

不可压缩 Neo-Hookean 超弹性膜拉伸大变形 失效行为的键基近场动力学模拟^{*}

朱 磊 张江涛^{**} 郑佳乐 张 梅 翟鹏程

(武汉理工大学物理与力学学院新材料力学理论与应用湖北省重点实验室, 武汉, 430070)

摘 要 为了建立键基近场动力学(Peridynamics, PD)模型模拟不可压缩 Neo-Hookean (NH)超弹性材料的拉伸变形和失效行为,首先基于 PD 应变能密度与连续介质力学理论中不可压缩 NH 超弹性应变能密度的等价关系,得到了与 PD 键近场范围内的变形梯度相关的 PD 键微势能函数和力密度函数,建立了二维 NH 超弹性键基 PD 模型.然后采用所建立的 PD 模型计算了超弹性膜在单向拉伸和不同双轴拉伸速度比下的变形和名义应力-伸长率曲线,通过与连续介质力学理论中 NH 超弹性模型理论值和有限元计算结果的对比,验证了所建立 PD 模型的合理性.最后采用所建立的 PD 模型计算了含中心圆孔的超弹性膜在单向和不同双轴拉伸速度比载荷下的变形和破坏过程,结合裂尖处物质点的应变能密度和损伤的演化分析,阐明了双轴拉伸载荷条件对 NH 超弹性膜力学性能和破坏行为的影响机制.

关键词 近场动力学,超弹性本构,大变形,破坏,双轴

DOI: 10.19636/j.cnki.cjasm42-1250/o3.2024.047

0 引言

超弹性材料能承受大应变,且在卸载后不产生永久残余变形,如天然和人工合成橡胶、水凝胶和动物软组织等都具有超弹性特征.由于这类材料具有强回弹性、高延展性、高抗腐蚀和粘接性等优异性能,在航空航天、海洋工程、建筑结构、机械装置、仿生和智能装备等许多领域都有广泛应用.由于超弹性材料在使用过程中常常会承受大变形甚至发生失效,因此建立能准确预测超弹性材料在大变形条件下的力学性能和损伤失效行为的数值仿真方法,对这类材料的工程应用和结构安全评估都非常重要.

尽管采用有限元、扩展有限元等基于连续介质力学(Continuum Mechanics, CM)理论的数值计算方法模拟这类材料的大变形和失效行为取得了丰硕的成果,但由于超弹性材料近似不可压缩和非线性弹性等特征,采用这类方法分析超弹性材料的大变

形力学行为时需要克服严重的网格畸变和体积锁定等问题^[1,2].且采用这类方法在模拟材料损伤和裂纹扩展时需要引入对应判据,计算结果还存在网格相关性^[3].近年来有研究者采用相场方法实现了超弹性材料的大变形和失效行为的模拟^[4,5].但作为一种基于有限元理论框架开发的数值计算方法,网格畸变问题仍然存在,且该方法不能实现材料体破碎和裂纹面闭合等过程的模拟^[3,6].

近场动力学(Peridynamics, PD)方法是 Silling^[7]于 2000 年提出的一种基于非局域思想的无网格数值模拟方法.该方法设物质点间具有长程作用力,基于对物质点间作用力的积分建立其运动方程,不涉及连续介质力学理论中对位移场空间微分的计算,避免了模拟裂纹扩展时由于位移不连续造成的奇异性问题.在 PD 模型中,通过物质点间键的断裂能自然地实现材料损伤、裂纹初始化及复杂裂纹扩展过程的模拟,不需要预设损伤位置和裂纹扩展路径,因此一经提出就受到广泛关注,并成功应用

^{*} 国家自然科学基金项目(52374202)资助.

2024-10-14 收到修改稿, 2024-10-15 网络首发.

^{**} 通讯作者. E-mail: zhjiangtao@whut.edu.cn.

于脆性材料^[8-10]、弹塑性材料^[11]和复合材料^[12]等的破坏过程模拟。

PD模型可分为键基PD(bond-based PD)模型^[7]和态基PD(state-based PD)模型^[13]。最早在2005年Silling和Bobaru^[14]就尝试用键基PD模型计算超弹性膜和纤维的大变形和破坏行为。2010年Silling和Askari^[15]还基于键基PD模型计算了橡胶材料拉伸导致各向异性的特性,并通过实验观察验证了该模型的有效性。而Bellido等^[16]研究发现当PD模型的“近场范围”(horizon)趋于零时,超弹性键基PD模型并不收敛于连续介质力学框架下的超弹性本构模型。为了将传统连续介质力学本构应用于PD模型,2007年Silling等^[13]发展了态基PD本构对应模型(Constitutive correspondence model)。该方法结合使用PD理论框架下的物质点变形梯度和连续介质力学理论框架下的本构模型计算物质点之间的力态向量,从而能直接将传统力学本构模型应用于PD计算,因此在提出以后受到了相对更多的关注和应用研究。而研究发现这种方法存在非物理的零能模式(unphysical zero-energy mode)^[17]或数值振荡(numerical oscillation)^[3]等问题,在应用于超弹性材料的模拟时需要进行合理的修正以得到稳定的数值解,因此在其提出后的近十年内在超弹性材料的大变形和失效模拟方面都鲜有报道。

自2017年以来,受PD理论的发展和超弹材料工程应用的驱动,有关PD理论在超弹性材料大变形和失效模拟方面的研究开始逐渐增多。在键基PD模拟方面,Madenci^[18]将应变不变量表示为PD积分的函数,构建了经典超弹性模型对应的PD键应变能密度函数。Bang和Madenci^[19]将等双轴、平面拉伸和单轴拉伸条件下不可压缩Neo-Hookean(NH)超弹性模型的应变能密度函数分别等效为PD键的应变能密度函数,得到了适用于不同加载条件的键基PD模型,模拟了含不同缺陷的超弹性膜在不同载荷条件下的变形。但他们没有给出超弹性材料破坏过程的模拟。Yin等^[3,20]基于本构对应模型重新定义了适用于NH和Mooney-Rivlin(MR)超弹性材料的PD键应变表达式和键力密度函数,结合使用人工阻尼方法消除向前欧拉积分的

数值振荡问题,模拟了超弹性材料的大变形和断裂过程。他们^[20]还基于热力学理论重新定义了MR超弹性材料的PD键应变表达式和键力密度函数,模拟了超弹性凝胶在钝体冲击下的损伤破坏行为。但在他们构建的键力密度函数中引入了一个需要根据实验校订的常数,且该常数随材料的几何结构形式、缺陷和载荷形态的变化而变化。Tamur和Li^[21]基于Arruda-Boyce超弹性模型建立了聚合物分子链伸长率与PD键伸长率间的关系,使得PD键的伸长率具有微观物理意义,再基于Kuhn-Grün模型提出了PD键的微势能函数,通过与实验和其它数值分析结果的对比验证了该方法的正确性。

在态基PD模拟方面,由于超弹性材料的近似不可压缩和非线性弹性特征,克服其零能模式或数值振荡变得更加困难。近五年来,研究者们针对超弹性材料的力学特性,对PD本构对应模型的力态向量提出了不同的修正方法,或对物质点运动方程采用稳定性更高的数值解法,以得到稳定的数值解。如Zhou和Yao^[22,23]在态基PD模型中引入质量守恒方程计算物质点密度变化,建立了光滑态基PD模型,计算了可压缩NH超弹性材料在准静态和动态载荷下的大变形和断裂行为。Li等^[24]在态基PD对应模型的力态向量中引入一个与材料力学性能相关的微增量作为修正项,结合使用自适应动态松弛算法消除数值振荡,计算了近似不可压缩NH超弹性材料大变形和失效行为。Roy和Behera等^[6,25]采用Chen^[17]提出的键相关变形梯度代替原始PD对应模型中的点相关变形梯度计算PD键的力态向量,并发展了PD运动方程的弱形式及相应的迭代求解格式,从而克服了超弹性材料PD对应模型的数值振荡问题。由于基于键相关变形梯度的PD对应模型相比原始PD对应模型没有增加额外的计算量,且概念清晰,结合适当的PD运动方程的数值求解方法,能有效抑制数值震荡,最近两年在超弹性材料的断裂模拟方面受到较多的研究和应用^[26-29]。

从以上可以看出,由于态基PD对应模型可以直接将传统连续介质力学本构模型应用于PD计算,是近几年有关超弹性材料力学行为的PD模拟方法研究方面的主要发展方向。但该方法涉及变形梯度、应力张量、形状张量及形状张量的逆等大量张

量运算,计算量巨大,而键基 PD 模型受到的关注相对较少,虽然超弹性键基 PD 模型的收敛性还需进一步研究和验证,但其计算量相对态基 PD 模型小得多,且经过适当的修正,键基 PD 模型也能很好的模拟超弹性材料的大变形和失效行为^[18-21].

本文首先基于不可压缩 NH 超弹性本构的应变能密度函数特征,提出 PD 键的微势能与键伸长率间的函数关系.然后利用二维条件下 PD 键伸长率与键近场范围内主伸长率之间的函数关系,计算以主伸长率表示的 PD 应变能密度函数.通过 PD 应变能密度与经典 NH 模型应变能密度的对比,确定 PD 键的微势能函数中的参数,从而建立适用于 NH 超弹性材料的二维键基 PD 模型.然后利用所建立的二维 PD 模型计算无缺陷和含圆孔的超弹性膜在不同拉伸载荷下的力学性能,通过与理论值和有限元计算结果的对比验证所建立 PD 模型的正确性.最后采用所建立的 PD 模型计算含圆孔的超弹性膜在单向和双向拉伸载荷下的力学性能和破坏过程,分析载荷条件对其力学性能和破坏特征的影响机制.

1 基于不可压 Neo-Hookean (NH)超弹性本构的键基 PD 模型

1.1 键基 PD 理论基础

在键基近场动力学方法中,任意物质点 \mathbf{X} 的运动方程可表示为:

$$\rho(\mathbf{X})\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X},t) = \int_{H_X} \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})dV + \mathbf{b}(\mathbf{X}) \quad (1)$$

式中 $\rho(\mathbf{X})$ 和 $\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X},t)$ 分别是物质点 \mathbf{X} 的密度和加速度, $\mathbf{b}(\mathbf{X})$ 是物质点 \mathbf{X} 受到的外载荷密度. $H_X := \{\mathbf{X}' \in R: \|\mathbf{X}' - \mathbf{X}\| \leq \delta\}$ 为求解域内物质点 \mathbf{X} 的“近场范围”,如图 1 所示, δ 为近场范围尺寸.近场范围内物质点的集合称为物质点 \mathbf{X} 的簇,即该簇内其它物质点 \mathbf{X}' 与 \mathbf{X} 间存在相互作用力. $\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 为物质点间的力密度函数,也称为近场动力学本构力函数^[30]. $\boldsymbol{\xi}$ 为物质点 \mathbf{X}' 与 \mathbf{X} 在初始构型下的相对位置矢量, $\boldsymbol{\eta}$ 为它们之间的相对位移矢量,即:

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{X}' - \mathbf{X}, \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}'(\mathbf{X}',t) - \mathbf{u}(\mathbf{X},t) \quad (2)$$

$\mathbf{u}'(\mathbf{X}',t)$ 和 $\mathbf{u}(\mathbf{X},t)$ 分别为物质点 \mathbf{X}' 和 \mathbf{X} 在 t 时刻的位移矢量.

采用物质点将求解域离散后,方程(1)可写为:

$$\rho(\mathbf{X})\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X},t) = \sum_{\mathbf{X}' \in H_X} \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})V(\mathbf{X}') + \mathbf{b}(\mathbf{X}) \quad (3)$$

式中 $V(\mathbf{X}')$ 代表物质点 \mathbf{X}' 的体积.

对均质材料,PD 键的力密度函数 $\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 可由下式计算:

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) = \frac{\partial \omega(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}} \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) \quad (4)$$

式中 $\omega(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 为 PD 键的微势能函数,是与材料的变形和力学特性相关的标量值函数.

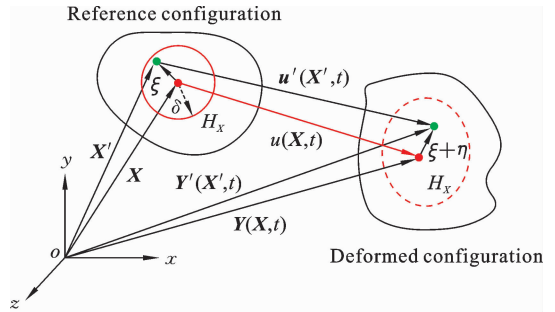


图 1 PD 键和近场范围示意图

Fig. 1 Schematic diagram of PD bond and its horizon

在均匀离散的键基 PD 模型中,物质点 \mathbf{X} 的能量密度为:

$$W_{PD}(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \int_{H_X} \omega(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})dV \quad (5)$$

上式中系数 1/2 表示物质点 \mathbf{X} 只占与其连接的 PD 键能量的一半.

式(4)中 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 为表征 PD 键断裂情况的参数,当键伸长率 λ 超过临界伸长率 λ_c 时,PD 键发生不可逆断裂,则其值设为 0,即:

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) = \begin{cases} 1, & \lambda < \lambda_c \\ 0, & \text{other} \end{cases} \quad (6)$$

式中 $\lambda = |\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}| / |\boldsymbol{\xi}|$.

根据 PD 键的断裂参数,Silling 和 Askari^[31] 将物质点 \mathbf{X} 的损伤定义为:

$$D(\mathbf{X},t) = 1 - \frac{\int_{H_X} \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi})dV}{\int_{H_X} dV} \quad (7)$$

1.2 不可压缩 NH 超弹性键基 PD 模型

1.2.1 不可压缩 NH 超弹性 PD 键力密度函数

对不可压缩超弹性材料,其主伸长率应满足

$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1$, 式中 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为材料变形后沿三个方向的主伸长率. 对满足 NH 超弹性本构方程的均质材料, 物质点的应变能密度为:

$$W_{CM} = \frac{\mu}{2} \left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2\lambda_2^2} - 3 \right) \quad (8)$$

其中 W_{CM} 表示传统连续介质理论框架下的应变能密度函数, μ 是剪切模量. 上式对二维和三维问题都成立.

在平面应变条件下受单向拉伸载荷时, NH 超弹性材料的拉伸应力-伸长率关系为:

$$\sigma = \mu(\lambda - \lambda^{-3}) \quad (9)$$

在双向拉伸条件下, 两主方向的拉伸应力-伸长率关系为:

$$\sigma_1 = \mu(\lambda_1 - \lambda_1^{-3}\lambda_2^{-2}) \quad (10)$$

$$\sigma_2 = \mu(\lambda_2 - \lambda_2^{-3}\lambda_1^{-2}) \quad (11)$$

在键基 PD 模型中, PD 键的力密度函数 $f(\xi, \eta)$ 一般表示为键伸长率 λ 的函数, 为建立满足 NH 超弹性特性的 PD 键力密度函数, 参考等双轴拉伸加载条件下 W_{CM} 的表达式:

$$W_{CM} = \frac{\mu}{2} (2\lambda_e^2 + \lambda_e^{-4} - 3) \quad (12)$$

上式中 λ_e 为等双轴拉伸加载的主伸长率.

式(12)表明物质点的应变能密度可表示为 λ^2 和 λ^{-4} 的线性组合. 考虑在实际工作状态下材料的复杂应力状态, 假设在一般变形状态下物质点的应变能密度函数中这两项的系数与变形特征相关. 若进一步假设 PD 键的微势能函数与键初始长度 $\xi = |\xi|$ 成正比^[31], 则 PD 键的微势能函数可表示为:

$$w(\lambda, \xi) = \frac{1}{4}c(2\beta_1\lambda^2 + \beta_2\lambda^{-4} - 3)\xi \quad (13)$$

则 PD 键的力密度函数为:

$$f(\xi, \eta) = c(\beta_1\lambda - \beta_2\lambda^{-5}) \frac{\eta + \xi}{|\eta + \xi|} \varphi(\xi, \eta) \quad (14)$$

上式中 c 为待定的键刚度系数, β_1, β_2 表示与物质点变形状态相关的修正系数.

对二维平面问题, 设 PD 键邻域内的两个主伸长率分别为 λ_1 和 λ_2 , 则该 PD 键的伸长率可由下式计算^[14]:

$$\lambda = \sqrt{\lambda_1^2 \cos^2 \theta + \lambda_2^2 \sin^2 \theta} \quad (15)$$

θ 表示 PD 键与第一主伸长率 λ_1 所在方向的夹角.

将式(15)带入(13), 再将式(13)带入式(5), 积

分可得键基 PD 理论框架下物质点的应变能密度为^[31]:

$$W_{PD}(\mathbf{X}) = \frac{h}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\delta w(\lambda, \xi) \cdot \xi d\xi d\theta = \frac{\pi ch \delta^3}{12} \left(\beta_1 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \beta_2 \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{2\lambda_1\lambda_2} \frac{1}{\lambda_1^2\lambda_2^2} - 3 \right) \quad (16)$$

上式中 h 为二维模型的厚度.

对比式(16)与式(8), 要使得 PD 应变能密度与经典 NH 模型的应变能密度等价, 式(13)中系数分别为:

$$c = \frac{6\mu}{\pi h \delta^3}, \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_2 = \frac{2k}{(k^2 + 1)} \quad (17)$$

式中 $k = \lambda_1/\lambda_2$, 为键邻域内的两主伸长率之比, 反映了 PD 键邻域内的变形状态.

需要说明的是, 以上推导过程中式(15)仅对二维平面问题成立, 而物质点的应变能密度可表示为 λ^2 和 λ^{-4} 的线性组合这一假设要求模型在两个方向受拉时才成立. 这是因为在平面应力条件下受单向拉伸载荷时, NH 模型中物质点的应变能密度与 λ^2 和 λ^{-1} 相关, 其变形刚度也比双向受拉时小得多. 而在平面应变条件下受单向拉伸载荷时, 可近似认为模型在拉伸方向和面外两方向受拉, 且满足式(16)所要求的模型厚度不变的条件. 因此本文提出的 PD 键的应变能密度函数式(13)对二维平面模型受面内双向拉伸和平面应变条件下的单向拉伸两种情况都适用, 下面的计算也证明了这一点.

1.2.2 PD 键近场范围内的变形梯度

从式(13)和式(17)可以看出, 所建立的 NH 超弹性 PD 键微势能函数与 PD 键邻域内的主伸长率之比 $k = \lambda_1/\lambda_2$ 有关. 根据 Chen^[17] 的工作, 键相关变形梯度 \mathbf{F} 可由下式计算:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}_c \cdot \mathbf{K}_r^{-1} \quad (18)$$

$$\text{其中} \quad \mathbf{K}_r = \int_{H_X} \omega(\xi) \xi \otimes \xi dV_\xi \quad (19)$$

$$\mathbf{K}_c = \int_{H_X \cap H_{X'}} \omega(\xi) \mathbf{Y}(\xi) \otimes \xi dV_\xi \quad (20)$$

$$\mathbf{Y}(\xi) = \mathbf{Y}'(\mathbf{X}', t) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}, t) \quad (21)$$

其中 \mathbf{K}_r 为初始构型下的形状张量(shape tensor), \mathbf{K}_c 为变形状态下的形状张量, $\mathbf{Y}(\mathbf{X}, t)$ 和 $\mathbf{Y}'(\mathbf{X}', t)$ 分别为物质点 \mathbf{X} 和 \mathbf{X}' 在变形状态下的空间位置矢量(如图 1 所示). $\mathbf{Y}(\xi)$ 表示键 ξ 变形后的键矢量, 即

$\mathbf{Y}\langle\xi\rangle = \xi + \boldsymbol{\eta}$, $\omega(\xi)$ 为键 ξ 的权值, $H_X \cap H_{X'}$ 为物质点 \mathbf{X} 和 \mathbf{X}' 的近场范围的交集.

利用式(20)计算物质点 \mathbf{X} 和 \mathbf{X}' 之间键的作用力时, 键力不满足牛顿第三定理, 即 $\mathbf{f}(-\boldsymbol{\eta}, -\xi) \neq -\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \xi)$. 为建立满足 NH 超弹性本构的键基 PD 模型, 定义如图 2 所示键近场范围 $H_\xi: = \{\mathbf{X}'' \in R: \|\mathbf{X}'' - \mathbf{X}_c\| \leq \delta_\xi\}$, δ_ξ 为键 ξ 的近场范围尺寸, \mathbf{X}_c 为键 ξ 的中心点, 即在初始构型下与键中心点距离小于 δ_ξ 的所有物质点的集合为键 ξ 的簇. 则变形状态下键 ξ 的形状张量 \mathbf{K}_c 为:

$$\mathbf{K}_c = \int_{H_\xi} \omega(\xi) \mathbf{Y}\langle\xi\rangle \otimes \xi dV_\xi \quad (22)$$

计算得到 PD 键近场范围内的变形梯度 \mathbf{F} 后, 通过计算 $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$ 的特征值即可得到键近场范围内主伸长率的平方, 即 λ_1^2 和 λ_2^2 .

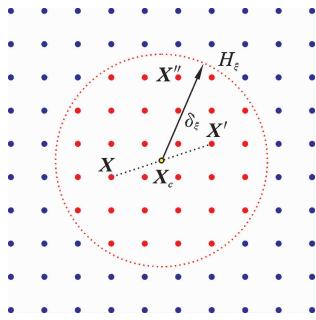


图 2 PD 键的近场范围示意图

Fig. 2 Schematic diagram of the horizon of the PD bond

2 模型验证与应用

2.1 NH 超弹性膜的拉伸模拟

以图 3 所示二维平面模型为例, 设其长 W 和宽 L 均为 40 mm, 厚度 h 为 2 mm, 将模型均匀离散为等大小的正方形物质点. 设材料的剪切模量 $\mu = 0.7575$ MPa, 密度 $\rho = 1250$ kg/m³. 采用显式欧拉积分算法求解物质点运动方程(式(3)), 且不考虑重力的作用. 取物质点近场范围尺寸 $\delta = 3.015\Delta x$, 键近场范围尺寸 $\delta_\xi = 3.015\Delta x$, Δx 为物质点边长. 在进行单向拉伸计算时(图 3(a)), 在模型上下两端加 3 层物质点为边界层, 上下施加对称拉伸载荷. 在进行双轴拉伸加载时(图 3(b)), 模型四边均添加 3 层物质点为边界层, 对模型上下和左右分别施加对称拉伸载荷.

首先基于等双轴拉伸加载计算材料的名义应力-伸长率曲线, 通过与连续介质力学理论计算结果的对比, 分析时间步长和物质点尺寸对计算结果收敛性和准确性的影响. 根据 Silling 和 Askari 的工作^[31], 键基 PD 模型的临界时间步长可由下式计算:

$$\Delta t_{cr} = \psi \sqrt{\frac{2\rho}{\sum_i V_i c}} \quad (23)$$

式中 ψ 为安全系数, V_i 为第 i 物质点的体积.

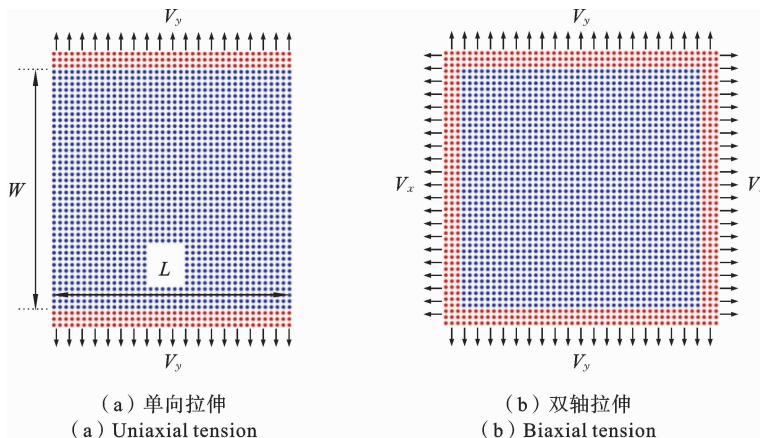


图 3 PD 模型示意图

Fig. 3 Schematic diagram of PD models

对本文所使用的材料和 PD 模型,当 $\psi = 1.0$ 时, $\Delta t_{cr} = 2.04 \times 10^{-5}$ s. 本文取时间步长 Δt 分别为 2.0×10^{-5} s、 1.75×10^{-5} s、 1.5×10^{-5} s、 1.25×10^{-5} s 和 1.0×10^{-5} s 进行计算,物质点尺寸 $\Delta x = L/80$,拉伸速度 $V_x = V_y = 10$ mm/s,最终主伸长率为 1.5. 计算发现当 $\Delta t = 2.0 \times 10^{-5}$ s 时不能得到稳定的计算结果,其它时间步长计算得到名义应力-伸长率曲线如图 4(a)所示,在时间步长小于 1.75×10^{-5} s 的条件下,时间步长对结构稳定性和名义应力-伸长率曲线没有显著影响. 考虑到后续计算的稳定性,本文取时间步长 $\Delta t = 10^{-5}$ s,此时安全系数 ϕ 约为 0.5.

的影响,设物质点尺寸 Δx 分别为 $L/40$ 、 $L/80$ 和 $L/120$,计算得到名义应力-伸长率曲线如图 4(b)所示. 可以看出,随物质点尺寸的减小,PD 模型计算结果逐渐趋近于连续介质力学理论结果. 物质点尺寸 Δx 分别为 $L/40$ 、 $L/80$ 和 $L/120$ 时,主伸长率为 1.5 条件下 PD 模型预测的名义应力误差分别为 3.7%、2.0% 和 1.4%. 过小的物质点尺寸没有显著提升计算的精确度,但会大幅增加计算时间, $\Delta x = L/80$ 和 $L/120$ 时模型的计算时间分别为 $\Delta x = L/40$ 时计算时间的 3.9 倍和 7.8 倍. 在本文以下计算中,取物质点尺寸 $\Delta x = L/80$,此时 PD 键刚度 $c = 2.11 \times 10^{17}$ N/m⁶.

为分析物质点尺寸对 PD 模型计算结果收敛性

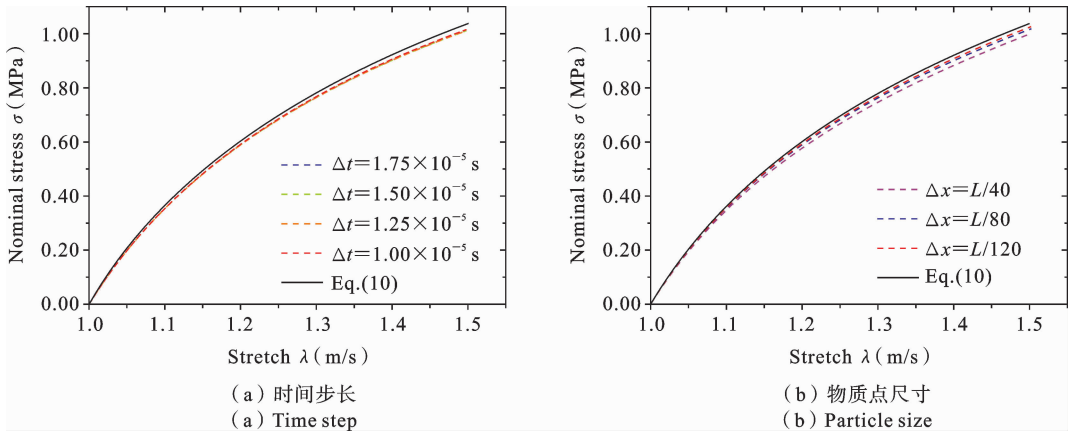


图 4 PD 模型的收敛性分析

Fig. 4 Convergence analysis of PD model

根据所确定的计算条件,计算了 NH 超弹性膜在不同双轴拉伸速度比和平面应变单向拉伸条件下的名义应力-主伸长率曲线. 计算结果如图 5 所示,图中 β 为两方向的拉伸速度比,即 $\beta = V_x/V_y$, Y 方向为主拉伸方向. 在不同加载条件下,PD 模型计算的 Y 方向名义应力-伸长率曲线与理论解基本一致. 在 X 方向上 PD 模型计算值略小于理论值, $\beta = 0.2$ 时 X 方向误差最大,计算终止时的相对误差约 9.1%. 这是键基 PD 模型的泊松比限制造成的. 在平面应变单向拉伸条件下,本模型计算得到的泊松比约为 1/4,满足平面应变键基 PD 模型的泊松比条件^[13]. 即本模型还不能精确反应材料的不可压缩特性对材料变形行为的影响.

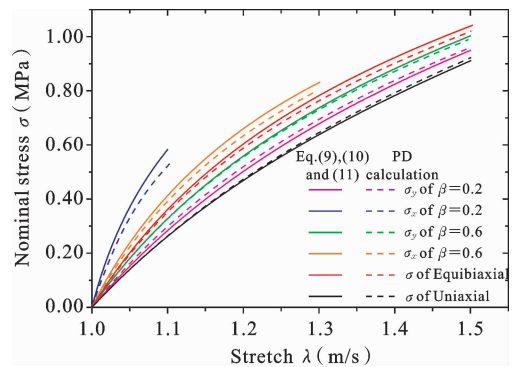


图 5 PD 模型计算结果与理论应力-伸长率曲线对比图

Fig. 5 Comparison of PD calculations with the classical theoretical stress-stretch curves

2.2 含中心圆孔超弹性膜拉伸变形与失效模拟

2.2.1 拉伸变形分析

为进一步研究所建立的 PD 模型在 NH 超弹性材料非均匀变形模拟方面的适用性,在图 3 所示模型的中心开一半径为 5 mm 的圆孔,即将与模型中心距离小于 5 mm 的物质点删除,得到含中心圆孔的超弹性模型.采用所建立的模型计算在单向拉伸载荷下的变形,通过与 Abaqus 有限元软件计算结果的对比分析 PD 模型的准确性.图 6 为两种计算方法得到的孔边节点的 Y 方向位移对比图.其中角度为 20° 和 160° 时误差最大,相对误差约 6.8%.图 7 为拉伸变形量 $\Delta u=3$ mm 时 PD 模型和有限元模型计算得到的 Y 方向位移云图,可以看出 PD 计算结果与有限元模拟结果基本一致,在拉伸变形过程中圆孔变为椭圆孔.

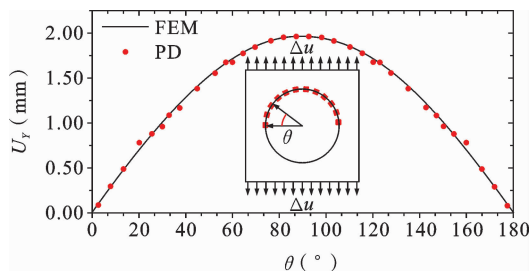


图 6 PD 模型和有限元计算的圆孔边 Y 方向位移对比图($\Delta u=3$ mm)

Fig. 6 Comparison of the Y-direction displacements along the hole edge calculated by PD model and finite element method ($\Delta u=3$ mm)

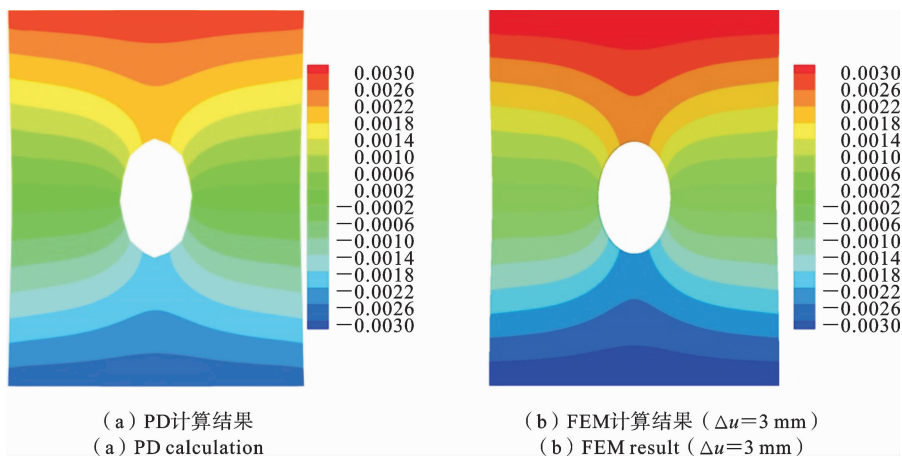


图 7 含中心圆孔超弹性膜 Y 方向位移云图

Fig. 7 Y-direction displacement contour of hyperelastic membrane with central hole

2.2.2 拉伸断裂模拟

为了评估所建立的 PD 模型在 NH 超弹性材料的拉伸损伤断裂过程模拟方面的有效性,设 PD 键的临界伸长率 $\lambda_c=1.5$,对含中心圆孔模型进行单向拉伸加载和不同加载速度比的双轴拉伸加载,计算模型内的损伤发展和裂纹扩展过程.计算得到的 Y 方向(主拉方向)的拉力-位移曲线如图 8 所示,图中实线为有限元计算结果.在双轴拉伸条件下,当 X 和 Y 方向的拉伸速率不同时有限元结果比 PD 模型计算结果略小,这也是由于键基 PD 理论的泊松比限制造成的.从图 8 可以发现随双轴拉伸速度比的

减小,材料的刚度和失效时的拉力也减小,而失效时的位移量增加.单向拉伸条件下具有最低的极限拉力和最大的拉伸失效位移.等双轴拉伸条件下($\beta=1$)最早发生损坏,破坏时 Y 方向的位移和拉力分别约 6.48 mm 和 35.8 N.在双轴拉伸速度比 $\beta=0.6$ 的条件下,破坏时 Y 方向的位移和拉力分别为 6.75 mm 和 34.6 N.在拉伸速度比 $\beta=0.2$ 的条件下,破坏时 Y 方向的位移和拉力分别为 7.00 mm 和 33.0 N.在单向拉伸条件下,破坏时 Y 方向的位移和拉力分别为 7.01 mm 和 29.8 N,破坏时的位移量与 $\beta=0.2$ 时基本相同,但承受的拉力最小,这是由于材料在单向

拉伸加载时的刚度比双向拉伸加载时要低造成的.

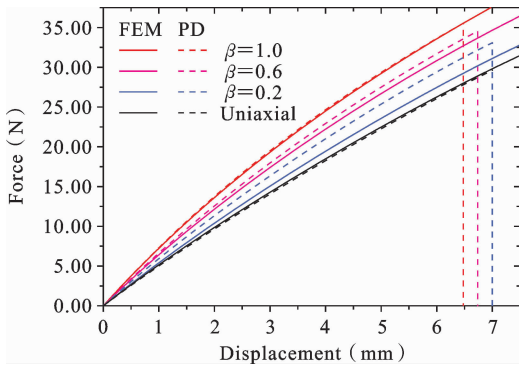
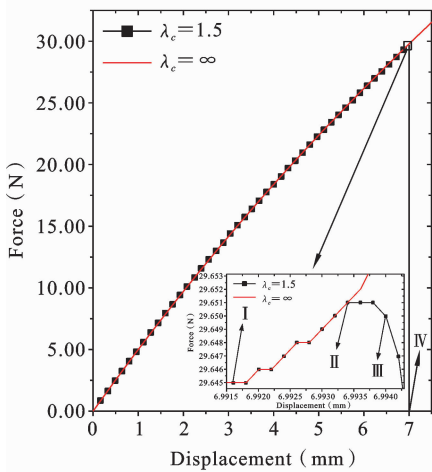


图 8 不同加载情况主拉伸方向力-位移曲线

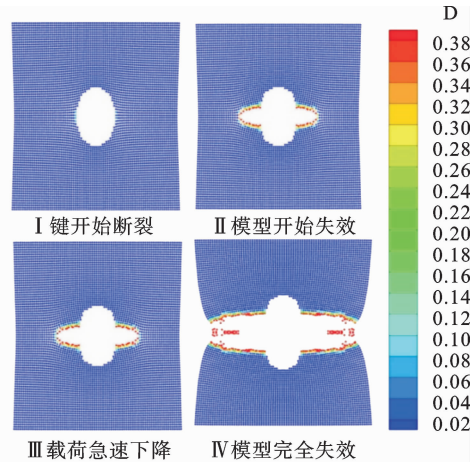
Fig. 8 Force-displacement curves in the principle tensile direction under different load conditions



(a) 拉力-位移曲线

(a) The uniaxial tensile force-displacement curve

图 9 给出了单向拉伸加载条件下模型的拉力-位移曲线和损伤断裂发展过程. 从图可以看出在损伤发生前圆孔变为了椭圆孔. 在拉伸变形为 6.9915 mm 时, 圆孔左右两端的应力集中造成沿拉伸方向 PD 键的拉伸断裂 (图 9(b)-I), 但经应力重分配后局部键的断裂没有造成结构整体承载能力的降低. 在拉伸变形为 6.9936 mm 时, 由于左右两端大量键的拉伸断裂形成宏观裂纹 (图 9(b)-II), 导致结构整体承载力开始下降. 此后随拉伸位移量的增加裂纹迅速扩展 (图 9(b)-III), 承载力急剧下降, 直至形成贯穿裂纹而失效. 拉伸断裂的断口出现明显颈缩 (图 9(b)-IV), 整个拉伸断裂过程呈现出典型的 I 型裂纹扩展特征.



(b) 失效过程图
(b) Failure process

图 9 含中心圆孔超弹性膜单向拉伸断裂的 PD 模拟

Fig. 9 PD simulation of uniaxial tensile fracture of hyperelastic membrane with a central circular hole

双轴拉伸模拟结果表明, 在形成宏观裂纹前, 孔边的局部损伤也对结构的整体承载能力也没有明显影响. 而与单向拉伸加载时的响应显著不同的是, 在双轴拉伸加载时模型中的裂纹扩展均存在分叉现象, 且一旦出现裂纹分叉, 裂纹会沿分叉方向迅速发展, 导致结构的承载能力迅速下降并发生结构失效. 图 10 给出了不同双轴拉伸速度比条件下模型的最终破坏图. 计算发现随双轴拉伸速度比的增加, 裂纹分叉发生得越早, 裂纹分叉的方向角 (图 10(a) 所示 θ) 越大, 造成失效时的拉伸变形量减小. 等双轴拉伸

条件下, 沿四个方向均出现了对称的裂纹扩展, 导致模型在更小的变形条件下发生破坏.

为进一步分析在双轴拉伸载荷下出现裂纹分叉的机理, 图 11 给出了在双轴拉伸速度比 $\beta=0.2$ 条件下裂纹开始出现分叉时的局部应变能云图 (图 11(a)) 和损伤云图 (图 11(b)). 图中第 34994 步为出现裂纹分叉的临界载荷步, 此时裂纹尖端的应力集中导致该区域物质点具有高的应变能密度, 但应变能最高的点偏离了裂尖位置, 出现在图中 P 点所示位置. 此时正对裂尖的两个物质点损伤值较大 (如图

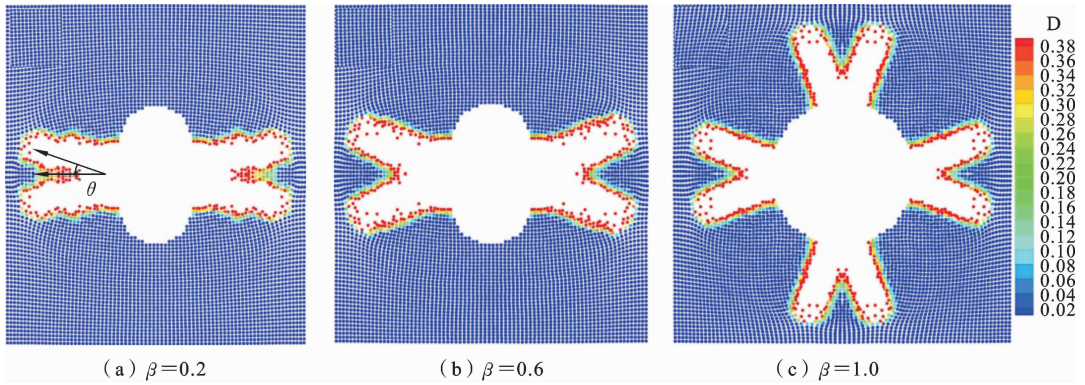


图 10 不同双轴拉伸速度比载荷下的断裂形貌图

Fig. 10 PD prediction of the fracture morphology caused by the biaxial tension with different biaxial tension speed ratios

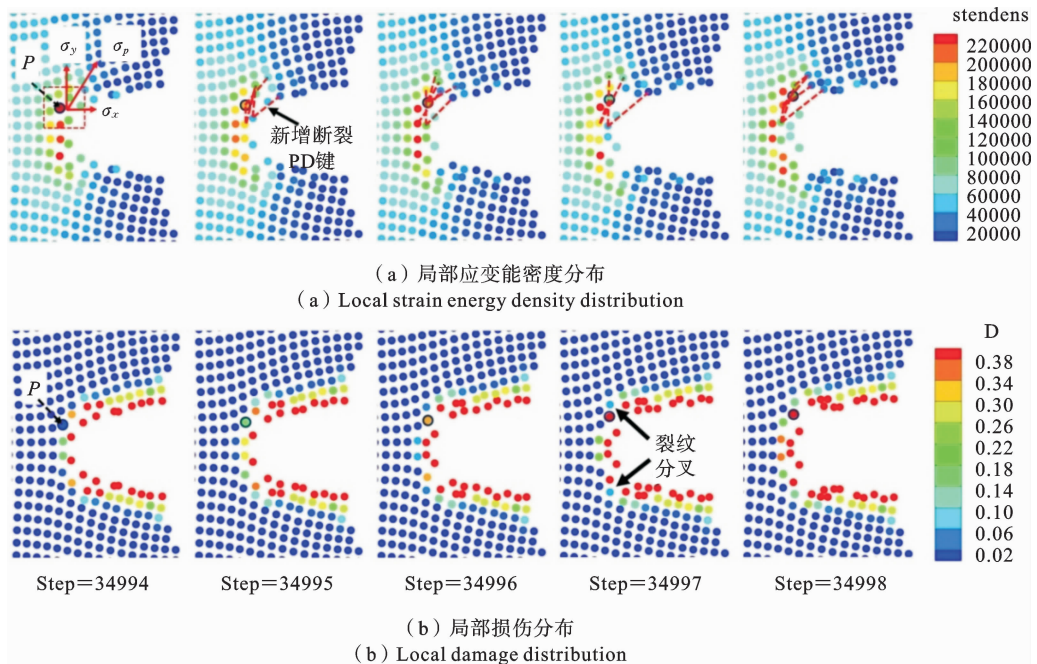


图 11 双轴拉伸速度比 $\beta=0.2$ 载荷下裂纹分叉演化过程

Fig. 12 Evolution of crack bifurcation at the crack tip under biaxial tension with the speed ratio $\beta=0.2$

11(b)所示),表明该物质点的 PD 键已大量断裂,而 P 点损伤量仍然很低,表明其周围的 PD 键仍保持完好.因此此时 P 点近场范围内会受到 X 和 Y 两方向拉力的作用,其主拉应力方向会与 Y 方向呈一定夹角(如图 11(a)中 σ_p 所示),且该主拉应力比裂尖正面区域的主拉应力高.这导致随拉伸变形量的增加,在 P 点附近区域沿主拉应力方向的 PD 键会大量断裂,图 11(a)中的虚线表示该时间步相比上一时间步新增断裂的 PD 键,这些键的断裂也导致

P 点应变能降低而损伤迅速增加.在第 34997 步时,在 P 点附近区域已出现明显的分叉裂纹(如图 11(b)中第 34997 步图所示).再继续增加拉伸变形量时,在分叉的裂纹尖端也出现了明显的应力集中(如图 11(a)中第 34998 步应变能云图),这导致分叉裂纹在其裂尖周围主拉应力作用下发生 I 型裂纹扩展,并成为主要裂纹扩展方向,最终导致模型失效.

随双向拉伸载荷比的增加水平方向的拉力也会

增大,这导致 P 点进一步往上偏移,其近场范围内主拉应力也会增强,且主拉应力与 Y 方向的夹角也会随拉伸载荷比的增加而变大. 这些因素导致在大的拉伸速度比条件下试样会在更小的拉伸量下发生裂纹分叉,从而导致模型失效时的变形减小,且裂纹分叉的方向角随拉伸载荷比的增加而增大. 计算发现在 $\beta=0.2$ 、 $\beta=0.6$ 和 $\beta=1.0$ 时,分叉裂纹与水平方向的夹角 θ (如图 10(a)所示)分别约为 18° 、 24° 和 29° .

3 结论

本文基于 PD 模型的应变能密度与传统不可压缩 NH 超弹性应变能密度的等价关系,得到了与键近场范围内主伸长率之比相关的 PD 键微势能函数和键力密度函数,结合键近场范围内变形梯度的计算确定其主伸长率,从而建立了二维不可压缩 NH 超弹性键基 PD 模型. 然后采用所建立的 PD 模型计算了单向拉伸和双轴拉伸载荷下超弹性膜的等效应力-应变曲线和变形分布,通过与传统 NH 超弹性模型理论值和有限元计算结果的对比验证了所建立 PD 模型的合理性. 最后采用所建立的模型计算了含中心圆孔的超弹性膜在不同拉伸载荷下的变形和破坏过程,分析了载荷特征对其力学响应和破坏过程的影响,发现在双轴拉伸载荷下含孔超弹性膜中裂纹会出现分叉现象,且分叉角度与两方向拉伸速度比有关. 本文所建立的 PD 模型考虑了键近场范围内变形状态对键力的影响,模型参数也不需通过实验校正. 以上分析表明尽管本文提出的 NH 超弹性 PD 模型计算的泊松比为 $1/4$,对受面内双向拉伸和平面应变条件下的单向拉伸两种载荷作用下的 NH 超弹性膜,该模型能给出比较准确的计算结果,计算误差不超过 10% .

参考文献

- [1] Wang Y F, Cen S, Li C F, Zhang Q. High-performance unsymmetric 8-node hexahedral element in modeling nearly-incompressible soft tissues[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2023, 260: 108647.
- [2] Foucard L, Aryal A, Duddu R, Vernerey F. A coupled Eulerian-Lagrangian extended finite element formulation for simulating large deformations in hyperelastic media with moving free boundaries[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2015, 283(1): 280-302.
- [3] Yin B B, Sun W K, Zhang Y, Liew K M. Modeling via peridynamics for large deformation and progressive fracture of hyperelastic materials[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2023, 403: 115739.
- [4] Wu J, McAuliffe C, Waisman H, Deodatis G. Stochastic analysis of polymer composites rupture at large deformations modeled by a phase field method [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2016, 312: 596-634.
- [5] Xing C, Yu T, Sun Y, Wang Y. An adaptive phase-field model with variable-node elements for fracture of hyperelastic materials at large deformations[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2023, 281: 109115
- [6] Roy P, Behera D, Madenci E. Peridynamic simulation of finite elastic deformation and rupture in polymers[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2020, 236: 107226.
- [7] Silling S A. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2000, 48(1): 175-209.
- [8] 李双, 吕海宁, 黄小华, 杨建民. 基于近场动力学的含损伤缺陷 Q345 钢裂纹扩展分析[J]. 船舶力学, 2024, 28(1): 103-114. (Li S, Lü H N, Huang X H, Yang J M. Crack propagation analysis of Q345 steel with defects based on peridynamics[J]. Chinese Journal of Ship Mechanics, 2024, 28(1): 103-114. (in Chinese))
- [9] 吴攀, 周志昆, 陈子光. 混凝土梁三点弯曲断裂模式转变的近场动力学模拟[J]. 固体力学学报, 2022, 43(05): 614-624. (Wu P, Zhou Z K, Chen Z G. Fracture mode transition in three-point bending of concrete beams: A peridynamic investigation [J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2022, 43(05): 614-624. (in Chinese))
- [10] 黄小华, 李双, 金艳丽, 叶兆青. 冲击荷载作用下泊松比对脆性材料破坏影响的近场动力学分析[J]. 振动

- 与冲击, 2020, 39(20): 204-215. (Huang X H, Li S, Jin Y L, Ye, Z Q. Effect of Poisson's ratio on the fracture of brittle materials under impact loading via peridynamics[J]. Journal of Vibration and Shock, 2020, 39(20): 204-215. (in Chinese))
- [11] 陈洋, 王肇喜, 翟师慧, 盛鹏, 王者蓝, 朱明亮. 3D 打印点阵夹芯结构冲击损伤的近场动力学模拟[J]. 爆炸与冲击, 2024, 44(03): 146-160. (Chen Y, Wang Z X, Zhai S H, Sheng P, Wang Z L, Zhu M L. Peridynamic simulation of impact damage to 3D printed lattice sandwich structure[J]. Explosion and Shock Waves, 2024, 44(03): 146-160. (in Chinese))
- [12] 姜晓伟, 汪海, 朱建辉. 基于能量准则的复合材料层合板低速冲击近场动力学模拟[J]. 复合材料学报, 2024, 41(4): 2126-2136. (Jiang X W, Wang H, Zhu J H. Peridynamic modeling of composite laminate under low-velocity impact using energy-based criteria [J]. Acta Materialiae Compositae Sinica, 2024, 41(4): 2126-2136. (in Chinese))
- [13] Silling S A, Epton M, Weckner O, Xu J, Askari E. Peridynamic states and constitutive modeling[J]. Journal of Elasticity, 2007, 88(2): 151-184.
- [14] Silling S A, Bobaru F. Peridynamic modeling of membranes and fibers [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2005, 40(2-3): 395-409.
- [15] Silling S A, Askari A. Peridynamic modeling of fracture in elastomers and composites. Conference: Oral presentation at the Fall 178th Technical Meeting of the Rubber Division of the American Chemical Society, Milwaukee, October 12-14, 2010[C].
- [16] Bellido J C, Cueto J, Mora-Corral C. Bond-based peridynamics does not converge to hyperelasticity as the horizon goes to zero [J]. Journal of Elasticity, 2020, 141: 273-289.
- [17] Chen H. Bond-associated deformation gradients for peridynamic correspondence model [J]. Mechanics Research Communications, 2018, 90: 34-41.
- [18] Madenci E. Peridynamic integrals for strain invariants of homogeneous deformation[J]. Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik, 2017, 97(10): 1-16.
- [19] Bang D J, Madenci E. Peridynamic modeling of hyperelastic membrane deformation[J]. Journal of Engineering Materials and Technology, 2017, 139(3): 031007.
- [20] Yin B B, Sun W K, Zhang Y, Liew K M. Modeling of hyperelastic polymer gels under blunt ballistic impact with three-dimensional flexibilities[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2023, 413: 116127.
- [21] Tamur C, Li S F. A bond-based peridynamics modeling of polymeric material fracture under finite deformation[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2023, 414: 116132.
- [22] Zhou X P, Yao W W. Smoothed bond-based peridynamics [J]. Journal of Peridynamics and Nonlocal Modeling, 2022, 4: 452-474.
- [23] Yao W W, Zhou X P. Numerical modelling of compressible hyperelasticity via smoothed state-based peridynamics[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2022, 140: 476-493.
- [24] Li C, Zhang H, Ye H, Zhang H, Zheng Y. An improved stabilized peridynamic correspondence material model for the crack propagation of nearly incompressible hyperelastic materials[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2023, 404: 115840.
- [25] Behera D, Roy P, Madenci E. Peridynamic correspondence model for finite elastic deformation and rupture in Neo-Hookean materials[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2020, 126: 103564.
- [26] Sajal, Roy P. Peridynamics modeling of cellular elastomeric metamaterials: Application to wave isolation [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2023, 254: 108456.
- [27] Zhang C, Zhao Y, Lin F, Li D, Guo S. Mechanism of resistance to deformation for damaged mechanical elastic wheel: Rubber damage research based on peridynamic[J]. Engineering Science and Technology, an International Journal, 2024, 52: 101670.
- [28] Yang Y, Chen Y, Liu Y. Fracture analysis of hyperelastic membrane using bond-associated non-ordinary state-based peridynamics[J]. Engineering Fracture Mechanics 2024, 303: 110131.
- [29] Chen Y, Yang Y, Liu Y. Large deformation and crack propagation analyses of hydrogel by peridynamics[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2023, 284: 109261.
- [30] 黄丹, 章青, 乔丕忠, 沈峰. 近场动力学方法及其应

- [J]. 力学进展, 2010, 40(4): 448-459. (Huang D, Zhang Q, Qiao P Z, Shen F. A review on peridynamics (PD) method and its applications[J]. Advances in Mechanics, 2010, 40(4): 448-459. (in Chinese))
- [31] Silling S A, Askari D. A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics[J]. Computers and Structures, 2005, 83: 1526-1535.

Bond-Based Peridynamics Simulation for Tensile Large Deformation and Fracture Behavior of Incompressible Neo-Hookean Hyperelastic Membranes

Lei Zhu Jiangtao Zhang Jiale Zheng Mei Zhang Pengcheng Zhai

(Hubei Key Laboratory of Theory and Application of Advanced Materials Mechanics, School of Physics and Mechanics, Wuhan University of Technology, Wuhan, 430070)

Abstract This study presents a two-dimensional (2D) bond-based peridynamics (BBPD) model based on the incompressible neo-Hookean (NH) constitutive model for simulating the tensile large deformation and failure behavior of incompressible hyperelastic membranes. First, the force density vector and micro-potential function of the PD bond are derived by equating the strain energy density of the 2D BBPD model with that of the NH hyperelastic constitutive model. The model parameters are found to be related to the ratio of principal stretches in the neighborhood of the PD bond. Then a bond-associated horizon is introduced, and principal stretches are calculated based on the calculation of the deformation gradient within this horizon. A 2D BBPD model for NH hyperelastic materials is thus established. To validate the model, the nominal stress-stretch curves for a square hyperelastic membrane under uniaxial tension and biaxial tension with different biaxial tension speed ratios are calculated using the proposed BBPD model, and compared with theoretical curves. The deformation and load-displacement curves of a hyperelastic membrane with a central circular hole under uniaxial and biaxial tensile loads are also calculated and compared with finite element method (FEM) predictions. Finally, the deformation and failure processes of the hyperelastic membrane with a central circular hole under different tensile loads are calculated, and the influences of loading conditions on the mechanical properties and failure behavior of the NH hyperelastic membrane are analyzed based on the evolution analysis of strain energy density and damage of material points at the crack tip. It is found that the proposed BBPD model achieves less than 10% error in calculations. The failure load of the hyperelastic membrane with a central circular hole decreases while the failure displacement increases with rising biaxial tension speed ratios. Crack bifurcation occurs in the hyperelastic membrane with a central circular hole, with the bifurcation angle increasing alongside the biaxial tension speed ratio.

Key words peridynamics, hyperelastic constitutive, large deformation, failure, biaxial tension