

双磁性谐振子可调超材料的带隙耦合特性研究*

杨宇辰 王立峰** 俞 潇 高玉强

(南京航空航天大学, 航空航天结构力学及控制全国重点实验室, 南京, 210016)

摘要 弹性波超材料是一种人工周期结构, 可应用于航空航天、车辆工程等领域的减振降噪。本文设计了一种可以产生耦合带隙具有两个磁性谐振子的超材料。该超材料采用不锈钢薄板连接磁振子与外部框架, 调节磁铁之间距离可以影响不锈钢薄板的面内应力从而影响内部刚度。通过调节元胞结构, 形成相邻两元胞内部刚度不同的双胞系统, 从而实现更宽的耦合带隙。得到了不锈钢薄板提供的刚度和磁力提供的负刚度随磁铁间距的变化关系。建立了双磁性谐振子可调单胞超材料和由调节磁铁距离构成的双胞超材料的频散关系和传递率理论模型。计算了磁铁距离改变对超材料带隙结构的影响以及特定情况下的双胞耦合带隙结果。设计并利用 3D 打印技术制作了实验模型, 测得了不同磁铁距离下的传递率曲线并且验证了双胞超材料结构的带隙耦合结果。理论预测的传递率与实验结果吻合良好。所提出的模型可以为超材料的主动调控以及可编程性提供新的思路。

关键词 超材料, 可调谐, 负刚度, 磁性振子, 带隙耦合

DOI: 10.19636/j.cnki.cjsm42-1250/o3.2023.060

0 引言

超材料作为新型人工材料, 具有天然材料所不具备的超常物理性质^[1-3]。随着人们在超材料领域研究的不断深入, 可以设计出表现出低频超常吸收^[4]、低频带隙^[5]、负体模量^[6,7]、负质量^[8,9]、负折射^[10]、拓扑效应^[11]和声隐身^[12]等特殊物理效应的超材料。利用这些特性开发和制造新型的声学功能器件, 可以操控声波或弹性波的传播, 并且此类装置已经应用于航空航天^[13]以及车辆工程^[14]等领域。比如, Zhao 等^[13]设计了一种准零刚度超材料, 应用于航天器控制力矩陀螺的隔振实验中, 准零刚度结构表现出优异的隔振性能。吴昆等^[15]设计制造了具有低频带隙的轻质周期局域共振型超材料, 并用于空间桁架结构的振动抑制。然而, 大多数弹性超材料都采用固定结构, 即元胞是由具有固定形状和尺寸的结构所组成, 制作完成后不可改变, 只能满足特定工况的需求。具有可调性的超材料可以随外界环境改变自身带隙特性, 具有更广阔的应用前景。

超材料结构的带隙调节机制包括多场耦合调节及机械调节。其中, 多场耦合调节方式是在超材料外部添加偏置场改变结构的内部特性, 这种方法一般需要在结构内部含有多场耦合介质来实现。Bayat 和 Gordaninejad^[16]采用外部磁场影响软磁材料从而改变材料的几何特性, 实现带隙调控。Ren 等^[17]设计一种多稳态超材料, 通过采用热响应材料, 利用温度对超材料带隙的频率下限和上限进行调节, 拓宽了带隙的频率范围。Wang 等^[18]提出了一种新型的可调谐数字弹性超材料, 其中每个元胞中的内部谐振器可以通过控制谐振器端部的电磁铁电流来切换, 通过适当的编码机制, 可以在超材料中任意实现可编程功能, 例如波导和隔振。Wu 和 Fang^[19]从能量演化和临界力两个方面解释了多稳态双胞堆叠三浦折纸链的跃迁行为, 采用优化方法, 通过识别给定位移对应的最小能量来确定过渡路径, 并通过仿真和实验验证调节内压, 有效地改变堆叠三浦折纸单元各稳态之间的变换顺序。王婷英等^[20]设计了一种

* 国家杰出青年基金(11925205)和国家自然科学基金项目(51921003)资助。

2023-12-25 收到修改稿, 2024-01-02 网络首发。

** 通讯作者。 E-mail: walfe@nuaa.edu.cn.

将力学振子与压电分流振子分别置于基体上下两侧的混合弹性超材料梁,展示了力-压电混合弹性超材料梁的可调低频减振特性. 机械调节是通过调节外部载荷改变结构的几何形状和内部应力实现带隙调节. 力学可重构超材料可以在制作完成后,通过施加外力改变几何构型,使波动行为发生变化. Sun等^[21]设计一种二维声子晶体板,研究了不同预压缩应变和几何参数下的带隙可调性,有限元计算结果表明预压缩应变可以调节带隙. Zhang等^[22]设计了一种可编程的准零刚度超材料,可以随着压缩量的变化,产生不同的准零刚度模式. Lin等^[23]设计了一种可调带隙超材料,在特定压缩状态下可以达到准零刚度状态,实现超低频带隙. Cai等^[24]提出了一种嵌入准零刚度谐振腔的新型梁结构超材料,在适当的预压缩条件下实现了准零刚度,可实现超低频带隙中的弹性波衰减.

在声学领域,已经开展了通过调节磁力改变结构内部应力从而调节超材料带隙的研究. Gao等^[25]提出了一种双层膜声学超材料,得到了一种能够有效隔离低频噪声的轻型薄层结构,并采用有限元分析和实验方法对隔声能力进行了验证. Zhao等^[26,27]提出了一种具有可调谐多个频率的膜声学超材料,将磁力等效为负刚度弹簧,并且可以通过调节磁铁与小铁块之间的距离,得到具有两个峰的传输损耗曲线,并可以在较宽的低频范围内进行调节. 胥强荣等^[28]提出一种具有动态磁性负刚度的新型准零刚度薄膜声学超材料,基于伽辽金法建立了有限尺寸

薄膜/板结构的隔声理论模型,实现了较低频段下的有效宽频隔声. Zheng等^[29]系统地分析了不同磁铁间距时薄膜的非线性刚度变化,得到了负刚度薄膜结构体系的刚度解析方程,建立了负刚度膜结构及其理论计算模型,并进行吸声的实验验证. Oyelade等^[30]提出了一个带有负刚度的质量弹簧系统,建立了负刚度的理论模型,研究了系统的自由振动和强迫振动.

本文设计一种具有两个金属薄板结构和磁振子的双谐振子周期超材料,将多场耦合调节机制和机械调节机制同时引入. 磁铁作为内部振子,提供的磁场只在单胞内产生相互作用,对其他元胞影响很小. 并且在不需要额外添加外部物理场进行控制的情况下,仅通过改变两个框架之间的四个支撑块的高度控制磁场结构,调节内部刚度改变局域共振特性,进而对弹性波的带隙进行调控. 分析了此种超材料的带隙调节特性和带隙耦合特性并进行实验验证.

1 可调带隙的单胞超材料模型

图1为质量-弹簧单元组成的元胞模型与实验元胞的相互对应关系,整个外框看作一个外部质量,表示为 m_1 . 磁铁作为内部振子,表示为集中质量 m_2 和 m_3 ; 左右两边的连接件可等效为弹簧,刚度为 k_1 ; 两个金属薄板分别等效为可变刚度的弹簧 k_2 和 k_3 ; 磁铁间磁力等效为可变负刚度的弹簧 k_4 . 在这个模型中,各个框架使用3D打印制作,然后与金属薄板、

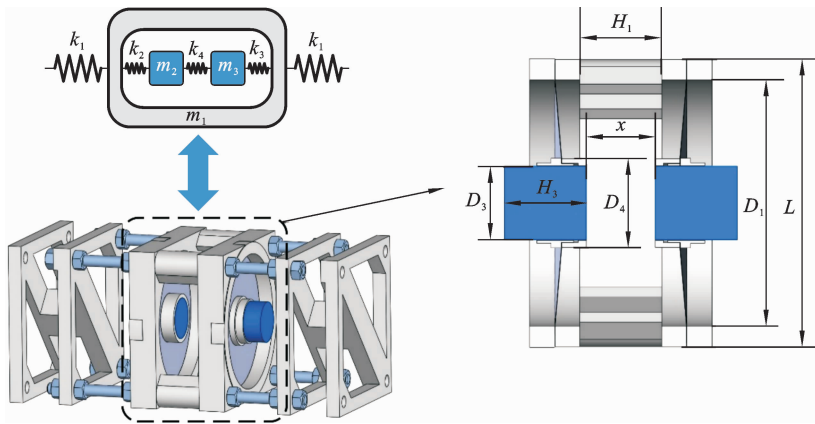


图1 可调节超材料元胞模型
Fig. 1 Tunable metamaterial unit

磁铁胶接. 元胞内采用铝合金材质的螺杆与螺母固定.

影响系统特性的主要几何参数有框架的外边长 $L=70\text{ mm}$ 、框架的内径 $D_1=60\text{ mm}$ 、两框架之间垫块的高度 H_1 、薄板的厚度 $H_2=0.05\text{ mm}$ 、圆柱形磁铁的直径 $D_3=18\text{ mm}$ 、高度 $H_3=20\text{ mm}$ 、连接磁铁与金属薄板之间支架的直径 $D_4=22\text{ mm}$ 以及晶格常数 $a=125\text{ mm}$.

当调节量 x 固定, 产生一个恒定的引力 F_m , 这由两个磁铁间距离的平衡位置决定. 当磁振子被简谐波激励的时候, 会产生位移 Δx , Δx 远小于调节量 x , 所以由磁铁引力等效的负刚度可以被视作不变^[26]. 由磁铁产生的非线性引力可以被等效作一个安装在两个磁铁之间的负刚度弹簧, 弹簧负刚度为 k_m . 当磁振子在 x 处受到激励时, 磁力可以被表示为:

$$F'_m = F_m + k_m \Delta x \quad (1)$$

同理, 由金属薄板产生的垂向力可以被表示为:

$$F'_p = F_p + k_p \Delta x \quad (2)$$

其中, F_p 为特定位置 x 的侧向拉力, k_p 为特定位置 x 的等效弹簧刚度. 在静止状态, 金属薄板力 F_p 与磁力 F_m 等大反向.

为了获得准确的磁力与距离的关系, 先采用了 COMSOL 中电磁学模块仿真的方法, 然后对磁力-距离关系进行实验验证. 图 2(a) 表示当两个磁振子之间的距离 x 发生变化时, 所产生的引力 F_m 的变化关系. 采用结构力学模块中的板壳模型计算金属薄板垂向力-位移的关系, 如图 2(b) 所示. 并进一步获得磁力等效负刚度随着两个磁振子间距的变化关系, 如图 2(c) 所示, 以及金属薄板等效刚度随两个磁振子间距的变化关系, 如图 2(d) 所示.

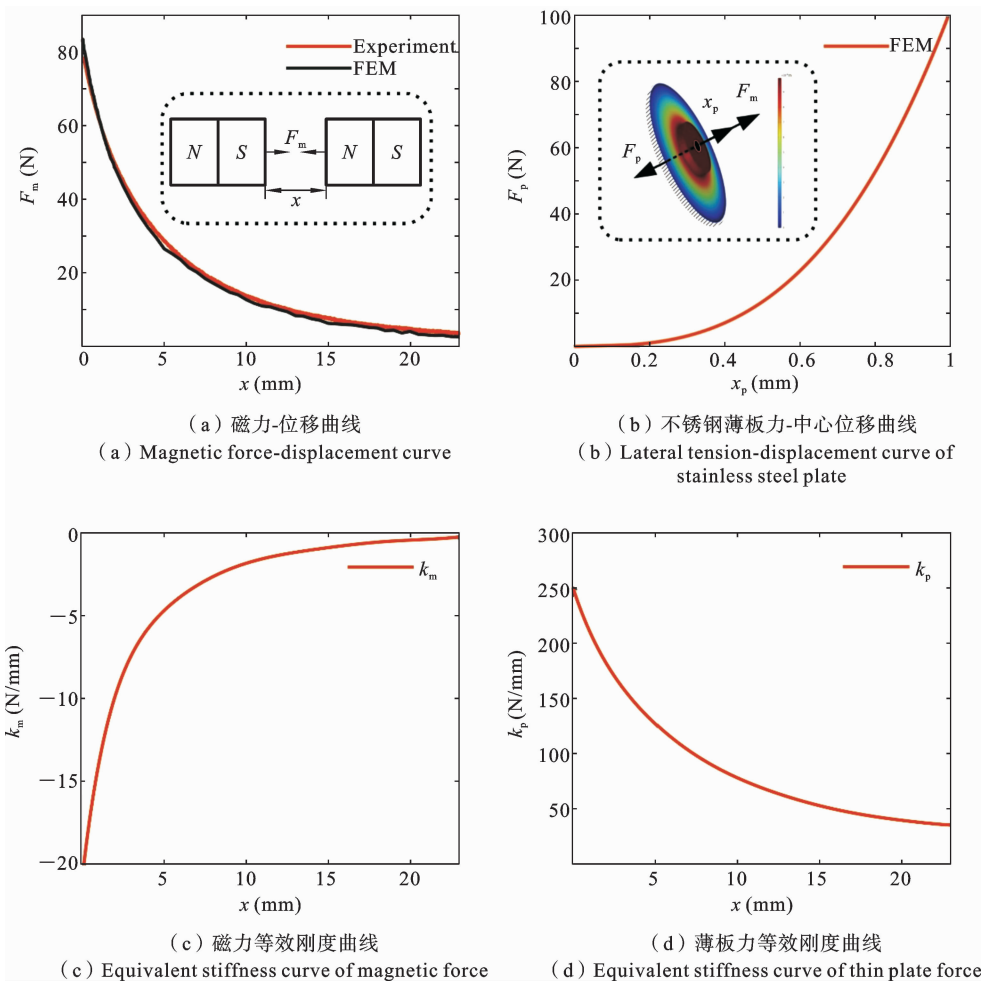


图 2 磁铁距离变化对力和刚度的影响

Fig. 2 Effect of distance of magnets change on force and stiffness

一维周期模型可以被视为离散的质量刚度模型,如图3.当元胞数足够大时,整个模型可以被视为无限长,第 n 个元胞的运动方程可以表示为:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{u} = k_2(v-u) + k_3(w-u) + k_1(x_R-u) + f_L \\ m_2 \ddot{v} = k_2(u-v) + k_4(w-v) \\ m_3 \ddot{w} = k_3(u-w) + k_4(v-w) \\ 0 = k_1(-x_R+u) + f_R \end{cases} \quad (3)$$

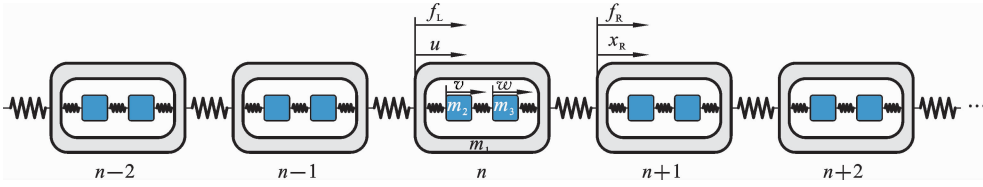


图3 一维周期超材料系统

Fig. 3 One-dimensional period metamaterial system

考虑到周期系统的稳态简谐振动,经过傅里叶变换,位移可以表示为 $\mathbf{X} = \bar{\mathbf{X}}e^{i\omega t}$,力可以表示为 $\mathbf{F} = \bar{\mathbf{F}}e^{i\omega t}$.其中 $\bar{\mathbf{X}} = [\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{x}_R]^T$, $\bar{\mathbf{F}} = [\bar{f}_L, 0, 0, \bar{f}_R]^T$ 分别为位移和力幅值的列向量, $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ 为分别为外部质量块和内部振子的位移幅值, \bar{x}_R 为单元右端的位移幅值,等于下一个单元的左端位移幅值; \bar{f}_L 和 \bar{f}_R 为单元左端和右端的简谐作用力幅值.代入到式(4)中,可以得到系统的动力学方程:

$$[-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}] \bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{F}} \quad (5)$$

其中, ω 为振动的角频率, \mathbf{M} 和 \mathbf{K} 分别为系统的质量矩阵和刚度矩阵:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_3 & -k_2 & -k_3 & -k_1 \\ -k_2 & k_2 + k_4 & -k_4 & 0 \\ -k_3 & -k_4 & k_3 + k_4 & 0 \\ -k_1 & 0 & 0 & k_1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{M} = \text{diag}(m_1 \quad m_2 \quad m_3 \quad 0) \quad (7)$$

采用 Bloch 定理,元胞左右两端的边界位移和边界力的幅值关系为:

$$\begin{cases} \bar{x}_R = e^{-iqa} \bar{u} \\ \bar{f}_R = -e^{-iqa} \bar{f}_L \end{cases} \quad (8)$$

代入到幅值列向量,并写为矩阵形式:

$$\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(q) \bar{\mathbf{X}}_r, \quad \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{B}(q) \bar{\mathbf{F}}_r \quad (9)$$

其中, $\bar{\mathbf{X}}_r$ 和 $\bar{\mathbf{F}}_r$ 为代换后的位移幅值和外力幅值的

其中, u 是第 n 个元胞外部质量的位移, v 和 w 是第 n 个元胞中内部振子的位移, f_L 和 f_R 分别为第 n 个元胞左端和右端所受外力, x_R 为第 n 个元胞右端位移.

令位移向量 $\mathbf{X} = [u, v, w, x_R]^T$, 力向量 $\mathbf{F} = [f_L, 0, 0, f_R]^T$, 则有:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K} \mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (4)$$

列向量,

$$\bar{\mathbf{X}}_r = [\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}]^T, \quad \bar{\mathbf{F}}_r = [\bar{f}_L, 0, 0]^T \quad (10)$$

$$\mathbf{A}(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ e^{-iqa} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -e^{-iqa} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

将式(9)代入式(5)中得:

$$-\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{A} \bar{\mathbf{X}}_r + \mathbf{K} \mathbf{A} \bar{\mathbf{X}}_r = \mathbf{B} \bar{\mathbf{F}}_r \quad (12)$$

等式左右两端化简得:

$$[-\omega^2 \mathbf{M}_r(q) + \mathbf{K}_r(q)] \bar{\mathbf{X}}_r = \mathbf{0} \quad (13)$$

其中,

$$\mathbf{K}_r(q) = \mathbf{A}^H \mathbf{K} \mathbf{A} \quad (14)$$

$$\mathbf{M}_r(q) = \mathbf{A}^H \mathbf{M} \mathbf{A} \quad (15)$$

给定特征频率 ω 可以求解复数形式的 Bloch 波矢 q , 绘制出两者的关系, 且 q 的取值范围限定在不可约 Brillouin 区中.

整个系统含有 N 个元胞, 并且带有阻尼, 如图4所示. 在一端简谐位移激励下, $u_0 = \bar{u}_0 e^{i\omega t}$, 对于输入端, 即第 0 个元胞的运动方程为:

$$\ddot{u}_0 m_0 = (u_1 - u_0) k_1 + (\dot{u}_1 - \dot{u}_0) c_1 \quad (16)$$

对第 N 个元胞, 即 $n = N$ 时:

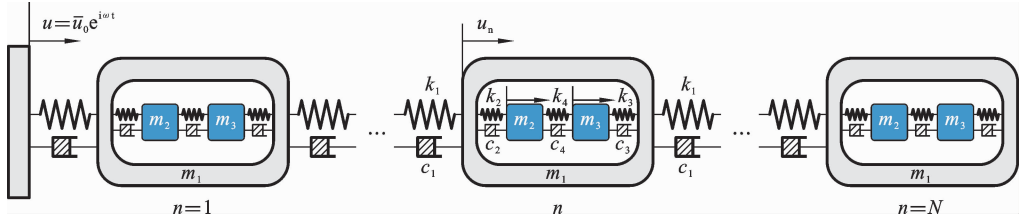


图 4 一维含有 N 个元胞带阻尼的超材料系统

Fig. 4 One-dimensional N units period metamaterial system with damping

$$m_1 \ddot{u}_N = k_1 u_{N-1} + k_2 v_N + k_3 w_N - (k_1 + k_2 + k_3) u_N + c_1 \dot{u}_{N-1} + c_2 \dot{v}_N + c_3 \dot{w}_N - (c_1 + c_2 + c_3) \dot{u}_N \quad (17a)$$

$$m_2 \ddot{v}_N = k_2 u_N + k_4 w_N - (k_2 + k_4) v_N + c_2 \dot{u}_N + c_4 \dot{w}_N - (c_2 + c_4) \dot{v}_N \quad (17b)$$

$$m_3 \ddot{w}_N = k_3 u_N + k_4 v_N - (k_3 + k_4) w_N + c_3 \dot{u}_N + c_4 \dot{v}_N - (c_3 + c_4) \dot{w}_N \quad (17c)$$

$$c_2 + c_3) \dot{u}_n \quad (18a)$$

$$m_2 \ddot{v}_n = k_2 u_n + k_4 w_n - (k_2 + k_4) v_n + c_2 \dot{u}_n + c_4 \dot{w}_n - (c_2 + c_4) \dot{v}_n \quad (18b)$$

$$m_3 \ddot{w}_n = k_3 u_n + k_4 v_n - (k_3 + k_4) w_n + c_3 \dot{u}_n + c_4 \dot{v}_n - (c_3 + c_4) \dot{w}_n \quad (18c)$$

稳态简谐位移可以表示为：
 $[u_n(t), v_n(t), w_n(t)] = [\bar{u}_n(\omega), \bar{v}_n(\omega), \bar{w}_n(\omega)] e^{i\omega t} \quad (19)$

对于其它单元, $n=1, 2, \dots, N-1$,

$$m_1 \ddot{u}_n = k_1 u_{n-1} + k_1 u_{n+1} + k_2 v_n + k_3 w_n - (2k_1 + k_2 + k_3) u_n + c_1 \dot{u}_{n-1} + c_1 \dot{u}_{n+1} + c_2 \dot{v}_n + c_3 \dot{w}_n - (2c_1 +$$

将式(19)代入式(18)中, 分别消去 \bar{w}_n 和 \bar{v}_n 得:

$$\frac{\bar{v}_n}{u_n} = \frac{(k_2 + ic_2\omega) [(k_3 + ic_3\omega) + (k_4 + ic_4\omega) - m_3\omega^2] + (k_3 + ic_3\omega)(k_4 + ic_4\omega)}{[(k_2 + ic_2\omega) + (k_4 + ic_4\omega) - m_2\omega^2] [(k_3 + ic_3\omega) + (k_4 + ic_4\omega) - m_3\omega^2] - (k_4 + ic_4\omega)^2} \quad (20)$$

$$\frac{\bar{w}_n}{u_n} = \frac{(k_3 + ic_3\omega) [(k_2 + ic_2\omega) + (k_4 + ic_4\omega) - m_2\omega^2] + (k_2 + ic_2\omega)(k_4 + ic_4\omega)}{[(k_2 + ic_2\omega) + (k_4 + ic_4\omega) - m_2\omega^2] [(k_3 + ic_3\omega) + (k_4 + ic_4\omega) - m_3\omega^2] - (k_4 + ic_4\omega)^2} \quad (21)$$

将式(20)和(21)代入式(18a)得:

$$T_n = \frac{\bar{u}_n}{u_{n-1}} = \frac{k_1 + ic_1\omega}{(k_1 + ic_1\omega)(2 - T_{n+1}) + (k_2 + ic_2\omega) \left(1 - \frac{\bar{v}_n}{u_n}\right) + (k_3 + ic_3\omega) \left(1 - \frac{\bar{w}_n}{u_n}\right) - m_1\omega^2} \quad (22)$$

类似的, 可以得到:

$$T_N = \frac{k_1 + ic_1\omega}{(k_1 + ic_1\omega) + (k_2 + ic_2\omega) \left(1 - \frac{\bar{v}_n}{u_n}\right) + (k_3 + ic_3\omega) \left(1 - \frac{\bar{w}_n}{u_n}\right) - m_1\omega^2} \quad (23)$$

因此, 整个系统的传递率为:

$$T = 20 \log_{10} \left| \frac{\bar{x}_{in}}{\bar{x}_{out}} \right| = 20 \log_{10} \left| \prod_{n=1}^N T_n \right| \quad (24)$$

计算不同磁振子间距 x 下可调节超材料的能带结构, 如图 5 所示. (a)(b)(c)(d) 分别为 x 大小为 5 mm、10 mm、15 mm 和 20 mm 的情况, 灰色区域

代表带隙范围. 可以看出, 基于 Bloch 定理计算的无限周期结构的带隙范围与含有 5 个单元无阻尼系统的传递率衰减的频率范围基本一致. 图 6 为带隙边界随自变量磁铁距离 x 的变化. 随着磁铁距离 x 的增大, 内部振子的刚度降低, 从而导致局域共振带隙逐渐向低频移动, 且带隙宽度也逐渐变窄.

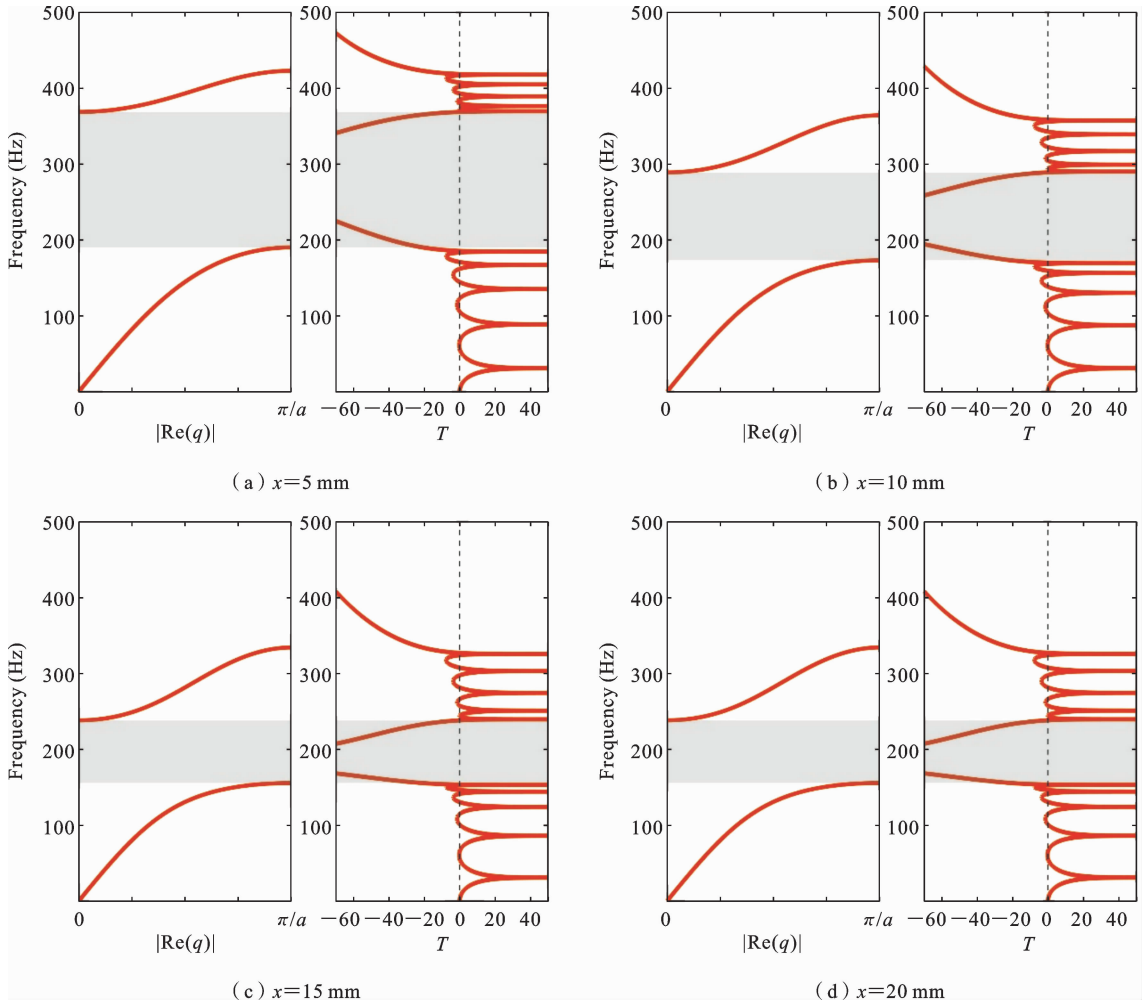


图 5 不同磁铁距离下的频散关系和传递率

Fig. 5 Dispersion relation and transmissibility curve at different distances between two magnets

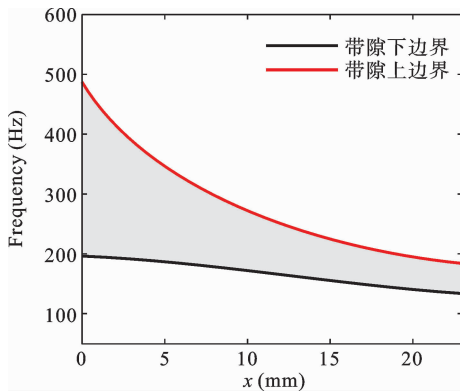


图 6 带隙边界随磁性振子间距 x 变化

Fig. 6 Effects of distance between magnetic resonators x on the boundary of bandgap

2 双胞胎超材料的带隙耦合模型

分别对每个元胞形态进行调控,形成双胞胎或多胞周期结构,从而实现两种或多种局域共振带隙的耦合,产生更宽的带隙. 双胞胎周期结构如图 7, 外框外部质量表示为 m_{1i} , 磁铁内部振子表示为集中质量 m_{2i} 和 m_{3i} ; 连接件等效弹簧刚度 k_{1i} , 金属薄板等效弹簧刚度 k_{2i} 和 k_{3i} , 磁力等效负刚度 k_{4i} . 当 $i=1$ 时, 表示每个双胞胎中的第一个元胞中的参数; 当 $i=2$ 时, 表示每个双胞胎中的第二个元胞中的参数.

与单胞超材料的频散关系分析过程相同, 计算出双胞胎超材料的频散关系, 推导获得频散关系的刚度矩阵、质量矩阵、边界条件矩阵 $\mathbf{A}(q)$ 与 $\mathbf{B}(q)$ 为:

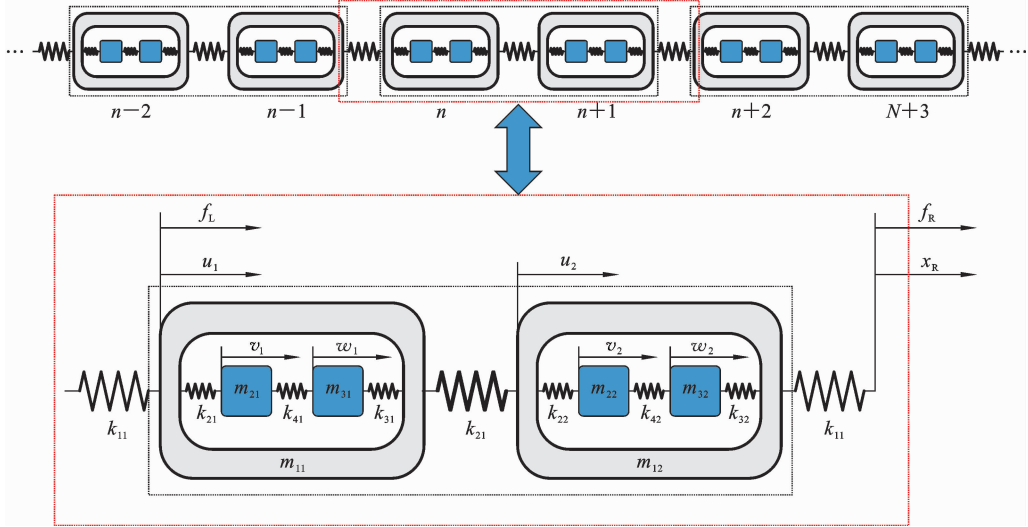


图 7 一维双胞周期超材料系统

Fig. 7 One-dimensional double-cell period metamaterial system

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{12} + k_{21} + k_{31} & -k_{21} & -k_{31} & -k_{12} & 0 & 0 & 0 \\ -k_{21} & k_{21} + k_{41} & -k_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{31} & -k_{41} & k_{31} + k_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{12} & 0 & 0 & k_{11} + k_{12} + k_{22} + k_{32} & -k_{22} & -k_{32} & -k_{11} \\ 0 & 0 & 0 & -k_{22} & k_{22} + k_{42} & -k_{42} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{32} & -k_{42} & k_{32} + k_{42} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{11} & 0 & 0 & k_{11} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\mathbf{M} = \text{diag}(m_{11} \quad m_{21} \quad m_{31} \quad m_{12} \quad m_{22} \quad m_{23} \quad 0) \quad (26)$$

阵式(27)代入式(13)中,可得到双胞周期超材料的频散关系曲线。

$$\begin{cases} \mathbf{A}(q) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{6 \times 6} \\ e^{-iqa} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{7 \times 6} \\ \mathbf{B}(q) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{6 \times 6} \\ -e^{-iqa} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{7 \times 6} \end{cases} \quad (27)$$

在计算双胞超材料传递率的过程中,第奇数个元胞和偶数个的元胞结构不同,导致内振子与外框的振动位移幅值不同,可以得到第奇数个元胞中内振子与外框位移幅值的关系:

将质量刚度矩阵式(25)和(26)以及边界条件矩

$$\begin{cases} \frac{\bar{v}_n}{u_n} = \frac{(k_{21} + ic_{21}\omega) [(k_{31} + ic_{31}\omega) + (k_{41} + ic_{41}\omega) - m_{31}\omega^2] + (k_{31} + ic_{31}\omega)(k_{41} + ic_{41}\omega)}{[(k_{21} + ic_{21}\omega) + (k_{41} + ic_{41}\omega) - m_{21}\omega^2] [(k_{31} + ic_{31}\omega) + (k_{41} + ic_{41}\omega) - m_{31}\omega^2] - (k_{41} + ic_{41}\omega)^2} \\ n = 1, 3, 5, \dots, 2N - 1 \end{cases} \quad (28)$$

$$\begin{cases} \frac{\bar{w}_n}{u_n} = \frac{(k_{31} + ic_{31}\omega) [(k_{21} + ic_{21}\omega) + (k_{41} + ic_{41}\omega) - m_{21}\omega^2] + (k_{21} + ic_{21}\omega)(k_{41} + ic_{41}\omega)}{[(k_{21} + ic_{21}\omega) + (k_{41} + ic_{41}\omega) - m_{21}\omega^2] [(k_{31} + ic_{31}\omega) + (k_{41} + ic_{41}\omega) - m_{31}\omega^2] - (k_{41} + ic_{41}\omega)^2} \\ n = 1, 3, 5, \dots, 2N - 1 \end{cases} \quad (29)$$

以及第偶数个元胞内振子与外框位移幅值的关系:

$$\begin{cases} \frac{\bar{v}_n}{u_n} = \frac{(k_{22} + ic_{22}\omega) [(k_{32} + ic_{32}\omega) + (k_{42} + ic_{42}\omega) - m_{32}\omega^2] + (k_{32} + ic_{32}\omega)(k_{42} + ic_{42}\omega)}{[(k_{22} + ic_{22}\omega) + (k_{42} + ic_{42}\omega) - m_{22}\omega^2] [(k_{32} + ic_{32}\omega) + (k_{42} + ic_{42}\omega) - m_{32}\omega^2] - (k_{42} + ic_{42}\omega)^2} \\ n = 2, 4, 6, \dots, 2N \end{cases} \quad (30)$$

$$\begin{cases} \overline{u}_n = \frac{(k_{32} + ic_{32}\omega) [(k_{22} + ic_{22}\omega) + (k_{42} + ic_{42}\omega) - m_{22}\omega^2] + (k_{22} + ic_{22}\omega)(k_{42} + ic_{42}\omega)}{[(k_{22} + ic_{22}\omega) + (k_{42} + ic_{42}\omega) - m_{22}\omega^2][(k_{32} + ic_{32}\omega) + (k_{42} + ic_{42}\omega) - m_{32}\omega^2] - (k_{42} + ic_{42}\omega)^2} \\ n=2,4,6,\dots,2N \end{cases} \quad (31)$$

之后分别计算末尾端元胞、非末尾端偶数个元胞和奇数个元胞的传递率，在一共含有 $2N$ 个元胞结构的系统内， $n=2N$ 时，元胞传递率为：

$$T_{2N} = \frac{k_{12} + ic_{12}\omega}{(k_{12} + ic_{12}\omega) + (k_{22} + ic_{22}\omega) \left(1 - \frac{\overline{v}_n}{u_n}\right) + (k_{32} + ic_{32}\omega) \left(1 - \frac{\overline{w}_n}{u_n}\right) - m_{11}\omega^2} \quad (32)$$

$n=1,3,5,\dots,2N-1$ 时，元胞传递率为：

$$T_n = \frac{k_{11} + ic_{11}\omega}{(k_{11} + ic_{11}\omega) + (k_{12} + ic_{12}\omega)(1 - T_{n+1}) + [(k_{21} + ic_{21}\omega) \left(1 - \frac{\overline{v}_n}{u_n}\right) + (k_{31} + ic_{31}\omega) \left(1 - \frac{\overline{w}_n}{u_n}\right) - m_{11}\omega^2]} \quad (33)$$

$n=2,4,6,\dots,2N-2$ 时，元胞传递率为：

$$T_n = \frac{k_{12} + ic_{12}\omega}{(k_{12} + ic_{12}\omega) + (k_{11} + ic_{11}\omega)(1 - T_{n+1}) + [(k_{22} + ic_{22}\omega) \left(1 - \frac{\overline{v}_n}{u_n}\right) + (k_{32} + ic_{32}\omega) \left(1 - \frac{\overline{w}_n}{u_n}\right) - m_{12}\omega^2]} \quad (34)$$

将所有元胞的传递率相乘，代入式(24)中，获得整体结构的传递率曲线。

假设奇数个元胞内部磁铁间距 x_1 恒定，始终为 $x_1=5$ mm，偶数个元胞内部磁铁间距 x_2 为变量；通过有限元软件计算得到连接每个元胞间的连接件刚度 $k_{11}=k_{21}=101.1$ N/mm；测得元胞外框质量 $m_{11}=m_{12}=165.7$ g。

将 x_1 的值固定为 5 mm，并计算不同 x_2 情况下超材料系统的频散关系，获取每一个带隙边界的频率值，并绘制带隙边界随 x_2 的变化曲线，如图 8。当

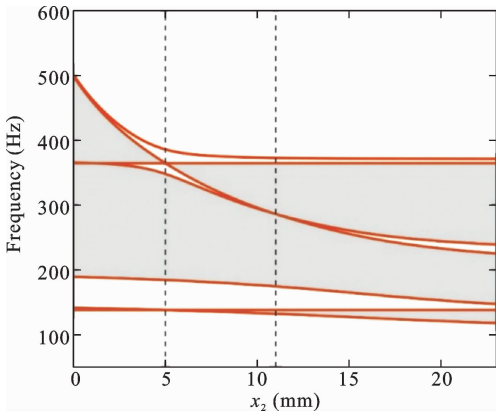


图 8 $x_1=5$ mm 时双胞带隙随磁性谐振子间距 x_2 变化
Fig. 8 $x_1=5$ mm, the double-cell band gap changes with the magnetic resonators distance x_2

x_2 的大小为 11 mm 时，第一个带隙的范围变为 131.9-138.0 Hz，第二、第三个带隙耦合，形成更宽的带隙，带隙范围为 174.0-364.6 Hz，如图 9。

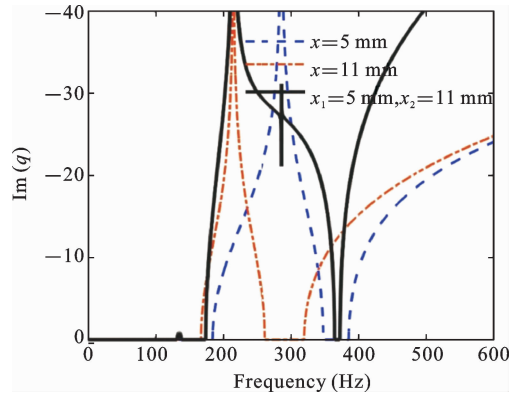


图 9 单胞和双胞超材料带隙对比
Fig. 9 Comparison of band gap between single-cell and double-cell metamaterial

3 超材料传递率实验

3.1 单胞超材料的带隙调节实验

通过波的传递率实验验证双磁性谐振子超材料带隙，所采用的实验装置如图 10 所示。测得元胞外部集中质量 $m_1=120$ g；磁铁振子质量 $m_2=m_3=39.7$ g。在本文中，实验中的磁力调控通过调控磁铁

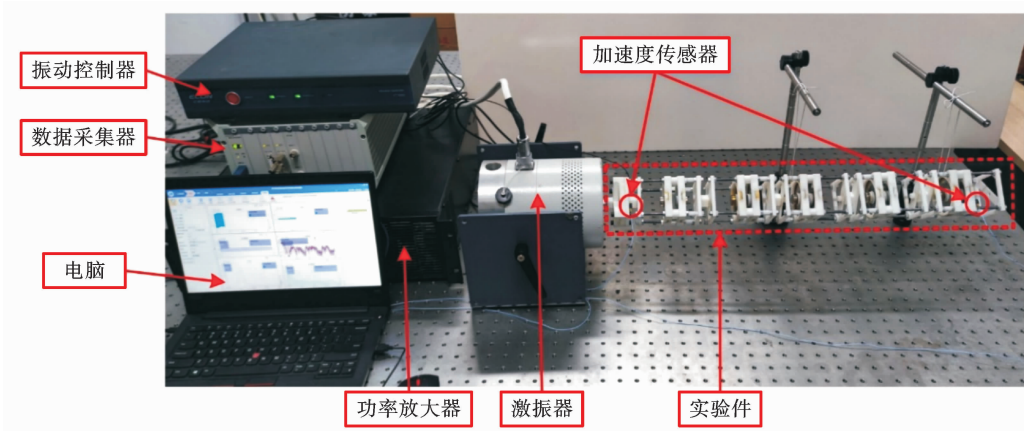
之间的距离实现,由于磁铁由金属薄板连接在外框上,两个外框之间由垫块支撑,更换不同高度的垫块可以获得不同的磁铁间距. 在实验中,分别测试了 4 种垫块高度工况下的超材料传递率,垫块高度分别为 5 mm、10 mm、15 mm 和 20 mm 的间距. 但由于金属薄膜受垂向力产生形变,4 种垫块高度情况下

测量的实际磁铁间距为 2 mm、8 mm、13 mm 和 18 mm,对应的刚度如表 1 所示. 然后,对模型的输入端施加 20-500 Hz 的扫频激励. 通过加速度计测量了模型的输入端和输出端的加速度响应. 实验周期模型的传递率计算为输出端与输入端之间的加速度响应振幅的比值,实验装置如图 10(b).

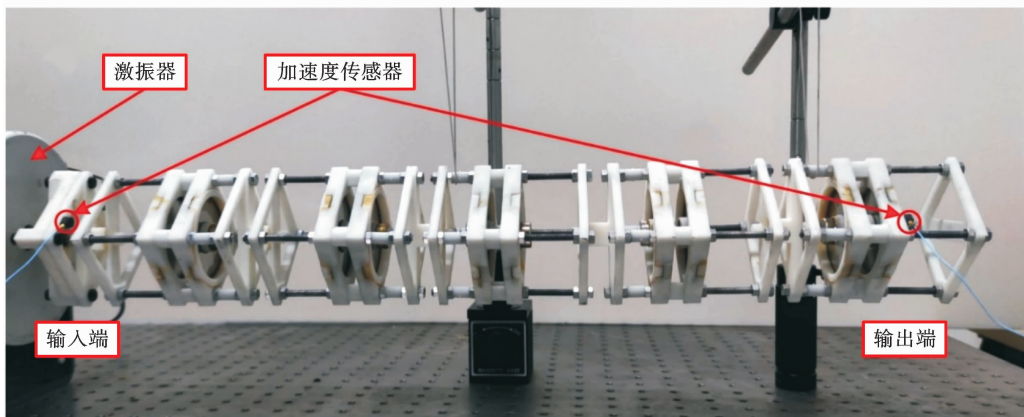
表 1 不同磁振子间距 x 对应的刚度系数

Table 1 Stiffness corresponding to different distance between resonators x

刚度系数(N/mm)	$x=2\text{ mm}$	$x=8\text{ mm}$	$x=13\text{ mm}$	$x=18\text{ mm}$
k_2	183.9	94.4	61.9	44.4
k_3	183.9	94.4	61.9	44.4
k_4	-10.03	-2.57	-1.09	-0.47



(a) 实验装置实际照片
(a) Actual photo of the experimental setup



(b) 实验模型
(b) Experimental model

图 10 获得超材料带隙的实验装置图

Fig. 10 Experimental equipment for the bandgap of metamaterial

实验结果与理论预测的传递率进行比较,如图 11. 在图 11 中,4 种情况均可产生局域共振带隙,并且局域共振带隙的位置和宽度的变化与理论预测基本一致. 但实验结果仍然与理论结果有一定的误差,其中理论预测与实验测得的超材料对振幅的衰减效果不同,是由于实验模型实际上比较复杂,可能激发

出其他未知模态,导致测量位置幅值增大;等效刚度参数识别不够准确,导致理论预测与实验测得的超材料隔振频率也存在一定的误差;超材料外框由 3D 打印制作完成后,需要手动胶接,装配时容易产生误差.

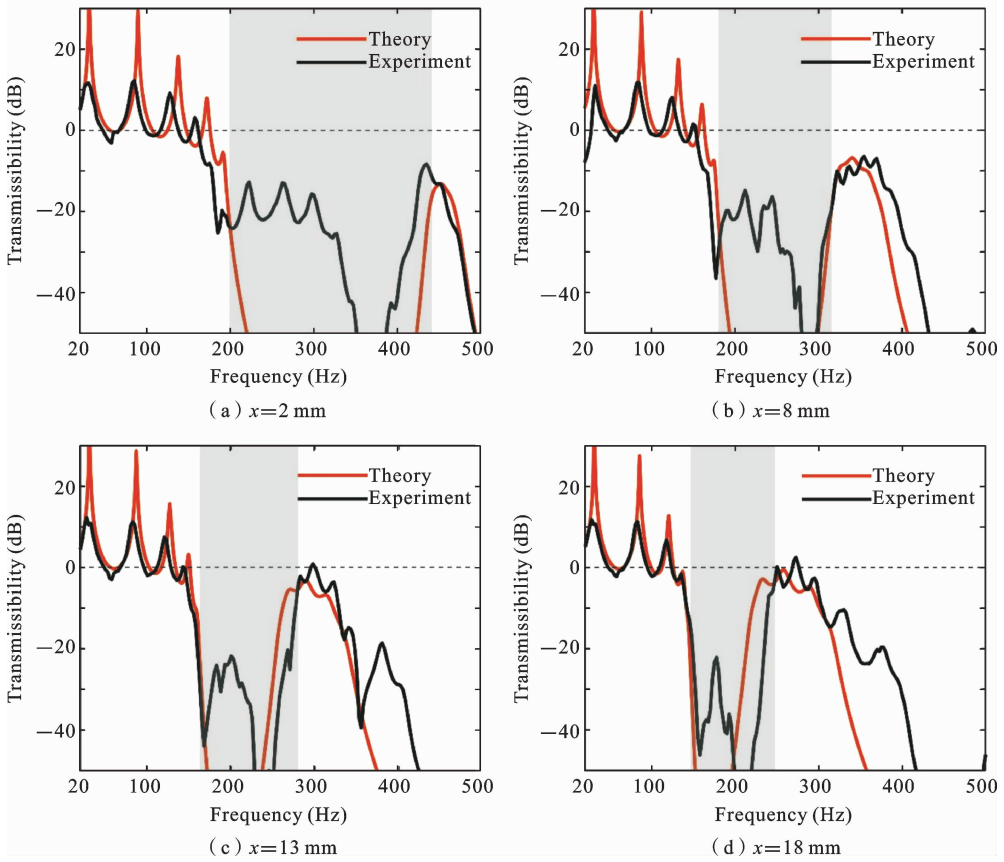


图 11 不同磁铁距离下的传递率

Fig. 11 Transmissibility at different distances between two magnetic resonators

3.2 双胞胎超材料的带隙耦合实验

基于第 2 节中对双胞胎超材料带隙耦合模型的分析结果,对 $x_1=5\text{ mm}$, $x_2=11\text{ mm}$ 双胞胎结构进行传递率实验. 设置第 1, 3, 5 胞 $x_1=5\text{ mm}$, 2, 4, 6 胞 $x_2=11\text{ mm}$; 与 $x=5\text{ mm}$ 单胞结构、 $x=11\text{ mm}$ 单胞结构超材料传递率进行对比实验,结果如图 12 所示. 当单胞结构磁铁间距分别等于 $x=5\text{ mm}$ 和 $x=11\text{ mm}$ 时,实验测得的传递率曲线中都仅包含一个局域共振带隙,如图 12(a) 和图 12(b) 所示;图 12(c) 中,当 $x_1=5\text{ mm}$, $x_2=11\text{ mm}$ 时,由于相邻元胞间

的差异会产生 Bragg 带隙,并且局域共振带隙和第二个 Bragg 带隙耦合,产生了更宽的带隙.

4 结论

本文提出了一种具有可调节带隙的双磁性振子一维超材料,并进行了单胞和双胞胎超材料带隙的理论分析和实验研究. 该超材料通过改变磁性振子之间的距离,调节磁力大小,从而改变内部振子之间的等效刚度,实现带隙调节. 与传统的超材料结构相

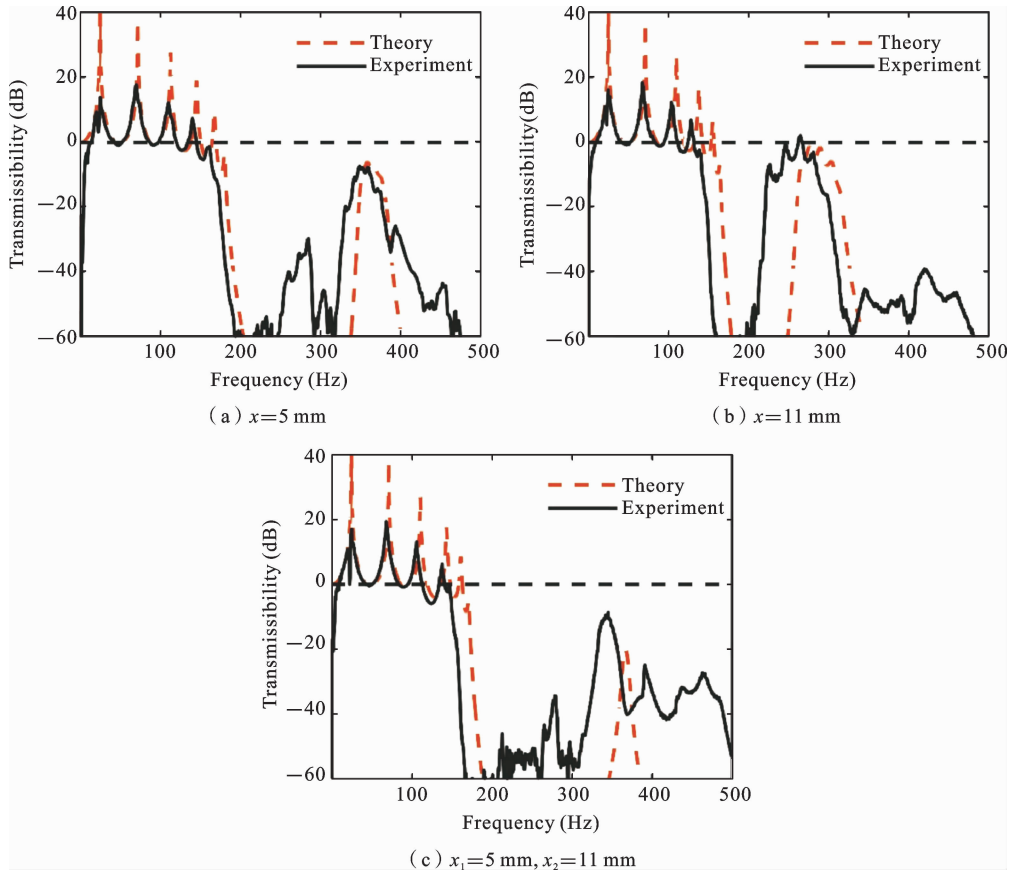


图 12 单胞和双胞超材料传递率

Fig. 12 Transmissibility of single-cell and double-cell metamaterial

比,这种可调超材料不仅可以实现带隙位置和宽度的调节,也可以通过调节元胞结构,形成相邻两元胞内部刚度不同的双胞系统,从而实现更宽的耦合带隙.实验结果表明,理论预测的双磁性谐振子超材料带隙与实验结果吻合良好,在特定状态下可以产生更宽的耦合带隙.这种调节方式可以对抑制弹性波传递的主动控制提供新的思路.

参考文献

[1] Chen Y Y, Hu G B, Huang G K. A hybrid elastic metamaterial with negative mass density and tunable bending stiffness [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2017, 105: 179-198.

[2] Wu Y, Lai Y, Zhang Z Q. Elastic metamaterials with simultaneously negative effective shear modulus and mass density [J]. *Physical Review Letters*, 2011,

107(10): 105506.

[3] Chen S, Wang B, Zhu S W, Tan X J, Hu J Q, Lian X, Wang L C, Wu L Z. A novel composite negative stiffness structure for recoverable trapping energy [J]. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2020, 129: 105697.

[4] Li J, Chan C T. Double-negative acoustic metamaterial [J]. *Physical Review E*, 2004, 70(5): 055602.

[5] Liu Z Y, Zhang X X, Mao Y W, Zhu Y Y, Yang Z Y, Chan C T, Sheng P. Locally resonant sonic materials [J]. *Science*, 2000, 289(5485): 1734-1736.

[6] Shi J J, Liu C K, Lai Y. Controlling the effective bending stiffness via out-of-plane rotational resonances in elastic metamaterial thin plates [J]. *New Journal of Physics*, 2018, 20(10): 103043.

[7] Ding Y Q, Liu Z Y, Qiu C Y, Shi J. Metamaterial with simultaneously negative bulk modulus and mass density [J]. *Physical Review Letters*, 2007, 99

- (9): 093904.
- [8] Yao S S, Zhou X M, Hu G K. Investigation of the negative-mass behaviors occurring below a cut-off frequency [J]. *New Journal of Physics*, 2010, 12(10): 103025.
- [9] Huang H H, Sun C T, Huang G L. On the negative effective mass density in acoustic metamaterials [J]. *International Journal of Engineering Science*, 2009, 47(4): 610-617.
- [10] Kundtz N, Smith D R. Extreme-angle broadband metamaterial lens [J]. *Nature Materials*, 2010, 9(2): 129-132.
- [11] Zhou Y, Bandaru P R, Sievenpiper D F. Quantum-spin-Hall topological insulator in a spring-mass system [J]. *New Journal of Physics*, 2018, 20(12): 123011.
- [12] Pendry J B, Schurig D, Smith D R. Controlling electromagnetic fields [J]. *Science*, 2006, 312(5781): 1780-1782.
- [13] Zhao J L, Zhou G, Zhang D Z, Ivana K, Zhu R, Hu H Y. Integrated design of a lightweight metastructure for broadband vibration isolation [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2023, 244: 108069.
- [14] Wu X D, Zhang M H, Zuo S G, Huang H D, Wu H. An investigation on interior noise reduction using 2D locally resonant phononic crystal with point defect on car ceiling [J]. *Journal of Vibration and Control*, 2019, 25(2): 386-396.
- [15] 吴昆, 高玉强, 王立峰, 金栋平, 胡海岩. 多胞局域共振型超材料的减振实验研究[J]. *南京航空航天大学学报*, 2022, 54(5): 908-914. (Wu K, Gao Y Q, Wang L F, Jin D P, Hu H Y. Experimental study on vibration attenuation via a multi cell and locally resonant metamaterial [J]. *Journal of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics*, 2022, 54(5): 908-914. (in Chinese))
- [16] Bayat A, Gordaninejad F. Dynamic response of a tunable phononic crystal under applied mechanical and magnetic loadings [J]. *Smart Materials and Structures*, 2015, 24(6): 065027.
- [17] Ren Z W, Ji L T, Tao R, Chen M J, Wang Z S, Zhao Z A, Fang D N. SMP-based multi-stable mechanical metamaterials: From bandgap tuning to wave logic gates [J]. *Extreme Mechanics Letters*, 2021, 42: 101077.
- [18] Wang Z W, Zhang Q, Zhang K, Hu G K. Tunable Digital Metamaterial for Broadband Vibration Isolation at Low Frequency [J]. *Advanced Materials*, 2016, 28: 9857-9861.
- [19] Wu H P, Fang H B. Tuning of multi-stability profile and transition sequence of stacked miura-origami metamaterials [J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2023, 36(4): 554-568.
- [20] 王婷英, 柴怡君, 耿谦, 杨雄伟, 李跃明. 力-压电混合弹性超材料梁的带隙调节特性[J]. *固体力学学报*, 2022, 43(04): 406-418. (Wang T Y, Chai Y J, Geng Q, Yang X W, Li Y M. Tuning characteristics of bandgaps of a mechanical-piezoelectric hybrid Elastic metamaterial beam [J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2022, 43(04): 406-418. (in Chinese))
- [21] Sun X W, Zhu H F, Gao X L, Song T, Liu Z J. Tunable low-frequency bandgaps of a new two-dimensional multi-component phononic crystal under different pressures, geometric parameters and pre-compression strains [J]. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2022, 29(25): 4019-4031.
- [22] Zhang Q, Guo D K, Hu G K. Tailored mechanical metamaterials with programmable quasi-zero-stiffness features for full-band vibration isolation [J]. *Advanced Functional Materials*, 2021, 31(33): 2101428.
- [23] Lin Q D, Zhou J X, Pan H B, Xu D L, Wen G L. Numerical and experimental investigations on tunable low-frequency locally resonant metamaterials [J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2021, 34(5): 612-623.
- [24] Cai C Q, Zhou J X, Wang K, Pan H B, Tan D G, Xu D L, Wen G L. Flexural wave attenuation by metamaterial beam with compliant quasi-zero-stiffness resonators [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2022, 174: 109119.
- [25] Gao N S, Hou H, Mu Y H. Low frequency acoustic properties of bilayer membrane acoustic metamaterial with magnetic oscillator [J]. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, 2017, 7(4): 252-257.
- [26] Zhao J J, Li X H, Wang W J, Wang Y Y, Zhu L Y, Liu Y N. Membrane-type acoustic metamaterials with tunable frequency by a compact magnet [J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2019,

- 145(5): EL400-EL404.
- [27] Zhao J J, Li X H, Thompson D, Wang Y Y, Wang W J, Zhu L Y, Liu Y N. Analysis of a geometrical-stiffening membrane acoustic metamaterial with individually tunable multi-frequencies [J]. *Archives of Acoustics*, 2021, 46(1): 87-93.
- [28] 胥强荣, 朱洋, 林康, 沈承, 卢天健. 一种具有动态磁负刚度薄膜声学超材料的低频隔声特性[J]. *物理学报*, 2022, 71(21): 223-238. (Xu Q R, Zhu Y, Lin K, Shen C, Lu T J. Low-frequency sound insulation performance of novel membrane acoustic metamaterial with dynamic negative stiffness [J]. *Acta Physica Sinica*, 2022, 71(21): 223-238. (in Chinese))
- [29] Zheng X Y, Fu C X, Bai H B, Lin Z, Liu X X. Study of low-frequency sound absorption based on negative stiffness membrane structure [J]. *Symmetry*, 2022, 14(9): 1858.
- [30] Oyelade A O, Wang Z W, Hu G K. Dynamics of 1D mass-spring system with a negative stiffness spring realized by magnets: Theoretical and experimental study [J]. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, 2017, 7(1): 17-21.

Bandgap Coupling Characteristics of a Tunable Metamaterial with Double Magnetic Resonators

Yuchen Yang Lifeng Wang Xiao Yu Yuqiang Gao

(*State Key Laboratory of Mechanics and Control for Aerospace Structures, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing, 210016*)

Abstract Elastic wave metamaterials are artificial periodic structures that can control elastic waves. They can be used in aeronautics and astronautics, vehicle engineering, and other fields. This paper proposes a tunable metamaterial with two magnetic resonators. In this structure, a stainless steel plate connects the magnetic resonator to the external frame. Adjusting the distance between the magnets can affect the in-plane stress of the stainless steel plate and thus the internal stiffness. By adjusting the cell structure, a double-cell system with different internal stiffnesses can be formed to achieve a wider coupling band gap. First, the variations of the stiffness of the thin plate and the negative stiffness of the magnetic force with the distance between two magnetic resonators are determined. The dispersion relationship and the transmissibility of the single-cell metamaterial with double magnetic resonators and the double-cell metamaterial formed by adjusting the distance between magnets are obtained using a theoretical model. Then, the effect of the distance between two magnetic resonators on the metamaterial bandgap and double-cell coupled bandgap in a specific case is further studied. Finally, an experimental model is designed and manufactured using 3D printing technology. The transmissibility curves at different distances between two magnetic resonators are measured, and the bandgap coupling results of double-cell metamaterial structures are verified. The theoretical prediction of the bandgap of the metamaterial agrees well with the experimental results. This adjustment method can provide a new idea for the active control of restraining elastic wave transmission.

Key words metamaterial, tunable, negative stiffness, magnetic resonators, coupled bandgap