) \tag{5}$$

式中：$\dot{v}(v,s)$是细观孔洞体积增长速率，$n_N(v,t,S)$是相空间细观孔洞的成核率数密度。在确定 $\dot{v}(v,s)$ 和 $n_N(v,t,S)$的具体形式之后，适当选择初、边值条件，原则上可由(3)式～(5)式求出 $n(v,t,S)$的具体形式，从而由(1)式、(2)式得到损伤度 $D(x,t,S)$。对(2)式求时间微商，得普适的损伤演化方程

$$\frac{\partial D}{\partial t}=\frac{1}{V}\cdot\left(\frac{\partial V_v}{\partial t}-D\cdot\frac{\partial V}{\partial t}\right) \tag{6}$$

假定基体材料塑性不可压，并略去基体弹性变形对损伤演化的贡献，则

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial V_v}{\partial t} \tag{7}$$

由以上二式得

$$\frac{\partial D}{\partial t}=\frac{1-D}{V}\cdot\frac{\partial V_v}{\partial t} \tag{8}$$

由(1)式和(3)式得

$$\frac{\partial V_v}{\partial t}=\int_0^\infty v n_N\,\mathrm{d}v-\int_0^\infty v\,\frac{\partial(n\dot{v})}{\partial v}\mathrm{d}v \tag{9}$$

根据数密度的物理意义，下式成立

$$\lim_{v\to\infty} n(v,t,S)=0 \tag{10}$$

由以上二式得

$$\frac{\partial V_v}{\partial t}=\int_0^\infty v n_N\,\mathrm{d}v+\int_0^\infty \dot{v}n\,\mathrm{d}v \tag{11}$$

其中上式右边第一、第二项分别表示孔洞成核、增长对孔洞总体积时间变化率的贡献。考虑到在高应变率、强载荷下孔洞成核的贡献相对于增长的贡献可以忽略，上式化为

$$\frac{\partial V_v}{\partial t}=\int_0^\infty \dot{v}n\,\mathrm{d}v \tag{12}$$

由(8)式和(12)式得

$$\frac{\partial D}{\partial t}=\frac{1-D}{V}\cdot\int_0^\infty \dot{v}n\,\mathrm{d}v \tag{13}$$

此即损伤度 D 演化方程的一般形式。

2.2 仅考虑材料强度和粘性的损伤方程

对于球形孔洞，考虑材料强度 $\bar{\sigma}_g$ 和粘性 η 对其增长的影响。设 R 为孔洞半径，r 为球坐标中的径向坐标，孔洞边界力学平衡条件应为

$$p_{gas}+\bar{\sigma}_m-\bar{\sigma}_g+p_{rr}=0$$

即介质中克服材料强度 $\bar{\sigma}_g$ 的剩余拉应力 $\bar{\sigma}_m-\bar{\sigma}_g$ 加上孔洞内气体压力 p_{gas} 与粘性阻滞力 p_{rr} 平衡，其中 $\bar{\sigma}_m$ 是宏观平均应力。引入粘性系数 η，则有 $p_{rr}=2\eta(\partial u_r/\partial r)$，$u_r$ 是孔洞界面速度。引用不可压缩流体气泡的解

$$\varphi=-\frac{1}{r}(R^2\dot{R}),\quad u_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}$$

给出在孔洞边界上的粘性力 $p_{rr}=-4\eta\dot{R}/R$，于是有

$$\frac{\dot{R}}{R}=\frac{\bar{\sigma}_{\mathrm{m}}-\bar{\sigma}_{\mathrm{g}}+p_{\mathrm{gas}}}{4\eta} \tag{14}$$

略去孔洞气体压力 p_{gas},则上式即为 Seaman 等人建议的孔洞增长方程[2,3]。由上式及孔洞体积公式 $v=4\pi R^3/3$,得单个孔洞体积增长速率

$$\frac{\dot{v}}{v}=\frac{3}{4}\cdot\frac{\bar{\sigma}_{\mathrm{m}}-\bar{\sigma}_{\mathrm{g}}+p_{\mathrm{gas}}}{\eta} \tag{15}$$

由(13)式和(15)式得到统计细观损伤演化方程

$$\frac{\partial D}{\partial t}=\begin{cases}D(1-D)\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{\bar{\sigma}_{\mathrm{m}}-\bar{\sigma}_{\mathrm{g}}+p_{\mathrm{gas}}}{\eta} & \bar{\sigma}_{\mathrm{m}}+p_{\mathrm{gas}}\geqslant\bar{\sigma}_{\mathrm{g}}\\ 0 & \bar{\sigma}_{\mathrm{m}}+p_{\mathrm{gas}}<\bar{\sigma}_{\mathrm{g}}\end{cases} \tag{16}$$

2.3　由空心球体胞模型推导的损伤方程

由空心球体胞模型亦可导出损伤方程。文献[9]研究了含孔洞的理想弹塑性材料在球对称载荷作用下的动态响应问题。当基体材料为体积不可压缩时,由运动方程可得[10]

$$\tau^2\sigma_{\mathrm{y}}Q(\ddot{\alpha},\dot{\alpha},\alpha)=p_{\mathrm{gas}}-p(t)+(\operatorname{sign}p)\int_a^b\frac{2\sigma_{\mathrm{e}}}{r}\mathrm{d}r \tag{17}$$

式中:a 和 b 分别是球形孔洞和球形体胞的半径,其初值分别是 a_0 和 b_0;p 是作用于外边界上的球对称载荷;$\alpha=b^3/(b^3-a^3)=1/(1-D)$,其初值记为 α_0;$\tau^2=\rho a_0^2/[3\sigma_{\mathrm{y}}(\alpha_0-1)^{2/3}]$,$\rho$ 是基体密度,σ_{y} 是基体的屈服应力;σ_{e} 是基体的等效应力;(17) 式左端表示惯性应力的影响。注意到 α 与 D 的单值关系,方程(17)即为关于 D 的微分方程,即损伤方程。Johnson 将(17)式应用于基体为弹-粘塑性材料中,相应的(17)式右端第三项的积分为[5]

$$F(\alpha)+\frac{4\sigma_{\mathrm{y}}}{9\dot{\varepsilon}_0}\left[\frac{\dot{\alpha}}{\alpha(\alpha-1)}\right] \tag{18}$$

式中:$\dot{\varepsilon}_0$ 是与粘性系数相关的材料参数,$F(\alpha)=\dfrac{2}{3}\sigma_{\mathrm{y}}\ln\left(\dfrac{\alpha}{\alpha-1}\right)$。

实际上,在拉应力作用下,$p(t)$ 就是 $-\bar{\sigma}_{\mathrm{m}}$。如果令 $F(\alpha)\equiv\bar{\sigma}_{\mathrm{g}}$,$\eta=\sigma_{\mathrm{y}}/3\dot{\varepsilon}_0$,由 α 与损伤度 D 的关系式 $\alpha=1/(1-D)$,则(17)式化为

$$\frac{\partial D}{\partial t}=\begin{cases}D\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{\bar{\sigma}_{\mathrm{m}}-\bar{\sigma}_{\mathrm{g}}+p_{\mathrm{gas}}-\tau^2\sigma_{\mathrm{y}}Q(D,\dot{D},\ddot{D})}{\eta} & \bar{\sigma}_{\mathrm{m}}+p_{\mathrm{gas}}\geqslant\bar{\sigma}_{\mathrm{g}}\\ 0 & \bar{\sigma}_{\mathrm{m}}+p_{\mathrm{gas}}<\bar{\sigma}_{\mathrm{g}}\end{cases} \tag{19}$$

这是空心球体胞模型给出的损伤方程的一般公式。若略去惯性力学的影响,取 $\tau^2\sigma_{\mathrm{y}}Q\approx 0$,则方程(19)为

$$\frac{\partial D}{\partial t}=\begin{cases}D\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{\bar{\sigma}_{\mathrm{m}}-\bar{\sigma}_{\mathrm{g}}+p_{\mathrm{gas}}}{\eta} & \bar{\sigma}_{\mathrm{m}}+p_{\mathrm{gas}}\geqslant\bar{\sigma}_{\mathrm{g}}\\ 0 & \bar{\sigma}_{\mathrm{m}}+p_{\mathrm{gas}}<\bar{\sigma}_{\mathrm{g}}\end{cases} \tag{20}$$

这个方程与(16)式相比,仅差因子(1−D)。考虑到在金属的层裂过程中,损伤度取值范围较小,$D\in(0,0.3]$,如果将(16)式的(1−D)项取为 1,则化为(20)式。因此,在略去惯性效应的前提下,空心球体胞模型和细观统计力学模型导出了相同的损伤演化方程。这说明,以空心球体胞代替含损伤材料质点的假定是合理的。

由(16)式与(20)式的等价特性,可以给出细观孔洞增长的应力阈值公式

$$\bar{\sigma}_{\mathrm{g}}=F(\alpha)$$

根据基体材料等效应力 σ_{e} 形式的不同,$F(\alpha)$ 可取多种形式[14]。数值模拟时常取应力阈值 $\bar{\sigma}_{\mathrm{g}}$ 为常数[11]:$\bar{\sigma}_{\mathrm{g}}=\dfrac{1}{2}\rho_0 c_{\mathrm{b}}\Delta u_{\mathrm{fs}}$,其中 Δu_{fs}是自由面回跳速度,c_{b} 是体积声速。

3　数值模拟

利用本文中的损伤模型对文献[11]中的 OFHC 铜平板对称正碰撞层裂实验进行了数值模拟。计

算采用的是一维 Lagrange 有限差分动力学程序，在程序中加入了损伤演化的计算子程序。

由于引入了损伤变量，需要对基体材料的本构方程进行修正。材料中的平均压力 $\bar{p}$ 与损伤度 D 之间的关系，可由下式给出[9]

$$\bar{p}=(1-D)p_s(\rho_s,e)$$

式中：p_s 和 ρ_s 分别是基体的压力和密度，e 是比内能。p_s 由 Mie-Grüneisen 状态方程给出[5]

$$p_s=K_0\left(\frac{\rho_s}{\rho_0}-1\right)+\Gamma\rho_s e$$

式中：K_0 是基体材料的体积模量，Γ 是材料的 Grüneisen 系数。计算中假定 $\Gamma\rho_s=\Gamma_0\rho_0$，$\Gamma_0$ 和 ρ_0 分别是初始材料参数。屈服面采用文献[12]的 J-C 修正形式

$$\bar{\sigma}_e=\left[A+B(\bar{\varepsilon}_e^p)^n\right]\left[1+C\ln(\dot{\bar{\varepsilon}}_e^p/\dot{\varepsilon}_0)\right]\left(1-T^{*m}\right)\left(1-D\right)$$

式中：$\bar{\sigma}_e$ 是宏观等效应力，$\bar{\varepsilon}_e^p$ 是宏观等效塑性应变，A、B、C、m、n 是模型参数，$\dot{\varepsilon}_0=1\ \mathrm{s}^{-1}$，$T^{*m}=(T-T_r)/(T_m-T_r)$，$T_m$、$T_r$ 分别是材料的熔化温度和室温。损伤对材料参数的影响由以下关系描述[13]

$$\bar{G}=G_0(1-D)\left[1-\frac{(12G_0+6K_0)D}{8G_0+9K_0}\right]$$

$$\bar{K}=\frac{4G_0K_0(1-D)}{4G_0+3K_0D}$$

式中：$\bar{G}$、$\bar{K}$ 分别是宏观剪切模量和体积模量，G_0 是基体的剪切模量。

图 1 中给出了靶板自由面速度随时间的变化历史的计算结果与实验结果的比较。实验为用 2 mm 厚 OFHC 铜飞片以 185 m/s 的速度冲击 9 mm 厚的 OFHC 铜靶板[11]。计算中使用的材料常数为：$\rho_0=8.96\ \mathrm{g/cm^3}$，$\Gamma_0=2.0$，$A=90$ MPa，$B=292$ MPa，$C=0.025$，$m=1.09$，$n=0.31$，$T_m=1\ 356$ K，$T_r=293$ K，$G_0=48.4$ GPa，$K_0=136.43$ GPa，初始损伤度 $D_0=2.999\ 1\times10^{-4}$，断裂时的临界损伤度 $D_f=0.3$[5]，体积声速 $c_b=3.91$ km/s，$\bar{\sigma}_g=1.6$ GPa[11]。比较表明，本工作提出的损伤演化模型能较好地模拟材料的实际损伤过程。

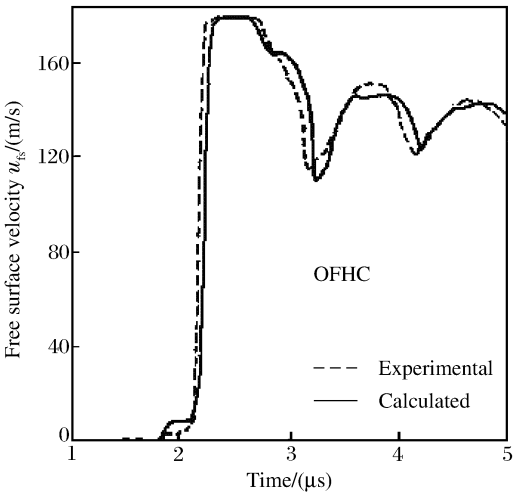


图 1 OFHC 铜数值模拟与实验结果对比

Fig. 1 Comparison between experimental and calculated free-surface velocity profile for OFHC

4 结 论

采用统计细观损伤力学方法，提出了一个新的损伤演化方程，该方程在一定的条件下与由空心球体胞模型导出的损伤方程形式相同，从而证实了损伤力学中常采用的以空心球体胞代替含损伤材料宏观质点假定的合理性。

将损伤演化方程编入一维 Lagrange 有限差分动力学程序，对 OFHC 铜的层裂过程进行了数值模拟，计算结果与实验吻合得较好，这说明损伤模型的建立是合理的。

References:

[1] Kanel G I, Razorenov S V, Utkin A V. Spallation in Solids under Shock-Wave Loading: Analysis of Dynamic Flow, Methodology of Measurements, and Constitutive Factors [A]. Davison L, Grady D E, Shahinpoor M. High Pressure Shock Compression of Solid Ⅱ [C]. New York: Springer-Verlag, 1996. 1－23.

[2] Curran C R, Seaman L, Shockey D A. Dynamic Failure of Solids [J]. Physics Reports, 1987, 147(5－6): 253－388.
[3] Antoun T, Seaman L, Curran D R, et al. Spall Fracture [M]. New York: Springer-Verlag, 2003.
[4] Meyers M A, Aimone C T. Dynamic Fracture (Spalling) of Metals [J]. Prog Mater Sci, 1983, 28: 1－96.
[5] Johnson J N. Dynamic Fracture and Spallation in Ductile Solids [J]. J Appl Phys, 1981, 52: 2812－2825.
[6] Tonks D L, Vorthman J E, Hixson R S, et al. Spallation Studies on Shock Loaded U-6 WT PCT NB [A]. Furnish M D, Chhabildas L C, Hixson R S. AIP Conference Proceedings [C]. New York: American Institute of Physics, 2000. 329－332.
[7] Xia M F, Han W S, Ke F J, et al. Statistical Meso-Scopic Damage Mechanics and Damage Evolution Induced Catastrophe [J]. Chinese Journal of Advances in Mechanics, 1995, 25(1): 1－40. (in Chinese)
夏蒙棼, 韩闻生, 柯孚久, 等. 统计细观损伤力学和损伤演化诱致突变 (Ⅰ) [J]. 力学进展, 1995, 25(1): 1－40.
[8] Feng J B, Jing F Q, Zhang G R. Dynamic Ductile Fragmentation and the Damage Function Model [J]. J Appl Phys, 1997, 81(6): 2575－2578.
[9] Carroll M M, Holt A C. Static and Dynamic Pore-Collapse Relations for Ductile Porous Material [J]. J Appl Phys, 1972, 43: 1626－1636.
[10] Huang Z P, Yang L M, Pan K L. Dynamic Damage and Failure of Materials [J]. Chinese Journal of Advances in Mechanics, 1993, 23(4): 433－467. (in Chinese)
黄筑平, 杨黎明, 潘客麟. 材料的动态损伤和失效 [J]. 力学进展, 1993, 23(4): 433－467.
[11] Rajendran A M, Dietenberger M A, Grove D J. A Void Growth-Based Failure Model to Describe Spallation [J]. J Appl Phys, 1989, 65(4): 1521－1527.
[12] Zhang L, Zhang Z G, Qin X Y, et al. Dynamic Fracture and Mechanical Property of D6A, 921 and 45 Steels under Low Shock Pressure [J]. Chinese Journal of High Pressure Physics, 2003, 17(4): 305－310. (in Chinese)
张　林, 张祖根, 秦晓云, 等. D6A、921 和 45 钢的动态破坏与低压冲击特性 [J]. 高压物理学报, 2003, 17(4): 305－310.
[13] Mackenzie J K. The Elastic Constants of a Solid Containing Spherical Holes [J]. Proceedings of the Physical Society of London(Section B), 1950, 63: 2－11.
[14] Zhou H Q, Sun J S, Wang Y S. The Growth of Microvoids in Ductile Materials under Dynamic Loading [J]. Explosion and Shock Waves, 2003, 23(5): 415－419. (in Chinese)
周洪强, 孙锦山, 王元书. 动载荷下延性材料中微孔洞的增长模型 [J]. 爆炸与冲击, 2003, 23(5): 415－419.

A New Statistical Meso-Scopic Damage Model and Its Applications in Spalling Processes

ZHOU Hong-Qiang, QIN Cheng-Sen, ZHANG Shu-Dao,
ZHANG Feng-Guo, LIU Wen-Tao, WANG Pei

(*Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing* 100080, *China*)

Abstract: A new damage evolution equation for ductile materials is presented based on the statistical meso-scopic damage mechanism, which consistent well with the results of analysing the mechanical responses for the spherical cell containing a single central spherical void. The model presented is incorporated in a hydrodynamic one-dimensional finite-difference computer code, to simulate the process of spallation of OFHC copper. The calculation is in good agreement with the experimental data.

Key words: statistical meso-scopic damage mechanics; spallation; microscopic void; porosity; numerical simulation