文章编号:1000-5773(2008)04-0357-07

基于不分裂算法的 Euler 网格细分方法*

宁建国,刘 春,马天宝

(北京理工大学爆炸科学与技术国家重点实验室,北京 100081)

摘要:对考虑多物质相互作用的爆炸冲击数值模拟,Euler 型流体动力学方法是最有效的方法之一。采用维数不分裂算法处理 Euler 坐标下的纯物质网格,混合网格在 Youngs 界面重构技术的基础上进行细分,消除混合网格复杂的输运计算。对纯物质网格和细分后网格,都具体给出了往相邻 8 个网格输运的所有可能分配量的表达式。最后将该方法加入到自行开发的 MMIC-2D 通用多物质二维爆炸与冲击问题数值仿真程序中,数值算例显示该方法不仅能有效地提高计算精度,同时能降低问题的计算工作量,节省计算时间。

关键词:Youngs 算法;不分裂算法;细分网格;爆炸;数值模拟

中图分类号:O35 **文献标识码**:A

1 引 言

爆炸问题是研究大量能量在有限体积和极短时间内快速释放的过程。由于爆炸问题的瞬时性和高破坏性,使得爆炸问题的试验研究有很大的局限性,因此爆炸问题的数值研究赢得到了很大的发展空间。对于爆炸力学数值计算方法,常采用适用于计算大变形的 Euler 方法[1],Euler 方法采用的是固定的空间坐标系,Euler 网格是不变形的,物质通过网格边界流进流出,物质的大变形不直接影响时间步长的计算。但是,采用空间坐标系难于跟踪物质的变形,在计算过程中有混合格问题,不能精确处理物质界面,使得 Euler 方法的发展受到限制。关于混合网格界面跟踪算法人们提出了很多方法,如以 Youngs 技术[2]和 SLIC 技术为代表的 VOF 方法,以及 Level Set 方法等,其中 Youngs 技术是一种应用比较广泛的方法。

由于 Euler 方法中网格在空间固定,物质在网格内流动,因此,在确定了网格内物质界面的位置后,如何计算网格间物质的输运量便成为需要解决的一个难题。目前,应用比较广泛的是维数分裂算法,这种算法将物质输运分解成 r、z 两个垂直方向的合成,也就是在一个时间步内只考虑上下左右 4 个网格的输运,同时为了保证计算的精度,两个方向交替进行输运计算。而维数不分裂算法[3]是考虑界面在两个时刻的空间位置关系,直接计算流体从被计算网格中流出,进入其相邻 8 个网格的输运量。

维数不分裂算法在处理纯物质网格时简单有效,但是在处理混合网格时,由于同时需要输运计算两种物质,分类复杂、程序繁琐。我们借用维数不分裂算法的思想,在 Youngs 界面重构技术的基础上,将混合网格进行细分,直到全部为纯物质的子网格,以此来代替原来的混合网格。以原有的父网格的计算结果为初值,将质量、速度、压力、密度等网格量,通过差值或者直接赋值的方法赋给细分后的子网格,然后根据子网格的输运速度,同时考虑与相邻的 8 个网格的位置关系来确定输运最后的输运情况。

2 基本方程组

为了简化计算模型,需要进行一些基本假设:连续介质假设、局部热平衡假设、物质均匀和各向同性

* **收稿日期**:2008-01-08;**修回日期**:2008-04-10

基金项目:国家自然科学基金(10625208)

作者简介:宁建国(1963—),男,博士后,教授,博士生导师,主要从事计算爆炸力学研究. E-mail:jgning@bit.edu.cn

假设、理想塑性假设和弹性小变形假设。程序的守恒方程采用无粘、无热传导、忽略体力的二维轴对称非定常可压缩流体偏微分方程组。

质量守恒方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+u_z\frac{\partial \rho}{\partial z}+u_r\frac{\partial \rho}{\partial r}+\rho\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{\partial r u_r}{r\partial r}\right)=0 \tag{1}$$

动量守恒方程

$$\rho\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial S_{zz}}{\partial z}+\frac{\partial (rS_{rz})}{r\partial r} \tag{2}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial S_{rz}}{\partial z}+\frac{\partial (rS_{rr})}{r\partial r}+\frac{S_{rr}+S_{zz}}{r} \tag{3}$$

能量守恒方程

$$\rho\left(\frac{\partial e}{\partial t}+u_z\frac{\partial e}{\partial z}+u_r\frac{\partial e}{\partial r}\right)=-p\left[\frac{\partial (ru_r)}{r\partial r}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right]+S_{zz}\frac{\partial u_z}{\partial z}+S_{rr}\frac{\partial u_r}{\partial r}+S_{rz}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)-\frac{u_r(S_{rr}+S_{zz})}{r} \tag{4}$$

式中：t 为时间；r、z 为欧拉坐标；u_r、u_z 为 r 方向和 z 方向的速度分量；p、ρ、e 分别为压力、密度和比内能；S_{rr}、S_{zz}、S_{rz} 为偏应力。

计算分成 Lagrange 步和 Euler 输运步。在 Lagrange 步中，忽略对流项的影响，仅考虑压力和偏应力的梯度效应，得到网格速度和比内能的中间值。对于 Euler 输运步，通常采用维数分裂算法，r 方向和 z 方向交替输运，以保证格式的稳定性。由于维数分裂输运算法没有考虑斜对角网格的输运，所以计算精度不高，下面将讨论本研究采用的维数不分裂算法。

3 维数不分裂算法

维数不分裂算法主要用来处理纯物质网格，如图 1 所示，假定被计算网格的上格边和右格边的速度分别是 u_z 和 u_r。

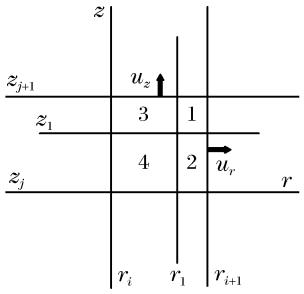


图 1 纯物质网格输运情况

Fig. 1 Transportation of pure cells

根据这两个速度，需要同时求出确定输运量大小的坐标 z_1 和 r_1，求解方法如下。先由两个格边的速度求出相对应的输运体积 V

$$V(3+1)=\pi\left[(C_r+0.5\Delta r)^2-(C_r-0.5\Delta r)^2\right]u_z\cdot\Delta t \tag{5}$$

$$V(2+1)=2\pi(C_r+0.5\Delta r)\cdot\Delta z\cdot u_r\cdot\Delta t \tag{6}$$

式中：$V(3+1)$ 代表 3 号和 1 号区域的体积总和，$V(2+1)$ 代表 2 号和 1 号区域的体积总和，求解体积采用轴对称方法，取 z 轴为对称轴。C_r 代表被计算网格的中心点 r 向坐标，Δr 和 Δz 分别是 r 向空间步长和 z 向空间步长，Δt 是计算时间步长。

然后根据求出的输运体积，求出坐标 z_1 和 r_1，公式如下

$$z_1=z_{j+1}-\frac{V(3+1)}{\pi(r_{i+1}^2-r_i^2)} \tag{7}$$

$$r_1=\sqrt{r_{i+1}^2-\frac{V(2+1)}{\pi\cdot\Delta z}} \tag{8}$$

式中：r_i、r_{i+1} 是被计算网格的格边 r 向坐标，z_j 和 z_{j+1} 被计算网格的格边 z 向坐标。

确定了 z_1 和 r_1 这两个坐标，根据公式(1)和公式(2)用类似的方法可以求出 1、2、3、4 号区域内的体积 $V(1)$、$V(2)$、$V(3)$、$V(4)$。

在维数分裂算法中，直接将 $V(3+1)$ 输运给上方的网格，$V(2+1)$ 输运给右方的网格，这样，1 号区域内的物质体积 $V(1)$ 就被重复输运一次，特别是当速度较大、1 号区域内物质较多时，误差就更大。更为合理的维数不分裂算法就是将 3 号区域内的物质体积 $V(3)$ 输运给上方网格，2 号区域内的物质体积 $V(2)$ 输运给右方网格，同时将 1 号区域内的物质体积 $V(1)$ 输运给右上角的网格。对于其它不同的输

运方向,计算公式和输运分配方法都是同理可得。

4　网格细分方法

网格细分方法主要用来处理混合网格,混合网格的细分基于 Youngs 界面重构技术[4]。Youngs 技术的思想是用混合网格及周围 8 个网格的介质体积份额来确定混合网格中物质的界面,在一个混合网格中界面被近似地看作直线,四周 8 个网格的介质体积份额用来确定界面直线的法线方向,混合网格本身的体积份额用来确定界面直线的位置。如图 2 所示,虚线为实际物质界面,斜直线为网格内两种物质的近似分界面,由于混合网格内同时有两种物质,要同时考虑两种物质的处理,需要讨论的情况比较多。现在将混合网格进行细分,使混合网格变成小的纯网格,图 3 就是细分后的情况,混合网格和周边的纯物质网格都进行了细分,用细分后的子网格边界来代替原有斜直线来作为物质近似界面。

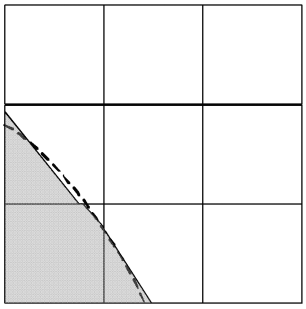


图 2　细分前 Youngs 方法确定的混合网格界面

Fig. 2　Material interface by Youngs' interface reconstruction algorithm in a mixed grid

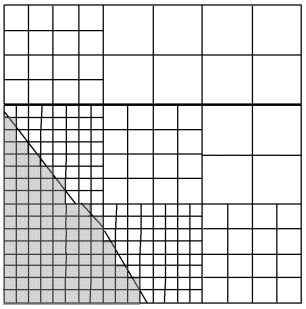


图 3　细分后的子网格确定的物质界面

Fig. 3　Subgrids and material interfaces after subdivision

4.1　网格细分参数

在图 3 中,混合网格细分了 3 层,网格细分层次参数 D_L 设置为 3,也就是说混合网格细分变成了 $(2^3)^2=64$ 个子网格,D_L 设置越高,精度越高。同时为了提高精度,混合网格周边的几层纯物质网格同样需要细分。遵循的原则就是离混合网格越近的那层纯网格细分层次参数 D_L 越接近混合网格的细分层次参数 D_L。图 3 中网格细分层次参数 N_L 设置为 2,所以混合网格相邻两排网格的细分层次参数 D_L 分别为 2 和 1。

4.2　子网格的物质种类

细分网格的目的就是去掉混合网格,所以细分后的子网格最后都必须是纯网格。对于细分前原父网格是纯网格的子网格,物质种类容易确定,但是对于细分前原父网格是混合网格的子网格,物质种类的确定需要有一套处理方法。

如图 4 所示,Youngs 技术确定的界面为一条实直线,且斜率大于零,r_a 为该直线与网格格边交点的 r 向坐标,我们过任意一个子网格的格心做一条与 Youngs 界面线平行的虚线,它与网格上边界的交点 r 向坐标为 r_x,如果 $r_x>r_a$,说明该子网格在 Youngs 界面线的下方,该子网格的物质种类为 Youngs 界面下方的物质种类,如果 $r_x<r_a$,说明该子网格在 Youngs 界面线的上方,该子网格的物质种类为 Youngs 界面上方的物质种类。对于 Youngs 技术确定的界面直线的其它类型,同理推断可得。

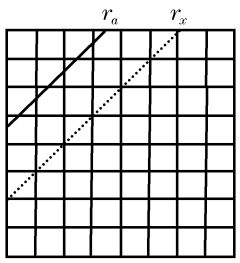


图 4　确定子网格物质类型的方法

Fig. 4　Method for determining the material type of the subgrids

4.3 子网格的格心速度

假设任意一个子网格的 r 向和 z 向格心速度分别为 $V_{R_{I,J}}$ 和 $V_{Z_{I,J}}$，其计算公式如下

$$V_{R_{I,j}}=\begin{cases}\dfrac{\square r_j\cdot u_{rj-1}+\square r_{j-1}\cdot u_{rj}}{\square r_{j-1}+\square r_j} & 0\leqslant J<\dfrac{2^{DL}}{2}\\ \dfrac{\square r_{j+1}\cdot u_{rj}+\square r_j\cdot u_{rj+1}}{\square r_j+\square r_{j+1}} & \dfrac{2^{DL}}{2}\leqslant J<2^{DL}\end{cases} \tag{9}$$

$$V_{Z_{I,j}}=\begin{cases}\dfrac{\square z_i\cdot u_{zi-1}+\square z_{i-1}\cdot u_{zi}}{\square z_{i-1}+\square z_i} & 0\leqslant I<\dfrac{2^{DL}}{2}\\ \dfrac{\square z_{i+1}\cdot u_{zi}+\square z_i\cdot u_{zi+1}}{\square z_i+\square z_{i+1}} & \dfrac{2^{DL}}{2}\leqslant I<2^{DL}\end{cases} \tag{10}$$

式中：$\square r_j$ 是子网格格心到原父网格格心的 r 向距离，$\square r_{j-1}$ 是左边子网格格心到原父网格相邻的前一个父网格格心的 r 向距离，$\square r_{j+1}$ 是右边子网格格心到原父网格相邻的后一个父网格格心的 r 向距离；u_{rj} 是子网格所在的原父网格格心的 r 向速度，u_{rj-1} 是子网格所在原父网格相邻的前一个父网格格心的 r 向速度，u_{rj+1} 是子网格所在原父网格相邻的后一个父网格格心的 r 向速度。(10)式中 z 方向的定义类同(9)式。

4.4 子网格的输运

由于每一个子网格都是纯网格，输运计算的方法就可以类似原来父网格中纯网格的输运。每一个子网格的格心坐标和速度已经求出，那么就容易得到一个输运计算步后子网格的坐标，分别用 $C_{R2_{I,J}}$ 和 $C_{Z2_{I,J}}$ 表示

$$\begin{aligned}C_{R2_{I,J}}&=C_{R1_{I,J}}+V_{R_{I,J}}\cdot\Delta t\\ C_{Z2_{I,J}}&=C_{Z1_{I,J}}+V_{Z_{I,J}}\cdot\Delta t\end{aligned} \tag{11}$$

式中：$C_{R1_{I,J}}$ 和 $C_{Z1_{I,J}}$ 是子网格原来的坐标，Δt 是时间步长。

根据输运后子网格的坐标和原父网格的格边坐标的关系，可以判断出子网格内的物质是否输运出了原父网格。这里采用第 3 节不分裂输运算法，同时考虑周边 8 个网格的输运，图 5 给出了被计算网格 (i,j) 中，子网格速度 $V_{R_{I,J}}\geqslant 0$ 和 $V_{Z_{I,J}}\geqslant 0$ 时，所有可能输运到周边 8 个网格的相对位置情况。

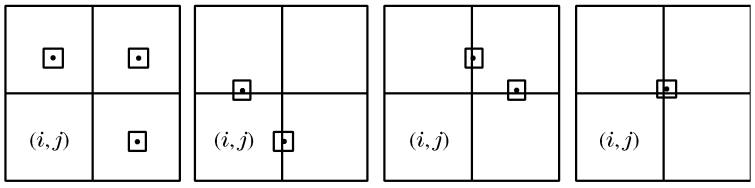


图 5 子网格输运到周边网格可能出现的情形

Fig. 5 Cases for the transportation of the potential subgrid to the surrounding grids

一个子网格输运结束后，将子网格的输运量累加求和，即为父网格的输出量，如公式(12)，其中 M 代表体积、质量、能量等，k 表示输运出去的子网格个数。对于周围 8 个网格中的一个接受网格，得到输出量中的一部分后者全部，如公式(13)，k' 表示接受到子网格个数，其中 $k'\leqslant k$。

$$M_{ij}^{n+1}=M_{ij}^{n}-\sum_{k}m_k \tag{12}$$

$$M_{ij}^{n+1}=M_{ij}^{n}+\sum_{k'}m_{k'} \tag{13}$$

5 数值算例考核

(1) 二维平面上圆在平移流场中的运动

计算域大小为(2×2)，网格划分为(200×200)个，时间步长为 0.001，平移速度场：$u_z(z,r)=u_r(z,r)=1.0$。

图 6 中给出了计算时间步 n 分别为 0、250、500、750 时的形状,从图中可以看出,圆在平移场中保持形状良好。

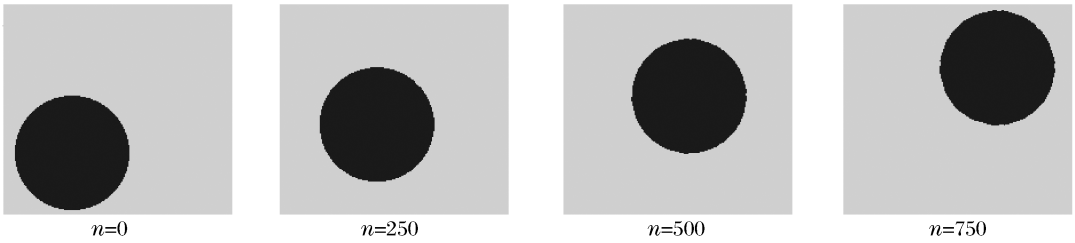


图 6　二维平面上圆在平移流场中的运动

Fig. 6　Image of disk at different time steps in the translational flow field

(2) 二维平面上圆缺在旋转流场中的运动[5](Zalesak 问题)

计算域大小为($\pi\times\pi$),网格划分为(200×200)个,时间步长为 0.001,旋转速度场由下式给出:$u_z(z,r)=-\pi(r-\pi/2)$;$u_r(z,r)=\pi(z-\pi/2)$。

图 7 中给出了计算时间步 n 分别为 0、500、1 000、1 500 时的形状,从图中可以看出,圆缺在该旋转速度场中,形状保持得基本完好,在 $n=1\,500$ 时,尖角稍微有些变形。

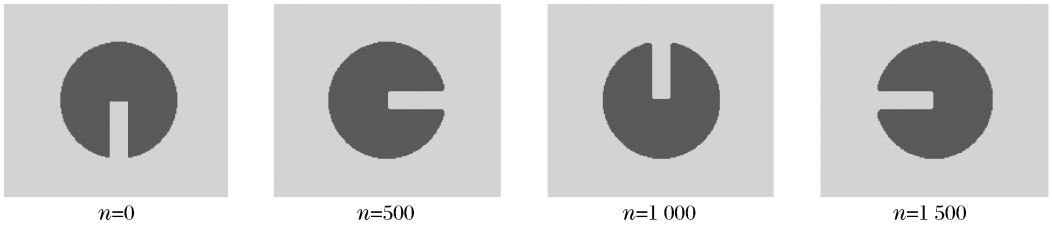


图 7　二维平面上圆缺盘在旋转流场中的运动图像

Fig. 7　Image of clevis object at different time steps in the rotating flow field

(3) 二维平面上圆盘在剪切流场中的运动[5]

计算域大小为($\pi\times\pi$),网格划分为(200×200)个,时间步长为 0.001,剪切速度场由下式给出:$u_z(z,r)=-\pi\sin z\cos r$;$u_r(z,r)=\pi\cos z\sin r$。

图 8 中给出了计算时间步 n 分别为 0、1 000、1 500、2 000 时的形状,从图中可以看出,圆在剪切流场的变形中,边界形状保持良好。

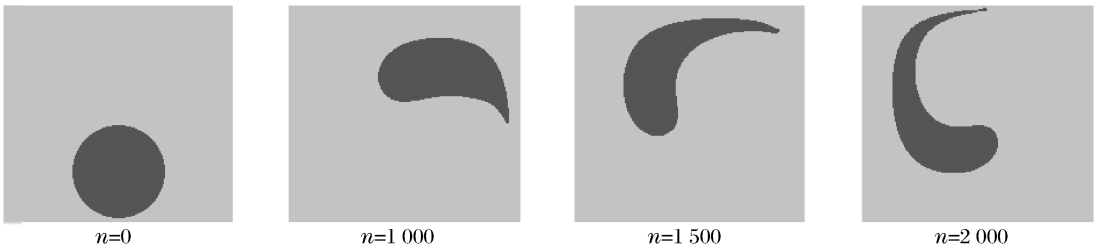


图 8　二维平面上圆盘在剪切流场中的运动图像

Fig. 8　Image of disk at different time steps in the shear flow field

(4) 轴对称坐标系下聚能射流的数值模拟[6-7]

数值模拟采用的几何模型如图 9(a)所示,以 z 轴为对称轴,计算中采用 1/2 结构进行求解。炸药为 B 炸药,其爆轰产物采用 JWL 状态方程,并采用简单燃烧模型(The Programmed Burn Model)来模拟爆轰波在炸药中的传播过程。药型罩材料为 45 钢,采用 Mie-Grüneisen 状态方程。空气近似采用理想气体状态方程。

图 9 给出了药形罩在炸药爆轰作用下压垮直至形成射流的过程，由于采用了在界面附近网格进行细分的方法，所以物质界面处更加清晰和光滑。同时在图 9(e)中可以看出最后形成的杵和射流都很明显，特别是形成的细长射流更加符合实际情况。

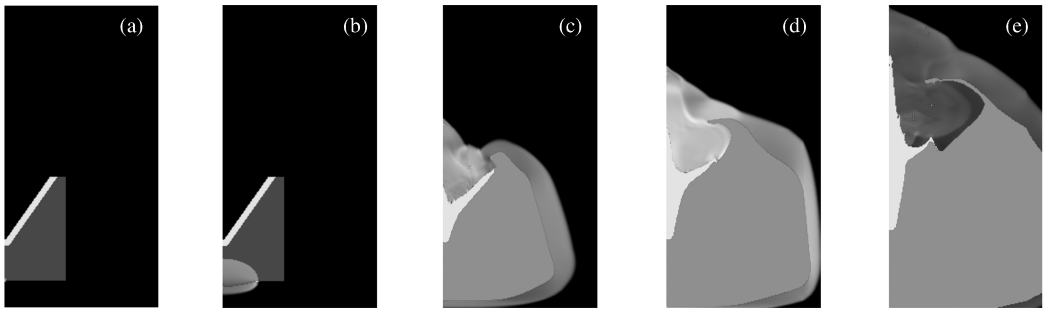


图 9 轴对称坐标系下聚能射流的形成

Fig. 9 The image of jet formation in symmetrical axial coordinates

(5) 模拟计算点源爆炸

模拟点源爆炸的炸药为 10 t TNT，相当于初始能量 $E_0=50$ GJ，距爆心不同位置计算其压力值，其模拟计算结果与经验公式结果的对比如表 1 所示。在表 1 中，我们采用下面的经验公式[8]计算点源爆炸压力值。

$$p=0.84\frac{\sqrt[3]{\omega}}{r}+2.7\left(\frac{\sqrt[3]{\omega}}{r}\right)^2+7.0\left(\frac{\sqrt[3]{\omega}}{r}\right)^3+1 \qquad 1\leqslant\bar{r}\leqslant 10\sim 15 \tag{14}$$

式中：p 代表压力；ω 为有效装药量(kg)；r 代表被计算点与点源炸药的距离；$\bar{r}=r/\sqrt[3]{\omega}$ 称为对比距离，当 $E_0=50$ GJ 时，相当于 21.5 m$<\bar{r}<$215 m。不难看出，数值模拟的结果与经验公式计算结果比较一致。

表 1 模拟点源爆炸结果经验公式值的对比

Table 1 Contrast of our results with those calculated from the empirical formula

r/(m)	Results obtained by Eq. (14)/(MPa)	Our results /(MPa)	r/(m)	Results obtained by Eq. (14)/(MPa)	Our results /(MPa)
25	0.721	0.652	85	0.150	0.150
35	0.417	0.370	95	0.141	0.141
45	0.278	0.260	105	0.134 6	0.135
55	0.216	0.208	115	0.130	0.131
65	0.182	0.179	130	0.125	0.126
75	0.162	0.161	150	0.120	0.113

6 结 论

(1) 从理论上分析，维数分裂的输运算法只考虑上下和左右网格的输运，是一种明显存在误差的算法，每一个网格的计算都会出现重复物质的输运。考虑斜对角输运的不分裂算法才是一种更为精确的方法。

(2) 基于 Youngs 技术和不分裂算法的网格细分方法，消除了混合网格，在进一步简化程序的同时，也提高了计算精度和速度。

(3) 最终的数值算例考核显示，这种在界面处细分网格的方法有效地降低了计算工作量，节省了计算时间，同时在界面处的计算精度也得到了提高。

References:

[1] Ning J G, Ma T B, Wang C. Theoretical Foundation and Its Application of MMIC2D Multi-Material Elastic-Plastic Hydrodynamic Program [J]. Journal of Taiyuan University of Technology, 2005, 36(6): 732-734. (in Chinese)
宁建国,马天宝,王　成. 多物质二维流体动力学程序 MMIC 的理论基础及其应用研究 [J]. 太原理工大学学报, 2005, 36(6): 732-734.

[2] Youngs D L. Time-Dependent Multi-Material Fluid Dynamics [A]//Morton K W, Baines M J. New York: Academic Press, 1982: 273-285.

[3] Hu Y Y, Zhu K Q, Xi B S. Unsplit Youngs' Algorithm for the Fractional Volume Function [J]. Journal of Tsinghua Univ(Sci&Tech), 2002, 42(2): 232-234. (in Chinese)
胡影影,朱克勤,席葆树. 计算体积分数函数的 Youngs 不分裂算法 [J]. 清华大学学报(自然科学版), 2002, 42(2): 232-234.

[4] James E P J, Elbridge G P. Second-Order Accurate Volume-of-Fluid Algorithms for Tracking Material Interfaces [J]. J Comp Phys, 2004, 199: 465-502.

[5] Liu R X, Shu Q W. Some New Methods Computational Fluid Dynamics [M]. Beijing: Science Press, 2003: 201-208. (in Chinese)
刘儒勋,舒其望. 计算流体力学的若干新方法 [M]. 北京:科学出版社, 2003: 201-208.

[6] Ning J G, Wang C, Ma T B. Numerical Analysis of the Shaped Charged Jet with Large Cone Angle [J]. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 2006, 7(1): 71-78.

[7] Hao L, Wang C, Ning J G. Numerical Simulation of a Shaped Charge Jet [J]. Transactions of Beijing Institute of Technology, 2003, 23(1): 19-21. (in Chinese)
郝　莉,王　成,宁建国. 聚能射流问题的数值模拟 [J]. 北京理工大学学报, 2003, 23(1): 19-21.

[8] Eighth Department of Beijing Institute of Industry. Explosion and Effect [M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1979: 260-287. (in Chinese)
北京工业学院八系. 爆炸及其作用 [M]. 北京:国防工业出版社, 1979: 260-287.

Eulerian Grid Subdivision Algorithm Based on Unsplit Method

NING Jian-Guo, LIU Chun, MA Tian-Bao

(*State Key Laboratory of Explosion Science and Technology, Beijing Institute of Technology, Beijing* 100081, *China*)

Abstract: When dealing with the problems of multi-material interaction, hydrodynamics numerical methods of Euler is one of the most effective ways. When using unsplit method to deal with pure cells in Euler coordinate, mixed cells are subdivided based on Youngs' interface reconstruction algorithm which can avoid complicated transport calculation. This paper gives all of the possible distribution modes to eight neighboring cells of both pure ones and subdivided ones. In the end, this unsplit method is added into numerical simulation program of MMIC-2D universal multi-material two-dimension explosion and impact which is developed by ourselves. The simulation results verify that our method can not only improve calculation precision efficiently, but also reduce workload and save computation time.

Key words: Youngs algorithm; unsplit method; grid subdivision; explosion; numerical simulation