第17卷 第1期
2003年3月

高 压 物 理 学 报
CHINESE JOURNAL OF HIGH PRESSURE PHYSICS

Vol. 17, No. 1
Mar., 2003

文章编号：1000-5773(2003)01-0022-07

重新初始化的LS方法跟踪二维可压缩多介质流界面运动*

柏劲松，陈森华

（中国工程物理研究院流体物理研究所，四川绵阳 621900）

摘要：用非耦合求解方法计算Level Set函数方程与流体力学方程组，应用重新初始化的Level Set函数确保距离函数性质，流体力学方程组采用二阶精度多介质流波传播差分格式计算，重新初始化方程采用五阶WENO格式计算。并给出了二维可压缩多介质流界面运动的计算结果。

关键词：Level Set方法；可压缩多介质流；Euler界面跟踪

中图分类号：O242；O35　　**文献标识码**：A

1 引 言

多介质可压缩流动的模拟方法主要有两大类：Front-Tracking和Front-Capturing。Front-Tracking方法用界面质点表征界面，并随流体运动从而跟踪界面运动，对界面模拟有着极高的精度，能准确跟踪交界面的演化，间断处理无数值耗散，但难于处理界面的拓扑结构的变化，且拓展到高维情况时算法非常复杂。Front-Capturing方法计算简单，格式统一，易于处理界面拓扑变化，易于拓展到高维情况，但间断处理有数值耗散，不能精确定位多介质交界面。LS(Level Set)方法是一种描述物质界面或者相界面运动的有效方法，能描述结晶面、燃烧阵面、非理想爆轰波阵面和不同流体界面等多种具有拓扑性质变化的界面运动[1~3]，属于Front-Capturing类方法，LS方法是基于Euler坐标系的计算方法[4]，它需要在整个区域内构造某种LS函数，运动界面用一个特殊的LS面表示，该LS面与整个区域上的LS函数像物理量一样随流体质点运动，因而在任何时候都可以重新构造界面。由于流体质点上的LS函数不是实际的物理量，它仅仅需要满足一个额外的方程，因此LS函数的加入不会对流体力学方程组产生影响，这种方法思路清晰，容易实现。

应用LS方法捕捉界面时，通常将LS函数ψ定义为距离函数，界面定义为$\psi=0$的位置，ψ满足$|\nabla\psi|=1$。但是，由于差分近似带来的计算误差，求解LS方程得到的ψ并不满足$|\nabla\psi|=1$的性质，而采用重新初始化的LS方法可迫使ψ保持为距离函数[5]。文献[6]应用LS方法对单个守恒律方程描述的接触间断进行了跟踪计算，本工作是在文献[6,7]的基础上，应用LS方法捕捉二维可压缩多介质流运动界面，这里界面位置仍定义为LS函数为0的面。在每一步流体力学方程求解之前，对LS函数进行重新初始化，以保证LS函数始终为距离函数。为了避免LS函数的加入可能对流体力学方程组产生影响，采用非耦合求解方法计算LS函数与流体力学方程组，重新初始化LS函数的计算采用五阶WENO格式[8]，流体力学方程组的计算采用二阶精度多介质流波传播差分格式[9]。文中对采用重新初始化和不采用重新初始化计算的多介质流界面运动进行了比较。

* **收稿日期**：2002-04-30；**修回日期**：2002-06-12

作者简介：柏劲松(1968—)，男，博士研究生.

2　多介质流体力学控制方程及其有限体积差分格式

对于大多数气体、液体和用冲击 Hugoniot 曲线描述的弹性密实介质,可以采用“Stiffen gas”状态方程来描述这一类物质的性质。根据混合网格中各组分压力平衡、速度连续等基本假定,运用介质的状态方程推导描述界面的有效方程(组),给出二维无粘性、无热传导多介质流场非守恒律方程组(1)。在方程组(1)中,ρ、u、v、p 分别表示密度、x 方向的速度分量、y 方向的速度分量和压力,E 表示单位质量的总能量,若用 e 表示比内能,则“Stiffen gas”状态方程表示为(2)式,其中 $E=e+(u^2+v^2)/2$;对于气体,γ 为比热比($\gamma>1$);对于液体和弹性密实介质,γ 为拟合常数,π 为具有粘性张量量纲的材料常数,γ 和 π 在边界附近为连续可微函数,在区域内部为该种物质的状态方程参数。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\dfrac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\dfrac{\partial(\rho u^2+p)}{\partial x}+\dfrac{\partial(\rho uv)}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\dfrac{\partial(\rho uv)}{\partial x}+\dfrac{\partial(\rho v^2+p)}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial(\rho E)}{\partial t}+\dfrac{\partial[(\rho E+p)u]}{\partial x}+\dfrac{\partial[(\rho E+p)v]}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{1}{\gamma-1}\right)+u\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{\gamma-1}\right)+v\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{\gamma-1}\right)=0\\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\gamma\pi}{\gamma-1}\right)+u\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\gamma\pi}{\gamma-1}\right)+v\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\gamma\pi}{\gamma-1}\right)=0\end{cases}\tag{1}$$

$$\rho e=(p+\gamma\pi)/(\gamma-1)\tag{2}$$

方程(1)可以写成矢量形式

$$\frac{\partial\boldsymbol{q}}{\partial t}+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})\frac{\partial\boldsymbol{q}}{\partial x}+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})\frac{\partial\boldsymbol{q}}{\partial y}=\boldsymbol{0}\tag{3}$$

这里 $\boldsymbol{q}$ 为矢量,$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为系数矩阵,按特征值为正和负可以分别将矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 分成两个对应的矩阵 $\boldsymbol{A}^+$、$\boldsymbol{A}^-$ 和 $\boldsymbol{B}^+$、$\boldsymbol{B}^-$。对于方程组(1)中的第三和第四个方程,采用波传播对流差分格式计算,非守恒控制方程组(1)的波传播有限体积差分格式可以统一写成

$$\boldsymbol{q}_{ij}^{n+1}=\boldsymbol{q}_{ij}^{n}+\Delta_{ij}^{\mathrm{up}}-\frac{\Delta t}{\Delta x}(\boldsymbol{F}_{i+1,j}^{n}-\boldsymbol{F}_{ij}^{n})-\frac{\Delta t}{\Delta y}(\boldsymbol{G}_{i,j+1}^{n}-\boldsymbol{G}_{ij}^{n})\tag{4}$$

这里 $\boldsymbol{F}_{ij}^{n}$、$\boldsymbol{G}_{ij}^{n}$ 分别为 x、y 方向流量的二阶修正项,$\Delta_{ij}^{\mathrm{up}}$ 为 Godunov 型迎风计算格式,其形式为

$$\Delta_{ij}^{\mathrm{up}}=-\frac{\Delta t}{\Delta x}(\boldsymbol{A}^+\,\Delta\boldsymbol{q}_{ij}+\boldsymbol{A}^-\,\Delta\boldsymbol{q}_{i+1,j})-\frac{\Delta t}{\Delta y}(\boldsymbol{B}^+\,\Delta\boldsymbol{q}_{ij}+\boldsymbol{B}^-\,\Delta\boldsymbol{q}_{i,j+1})\tag{5}$$

3　重新初始化 LS 方法描述界面运动方程求解

采用 LS 方法,捕捉界面 Σ 的运动,需要求解由 LS 函数 Ψ 定义的方程

$$\partial\Psi/\partial t+\boldsymbol{D}\cdot\nabla\Psi=0\tag{6}$$

$\boldsymbol{D}=(u,v)$,Ψ 的初值为距离函数,其定义如下

$$\Psi(x,y,0)=\begin{cases}d_{\min} & (x,y)\in\Omega\\ 0 & (x,y)\in\Sigma\\ -d_{\min} & (x,y)\notin\Omega\end{cases}\tag{7}$$

式中:Ω 是 Σ 包围的区域(不包含 Σ 本身),$d_{\min}$ 是 (x,y) 到 Σ 的最小距离。(6)式采用二阶精度波传播对流差分格式求解。当 $t>0$ 时,界面 $\Psi=0$ 沿其法线方向运动,但是由于方程(6)不可避免的差分近似误差,计算得到的 Ψ 并不保持距离函数的性质,因此需要求解一个校正方程,使得 Ψ 始终保持距离函

数性质，在 t_0 时刻，校正值 φ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi(x,y,\tau)}{\partial\tau}+S(\varphi_0)(|\nabla\varphi|-1)=0\\ \varphi(x,y,0)=\varphi_0(x,y)=\Psi(x,y,t_0)\end{cases}\tag{8}$$

其中 $S(\varphi_0)$ 表示为

$$S(\varphi_0)=\varphi/\sqrt{\varphi^2+\theta^2}\tag{9}$$

在二维时可取 $\theta=\min(\Delta x,\Delta y)$。在方程组(8)中，$\tau$ 为演化变量，当 τ 趋于无穷时，φ 相对于初值 $\Psi(x,t_0)$ 中Level Set函数值为 0 的面保持距离函数性质，即 $|\nabla\varphi|=1$。

方程(8)采用五阶 WENO 差分格式求解，差分格式为

$$\varphi(i,j,n+1)=\varphi(i,j,n)-\Delta\tau\cdot s_{i,j}\left[1-\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}\right]\tag{10}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\begin{cases}\mathrm{WENO5}(\varphi^{x-}_{i-2,j},\varphi^{x-}_{i-1,j},\varphi^{x-}_{i,j},\varphi^{x-}_{i+1,j},\varphi^{x-}_{i+2,j}) & s_{i,j}\geqslant 0\\ \mathrm{WENO5}(\varphi^{x+}_{i+2,j},\varphi^{x+}_{i+1,j},\varphi^{x+}_{i,j},\varphi^{x+}_{i-1,j},\varphi^{x+}_{i-2,j}) & s_{i,j}<0\end{cases}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\begin{cases}\mathrm{WENO5}(\varphi^{y-}_{i,j-2},\varphi^{y-}_{i,j-1},\varphi^{y-}_{i,j},\varphi^{y-}_{i,j+1},\varphi^{y-}_{i,j+2}) & s_{i,j}\geqslant 0\\ \mathrm{WENO5}(\varphi^{y+}_{i,j+2},\varphi^{y+}_{i,j+1},\varphi^{y+}_{i,j},\varphi^{y+}_{i,j-1},\varphi^{y+}_{i,j-2}) & s_{i,j}<0\end{cases}$$

其中一阶差分算子定义为

$$\varphi^{x-}_{i,j}=\frac{\varphi(i,j,n)-\varphi(i-1,j,n)}{\Delta x}\qquad \varphi^{x+}_{i,j}=\frac{\varphi(i+1,j,n)-\varphi(i,j,n)}{\Delta x}$$

$$\varphi^{y-}_{i,j}=\frac{\varphi(i,j,n)-\varphi(i,j-1,n)}{\Delta y}\qquad \varphi^{y+}_{i,j}=\frac{\varphi(i,j+1,n)-\varphi(i,j,n)}{\Delta y}$$

WENO5 定义为

$$\mathrm{WENO5}(a,b,c,d,e)=\frac{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}$$

$$\beta_1=\frac{a}{3}-\frac{7b}{6}+\frac{11c}{6},\quad \beta_2=-\frac{b}{6}+\frac{5c}{6}+\frac{d}{3},\quad \beta_3=\frac{c}{3}+\frac{5d}{6}-\frac{e}{6}$$

$$\alpha_1=1/(\varepsilon+IS_1)^2,\quad \alpha_2=6/(\varepsilon+IS_2)^2,\quad \alpha_3=3/(\varepsilon+IS_3)^2$$

$$IS_1=13(a-2b+c)^2+3(a-4b+3c)^2$$

$$IS_2=13(b-2c+d)^2+3(d-b)^2$$

$$IS_3=13(c-2d+e)^2+3(3c-4d+e)^2$$

其中，IS_1、IS_2、IS_3 称为光滑因子，ε 为一小量，在本文计算中取 $\varepsilon=10^{-6}$。

4 数值算例

4.1 两种气体的内聚界面计算(单界面问题)

计算区域为$[-1,1]\times[-1,1]$，两种气体在初始时刻，高压气体在外部，低压气体在内部的矩形区域内，由单一界面相隔。计算取值为(取无量纲量)

$$(p,\rho,u,v,\gamma,\pi)=\begin{cases}(1,1,0,0,1.4,0) & |x|>0.5,\ |y|>0.5\\ (10,10,0,0,1.2,0) & |x|\leqslant 0.5,\ |y|\leqslant 0.5\end{cases}$$

计算时间至 1。两种气体相互作用形成内聚激波、反射激波以及顶角效应等复杂波系结构。在 $t=1$ 时刻，密度压力分布见图 1，采用和不采用重新初始化 LS 方法捕捉的 Ψ 值比较见图 2，其中采用重新初始化的 LS 方法应用了窄带计算[7]。计算还给出了 $t=0,0.5,1$ 三个时刻，两种气体界面位置，如图 3 所示，计算网格为 400×400。从计算可见，采用重新初始化的 LS 方法，LS 函数值保持了较好的距离函数性质，能够比较好地描述图 1 中部两种气体的接触间断位置。

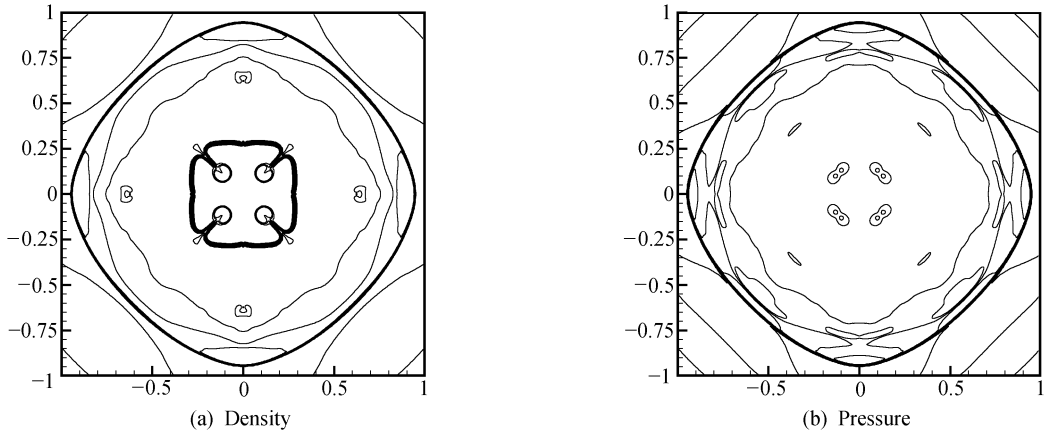


图 1　在 $t=1$ 时刻的密度和压力分布

Fig. 1　Distribution of the density and pressure at time $t=1$

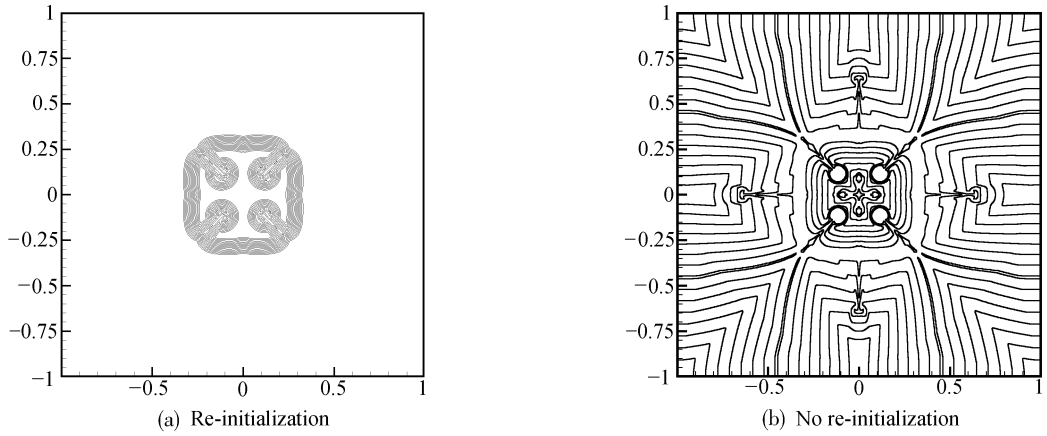


图 2　在 $t=1$ 时刻的 Ψ 分布

Fig. 2　Ψ distribution at time $t=1$

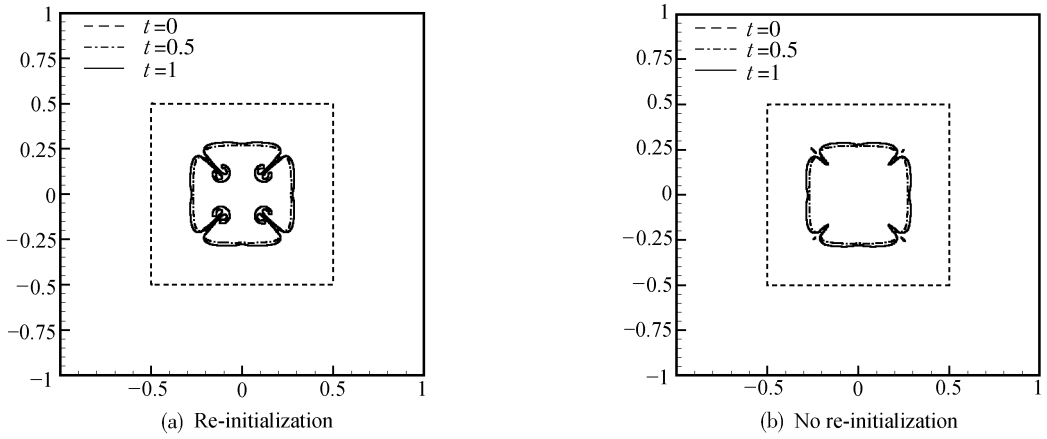


图 3　在 $t=0,0.5,1$ 时刻 $\Psi=0$ 的界面位置

Fig. 3　Interface positions of the LS function $\Psi=0$ at time $t=0,0.5,1$

4.2 高速碰撞的三种密实介质界面跟踪(双界面问题)

该算例计算高速铜飞片作用于铀和环氧基树脂的情况。计算区域为 1 m×1 m,计算网格分别取为 200×200 和 400×400。计算模型如图 4,在 $t=0$ 时,1 m×0.2 m 铜飞片以 1 km/s 的速度作用于 1 m×0.8 m 的铀和环氧基树脂,其中铀为圆柱形,轴心为(0.5 m,0.5 m),半径为 0.2 m。初始时各介质压力均取为 0.1MPa 。铜、铀和环氧基树脂的状态方程参数如表 1 所示。计算跟踪三种物质的两个交界面,给出了在 $t=600$ μs 时刻,采用和不采用重新初始化的 LS 方法在两种网格下捕捉的 LS 函数值 $\Psi=0$ 的界面位置,如图 5 所示。从计算可见,不采用重新初始化的 LS 方法计算的界面形状更锐利一些;采用与不采用重新初始化 LS 方法,粗网格计算均难以得到精细的界面特征,在细网格下,不采用重新初始化的 LS 方法计算的界面出现了破碎,而采用重新初始化的 LS 方法则未出现破碎。

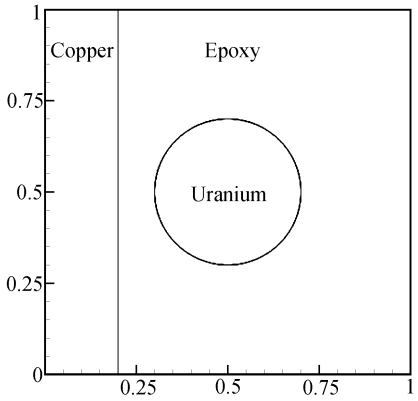


图 4 计算模型

Fig. 4 Configuration of the model

表 1 铜、铀和环氧基树脂的状态方程参数

Table 1 Equation of state parameters of copper, epoxy and uranium

Materials	ρ/(kg/m^3)	γ	π/(GPa)
Copper	8900	4.22	32.4
Epoxy	1185	2.94	3.2
Uranium	18930	3.52	33.9

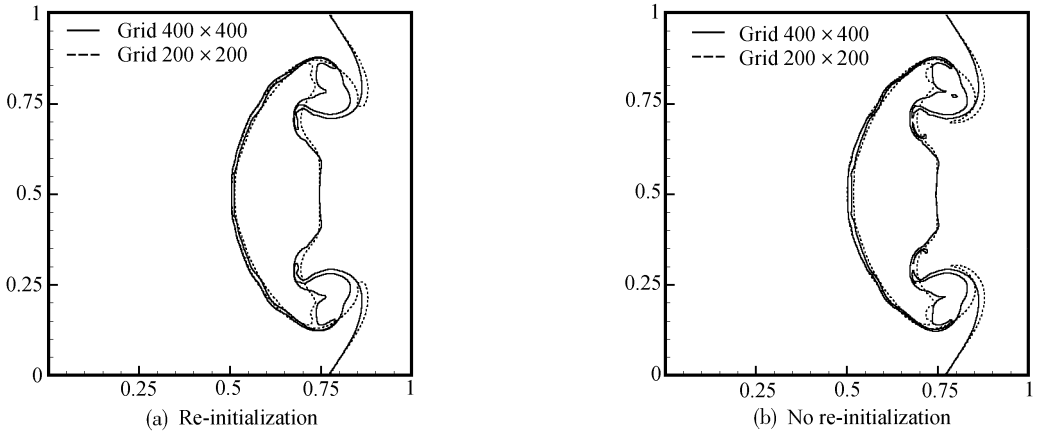


图 5 $t=600$ μs 时刻 LS 方法在两种网格下捕捉的 LS 函数值 $\Psi=0$ 的界面位置

Fig. 5 Interface positions of the LS function at time $t=600$ μs

4.3 四种气体相互作用的界面跟踪(三个界面问题)

计算区域为[−1,1]×[−1,1],四种气体初始时刻从外向内的分布如下(取无量纲量)

$$(p,\rho,u,v,\gamma,\pi)=\begin{cases}(5,5,0,0,1.2,0) & r>0.8\\ (2.5,2.5,0,0,1.4,0) & 0.5+0.3\sin 5\theta<r\leqslant 0.8\\ (0.5,0.5,0,0,1.6,0) & r\leqslant 0.5+0.3\sin 5\theta,\ |x|>0.1,\ |y|>0.1\\ (10,10,0,0,1.1,0) & |x|\leqslant 0.1,\ |y|\leqslant 0.1\end{cases}$$

其中:$r=\sqrt{x^2+y^2}$,$\theta=\sin^{-1}(y/r)$,计算模型如图 6 所示,四种物质以三个界面相隔。计算给出了在 $t=0.4$ 时刻,采用重新初始化的 LS 方法在 200×200 和 400×400 网格下捕捉的 LS 函数值 $\Psi=0$ 的界面位置,如图 7 所示。

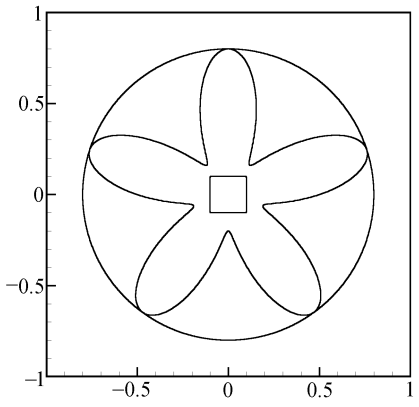


图 6　计算模型

Fig. 6　Configuration of the model

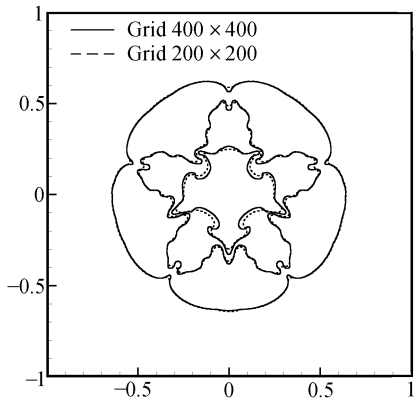


图 7　$t=0.4$ 时重新初始化 LS 方法在两种网格下捕捉的 LS 函数值 $\Psi=0$ 的界面位置

Fig. 7　Interface positions of the LS function at $t=0.4$ with re-initialization method

5　结　语

应用重新初始化的 LS 方法跟踪二维可压缩多介质流界面运动,采用高精度计算方法校正 LS 函数,使之保持距离函数性质,较好地捕捉到界面形状和位置。但由于 LS 函数是连续性函数,对于带有奇点的界面问题,还需要进一步发展带自适应的 LS 方法,减小误差。

References:

[1] Aslam A D, Bdzil J B, Stewart D S. Level Set Methods Applied to Modeling Detonation Shock Dynamics [J]. J Compt Phys, 1996, 126: 390－409.

[2] Chen S H, Zhang X, Bo J S. LS Method in Body-Fitted Coordinate System for Multi-Dimensional Non-Ideal Detonation Propagation [J]. Chinese Journal of High Pressure Physics, 2000, 14(4): 280－284. (in Chinese)
陈森华,张　旭,柏劲松. 贴体坐标系中多维非理想爆轰波阵面传播计算的 LS 方法 [J]. 高压物理学报, 2000, 14(4): 280－284.

[3] Tryggvason G, Bunner B, Esmaeeli A, et al. A Front Tracking Method for the Computations of Multiphase Flow [J]. J Comput Phys, 2001, 169: 708－759.

[4] Chang Y C, Hou T Y, Merriman B, et al. A Level Set Formulation of Eulerian Interface Capturing Methods for Incompressible Fluid Flows [J]. J Compt Phys, 1996, 124: 449－464.

[5] Sussman M, Fatemi E. An Efficient Interface Preserving Level Set Re-Distancing Algorithm and Its Application to Interfacial Incompressible Fluid Flow [J]. SIAM J Sci Comput, 1999, 20(4): 1165－1191.

[6] Aslam T D. A Level Set Algorithm Tracking Discontinuities in Hyperbolic Conservation Laws Ⅰ:Scalar Equations [J]. J Comput Phys,2001,167:413－438.
[7] Peng D P,Merriman B,Osher S,et al. A PDE-Based Fast Local Level Set Method [J]. J Compt Phys,1999,155:410－438.
[8] Jiang G S,Shu C W. Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes [J]. J Comput Phys,1996,126:202－228.
[9] Bo J S,Chen S H,Li P. Mumerical Methods of Multicomponent Flows of Non-Conservative Euler Equations [J]. Explosion and Shock Waves,2001,21(4):265－271. (in Chinese)
柏劲松，陈森华,李 平. 多介质流体非守恒律欧拉方程组的数值计算方法 [J]. 爆炸与冲击,2001,21(4):265－271.
[10] Cooke C H,Chen T -J. Continuous Front Tracking with Subcell Resolution [J]. J Sci Comput,1991,6:269－275.

Re-Initialized Level Set Method for Capturing 2D Compressible Multi-Fluid Interfaces

BAI Jing-Song,CHEN Sen-Hua

(*Institute of Fluid Physics,CAEP,Mianyang* 621900,*China*)

Abstract: We applied re-initialized level set method for enforcing level set function to preserve distancing character. Level set equation and fluid dynamic Euler equations were solved independently. Multi-fluid wave propagation method for fluid dynamic Euler equations and fifth order WENO scheme for re-initialization level set equation were used. Some comparable results for 2D compressible multi-fluid interface problems are given.

Key words: level set method;compressible multi-fluid;Euler interface capture

第四届国际流体力学学术会议会讯

第四届国际流体力学会议(The Fourth International Conference on Fluid Mechanics,ICFM-IV)将于2003年7月28～31日在大连召开,本次会议由中国力学学会主办。

国际流体力学会议是沈元院士、庄逢甘院士和国际流体力学权威学者 Y. C. Fung (冯元桢,美国),S. Leibovich (美国),H. Sato (日本),J. Zierep (德国) 分别代表美国 ASME、APS, 日本 JSFM、JSASS,德国 GAMM 和中国力学学会共同发起和组织的,1987年、1993年和1998年分别在北京已开过三届,会议取得了圆满成功,促进了我国学者和世界各国学者的了解和友谊。特别是通过会议,中国学者的工作引起世界流体力学界的关注。

本次会议科学委员会主席为庄逢甘院士,组织委员会主席为李家春教授。会议内容包括:湍流与流动稳定性;空气动力学;水动力学、工业与环境流体力学;生物流体力学;地球物理流体力学;等离子体和磁流体力学;多相流、非牛顿流和渗流;化学反应流;微尺度流动等等。

递送 ICFM-IV 的论文必须是没有公开发表的,每篇论文请寄送1页以内的详细摘要,讲清具体的目的、方法、计算结果。稿件一式2份寄送中国力学学会王薇收,请在信封上写明"ICFM-IV"征文,并请注明联系人(姓名、通讯地址、电话、传真、E-mail)。

联系人:王 薇、汤亚南、齐志红

地 址:北京海淀区北四环西路15号,中国力学学会办公室;邮政编码:100080

电 话:(010)6255 9588 传 真:(010)6255 9588

E-mail:icfm4@cstam.org.cn网 址:http://www.cstam.org.cn/icfm4/icfm4.html