

基于 MK 和 TSDT 的功能梯度石墨烯增强复合材料板屈曲分析*

陈卫¹ 方耀楚¹ 彭林欣^{2,3**}

(¹ 南华大学土木工程学院, 衡阳, 421001)(² 广西大学土木建筑工程学院, 南宁, 530004)

(³ 广西防灾减灾与工程安全重点实验室, 工程防灾与结构安全教育部重点实验室, 南宁, 530004)

摘要 针对功能梯度石墨烯增强复合材料 (FG-GRC) 板屈曲行为问题, 提出一种含 7 个自由度变量改进 Reddy 型三阶剪切变形理论 (TSDT) 和移动克里金 (MK) 插值的无网格模型. 该模型不但能避免无网格法中第二类边界条件难以施加的问题, 且不需人工引入剪切修正因子, 适用于薄/中厚/厚板问题, 同时具有较高的计算精度. 通过 Halpin-Tsai 模型来预测 FG-GRC 板的有效杨氏模量, 并根据混合定律来确定其有效泊松比. 利用最小势能原理推导了含 7 个未知量 FG-GRC 板屈曲的无网格控制方程. 通过与文献结果对比验证了方法的收敛性及有效性. 数值结果表明: 当 FG-GRC 板的总层数 N_L 小于 10~15 时, FG-O 和 FG-X 型的 FG-GRC 板临界屈曲荷载变化率较为剧烈, 说明该阶段相较于环氧树脂板, GPLs 增强板的刚度降低 (或增加) 较快; 当 FG-GRC 板的总层数 $N_L > 10 \sim 15$ 时, 临界屈曲荷载变化率较为平缓; 随着 GPLs 的长厚比 l_{GPL}/h_{GPL} 增加到 1000 左右, FG-GRC 板临界屈曲荷载急剧增加, 当 GPLs 的长厚比 l_{GPL}/h_{GPL} 增加到 2000 以上时, FG-GRC 板临界屈曲荷载趋向于稳定且 GPLs 的长宽比 l_{GPL}/w_{GPL} 和长厚比 l_{GPL}/h_{GPL} 对 FG-GRC 板临界屈曲荷载影响不再明显.

关键词 功能梯度石墨烯增强复合材料板, 改进 Reddy 型三阶剪切变形理论, 移动克里金, 临界屈曲荷载

DOI: 10.19636/j.cnki.cjsm42-1250/o3.2023.052

0 引言

石墨烯^[1]是一种二维、单原子厚的碳层, 因其优异的热、电、机械性能^[2-4]而迅速成为学术界和工业界的关注热点. 2009 年, Rafiee 等^[2]开创性地用实验证明了通过只添加 0.1 重量分数 ($g_{GPL}\%$) 的石墨烯纳米片 (graphene nanoplatelets, GPLs), 增强聚合物复合材料的刚度和强度可以达到添加 1.0 $g_{GPL}\%$ 碳纳米管 (carbon nanotubes, CNTs) 所能达到的程度, 并且弹性模量增加了约 31%. 这是因为 GPLs 在聚合物基体中的分布因其二维属性而得到了极大改善, 相比于一维各向异性的 CNTs, 其团聚现象更少. 这为基于 GPLs 增强复合材料的轻量化高强结构的开发创造了巨大机遇. 因此, 板作为工程

结构使用的基本元件, 对 FG-GRC 板力学行为研究非常重要.

2017 年, Song 等^[5-7]基于一阶剪切变形理论 (first-order deformation theory, FSDT), 采用 Navier 解答, 给出了四边简支 FG-GRC 板的静态弯曲、屈曲、自由振动等数值结果. 研究发现: GPLs 的分布模式、重量分数、几何参数等对 FG-GRC 板的弯曲、屈曲、振动等力学行为均具有显著的影响. 2018 年, Lei 等^[8]基于 FSDT, 根据扩展 Halpin-Tsai 模型, 采用 kp-Ritz 法研究了热环境下 FG-GRC 板的屈曲行为. 2019 年, Thai 等^[9]基于四变量的精细化板理论 (refined plate theory, RPT), 采用等几何分析法 (isogeometric analysis, IGA) 研究了 FG-GRC 板的自由振动、弯曲和屈曲力学行为. 2020 年, 庞有卿等^[10]基于双曲剪切变形理论 (hyperbolic shear de-

* 国家自然科学基金项目 (12162004; 11562001) 和南华大学博士科研启动基金项目 (Y00043-13) 资助.

2023-10-19 收到修改稿, 2023-10-26 网络首发.

** 通讯作者. E-mail: penglx@gxu.edu.cn

formation theory, HSDT), 利用 Navier 技术求出了四边简支 FG-GRC 板的自振频率. 2021 年, 黄小林等^[11]考虑粘弹性地基的影响, 基于经典板理论 (classical plate theory, CPT), 采用 Galerkin 法和龙格库塔法求解了四边简支或固支下 FG-GRC 板自振频率和动力响应问题. 2022 年, 王壮壮等^[12]基于正弦剪切变形理论 (sinusoidal shear deformation theory, SSDT) 和 TSDT, 采用 Navier 解答, 研究了四边简支 FG-GRC 板静态弯曲和屈曲力学行为. 2022 年, Zhou 等^[13]基于 TSDT, 同样采用 Navier 解答, 求解了 winkler 地基上四边简支 FG-GRC 板临界屈曲荷载.

综上所述, 目前大多数文献基于 FSDT 或者 TSDT 框架下, 利用 Navier 解答技术给出了 FG-GRC 板静动力学行为的解析解. 然而解析解只能针对特定的边界条件和简单的载荷, 与实际工况具有一定的差异, 因而数值算法显得尤为重要. 无网格伽辽金法作为众多数值算法的一种, 因其具有列式简单、稳定性好及计算精度高等优点而被广泛应用. 但因第二类边界条件施加困难问题, 采用无网格伽辽金法研究各类板问题的文献均是基于 FSDT^[14-16]. 2016 年, Liew 等^[17,18]将 TSDT 中的高阶项设为一个独立变量, 将每节点含 5 个自由度变量扩展到 7 个自由度变量, 避免了第二类边界条件的施加, 结合无网格法分析了功能梯度碳纳米管增强复合材料 (functionally graded carbon nanotube-reinforced composite, FG-CNTRC) 板的自由振动与受迫振动问题.

本文基于改进 Reddy 型 TSDT 和移动克里金插值, 建立了分析 FG-GRC 板屈曲的无网格模型. 相比 FSDT 下的无网格模型, 该模型在不需要人工引入的前提下能同时考虑横向剪切变形效应和满足零牵引力边界条件, 适用于薄/中厚/厚板问题. 文中首先给出了改进 Reddy 型 TSDT 下 FG-GRC 板屈曲的无网格列式, 接着通过基准算例验证本文方法的收敛性和有效性. 最后数值讨论了 GPLs 分布模式, 重量分数、总层数、宽厚比和边界条件等对 FG-GRC 板临界屈曲荷载的影响.

1 材料性质

图 1 给出了总层数为 $N_L = 6$, 长、宽、高分别为

a, b, h 的 FG-GRC 板. FG-GRC 板由 N_L 层等厚度 h/N_L 石墨烯纳米增强片组成, 每层含均匀分散的 GPLs. GPL 重量分数 ($g_{GPL} \%$) 呈逐层变化以形成功能梯度结构. 由于拉-弯耦合效应, 屈曲分析时, 即使最小的面内荷载对非对称层合板也会产生的挠度和弯矩^[19]. 因此, 本文只考虑如图 2 所示三种不同的 GPLs 分布模式, 包括均匀分布 (UD 型) 和功能梯度分布 (FG-O 型, FG-X 型), 对于 GPLs 非对称分布的 FG-A 型或 FG-V 型不考虑.

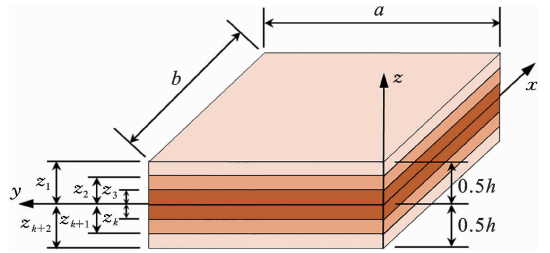


图 1 FG-GRC 板几何构造

Fig. 1 Geometric configuration of the FG-GRC plate

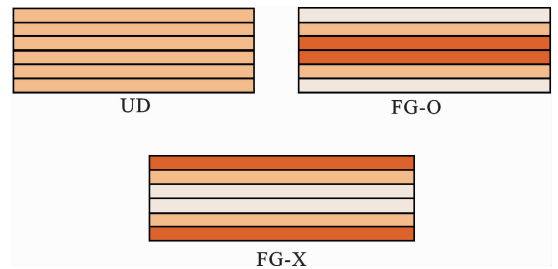


图 2 GPLs 的 3 种分布模式

Fig. 2 Three distribution types of GPLs

根据修正的 Halpin-Tsai 模型^[20], 第 k 层 GRC 有效杨氏模量为:

$$E_C^{(k)} = \frac{3}{8} \frac{1 + \xi_l \eta_l V_{GPL}^{(k)}}{1 - \eta_l V_{GPL}^{(k)}} \times E_M + \frac{5}{8} \frac{1 + \xi_w \eta_w V_{GPL}^{(k)}}{1 - \eta_w V_{GPL}^{(k)}} \times E_M \quad (1)$$

其中:

$$\left\{ \begin{aligned} \eta_l &= \frac{(E_{GPL}/E_M) - 1}{(E_{GPL}/E_M) + \xi_l} \\ \eta_w &= \frac{(E_{GPL}/E_M) - 1}{(E_{GPL}/E_M) + \xi_w} \\ \xi_l &= \frac{2l_{GPL}}{h_{GPL}} \\ \xi_w &= \frac{2w_{GPL}}{h_{GPL}} \end{aligned} \right. \quad (2)$$

式中:下标 C、GPL 和 M 分别表示石墨烯增强复合材料,GPLs 及基体材料; E_{GPL} 和 E_M 分别为 GPLs 和基体的杨氏模量; l_{GPL} , ω_{GPL} 和 h_{GPL} 是 GPLs 的长、宽、厚.此外,第 k 层 GRC 等效泊松比 $\nu_C^{(k)}$ 可由混合定律确定如下:

$$\nu_C^{(k)} = \nu_{GPL} V_{GPL}^{(k)} + \nu_M (1 - V_{GPL}^{(k)}) \quad (3)$$

第 k 层 GRC 的体积分数 $V_{GPL}^{(k)}$ 为:

$$V_{GPL}^{(k)} = \frac{g_{GPL}^{(k)}}{g_{GPL}^{(k)} + \rho_{GPL}/\rho_M (1 - g_{GPL}^{(k)})} \quad (4)$$

式中: ρ_{GPL} 和 ρ_M 分别为 GPLs 和基体材料的质量密度; $g_{GPL}^{(k)}$ 为第 k 层 GPLs 的重量分数,可由 GPLs 的分布模式确定如下^[5]:

UD: $g_{GPL}^{(k)} = g_{GPL} \quad (5)$

FG-O:

$$g_{GPL}^{(k)} = \frac{2g_{GPL} (N_L + 1 - |2k - N_L + 1|)}{(2 + N_L)} \quad (6)$$

FG-X:

$$g_{GPL}^{(k)} = \frac{2g_{GPL} (1 + |2k - N_L + 1|)}{(2 + N_L)} \quad (7)$$

2 移动克里金插值

$$\mathbf{P}^T(\mathbf{x}) = \left[1 \quad \frac{x-x_e}{d_m} \quad \frac{y-y_e}{d_m} \quad \frac{(x-x_e)^2}{d_m^2} \right] \quad (m=6)$$

式中, x_e 或 (x_e, y_e) 是子域 Ω_x 内任意点 \mathbf{x}_e 的坐标, d_m 是子域 Ω_x 的半径: $d_m = \alpha d_{ave}$, d_{ave} 为平均节点间距, α 为比例因子,本文采用方形影响域 $\alpha = 3$.

式(12)中大小为 $n \times m$ 的矩阵 \mathbf{P} 包含了子域 Ω_x 内 n 个节点处多项式基函数的值,表达式如下:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & p_2(\mathbf{x}_1) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}_{n-1}) & p_2(\mathbf{x}_{n-1}) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_{n-1}) \\ p_1(\mathbf{x}_n) & p_2(\mathbf{x}_n) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \quad (14)$$

式(8)中 $r(\mathbf{x})$ 定义为:

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \{R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}) \quad R(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}) \cdots R_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{x})\}^T \quad (15)$$

式中, $\mathbf{R}[R(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)]$ 是相关矩阵,而 $R(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ 是 n 个节点 \mathbf{x}_i 和 \mathbf{x}_j 之间的相关函数,它表示 $u(\mathbf{x})$ 的协方差: $R(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \text{cov}[u(\mathbf{x}_i) \quad u(\mathbf{x}_j)]$ 和 $R(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) =$

根据文献^[21],在 MK 插值技术中,子域 Ω_x 中的函数 $u(\mathbf{x})$ 可由 $u^h(\mathbf{x})$ 近似为:

$$u^h(\mathbf{x}) = [\mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A} + \mathbf{r}^T(\mathbf{x})\mathbf{B}]u(\mathbf{x}) \quad (8)$$

或

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_I^n N_I(\mathbf{x})u_I \quad (9)$$

式中, n 是子域 Ω_x 内的节点数, $N_I(x)$ 是 MK 的形函数,可定义为:

$$N_I(\mathbf{x}) = \sum_j^m p_j(\mathbf{x})A_{jI} + \sum_k^n r_k(\mathbf{x})B_{kI} \quad (10)$$

式(8)中的矩阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 为:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{P}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{P})^{-1}\mathbf{P}^T\mathbf{R}^{-1}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{P}\mathbf{A}) \quad (11)$$

式中, \mathbf{I} 为 $n \times n$ 阶单位矩阵,向量 $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ 是阶数为 m 的多项式基函数:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \{p_1(\mathbf{x}) \quad p_2(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad p_m(\mathbf{x})\}^T \quad (12)$$

对于二维问题常采用二次基函数 $\mathbf{P}^T(\mathbf{x}) = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2]$, ($m = 6$). 为了消除节点间距较少导致插值不稳定, Tu 等^[22] 于 2019 年提出了归一化多项式基函数 $\mathbf{P}(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \left[\frac{(x-x_e)(y-y_e)}{d_m^2} \quad \frac{(y-y_e)^2}{d_m^2} \right] \quad (m=6) \quad (13)$$

$\text{cov}[u(\mathbf{x}_i) \quad u(\mathbf{x})]$. 通常采用如下高斯函数:

$$R(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \exp\left(-\theta^2 \frac{r_{ij}^2}{a_0^2}\right) \quad (16)$$

式中, $r_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$, a_0 为子域 Ω_x 内节点之间的最大距离, $\theta > 0$ 为依赖于子域 Ω_x 节点坐标的参数. 根据文献^[23]取 $\theta = 5.0$.

式(15)中矩阵 $\mathbf{R}[R(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)]_{n \times n}$ 可以写为:

$$\mathbf{R}[R(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)] = \begin{bmatrix} 1 & R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & \cdots & R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n) \\ R(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) & 1 & \cdots & R(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_1) & R(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_2) & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

MK 形函数的一阶导为

$$N_{I,i}(\mathbf{x}) = \sum_j^m p_{j,i}(\mathbf{x})A_{jI} + \sum_k^n r_{k,i}(\mathbf{x})B_{kI} \quad (18)$$

移动克里金形函数满足 Kronecker delta 特性, 可以像有限元那样施加边界条件:

$$N_I(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (I=j) \\ 0 & (I \neq j) \end{cases} \quad (19)$$

3 FG-GRC 板的无网格控制方程

3.1 总能量泛函

根据 Liew 等^[17,18] 提出的改进 Reddy 型 TSDT, 含 7 个自由度变量的板位移场可表示为:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y) + cz^3\psi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y) + cz^3\psi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (20)$$

式中: $(u_0, v_0, w_0)^T$ 为板中面任意一点在 x, y, z 方向的位移; φ_x, φ_y 分别为绕 y 轴和 x 轴的转动; $c = -4/3h^2$.

根据几何方程, 板的内应变为:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}^T = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + z\boldsymbol{\kappa}_1 + z^3\boldsymbol{\kappa}_2 \quad (21)$$

其中:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\kappa}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\kappa}_2 = c \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (22)$$

而板的剪切应变为:

$$\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_{yz} \quad \gamma_{xz}\}^T = \boldsymbol{\varepsilon}_s + z^2\boldsymbol{\kappa}_s \quad (23)$$

其中:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \begin{bmatrix} \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\kappa}_s = 3c \begin{bmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{bmatrix} \quad (24)$$

第 k 层 FG-GRC 板的应力-应变关系为:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(k)} & Q_{12}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21}^{(k)} & Q_{22}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (25)$$

其中:

$$\begin{cases} Q_{11}^{(k)} = Q_{22}^{(k)} = \frac{E_C^{(k)}}{1 - (\nu_C^{(k)})^2} \\ Q_{12}^{(k)} = Q_{21}^{(k)} = \frac{\nu_C^{(k)} E_C^{(k)}}{1 - (\nu_C^{(k)})^2} \\ Q_{66}^{(k)} = Q_{55}^{(k)} = Q_{44}^{(k)} = \frac{E_C^{(k)}}{2(1 + \nu_C^{(k)})} \end{cases} \quad (26)$$

式中, $E_C^{(k)}$ 和 $\nu_C^{(k)}$ 分别为第 k 层 GPLs 的有效弹性模量及泊松比.

FG-GRC 板的应变能为:

$$U_p = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{S} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \quad (27)$$

其中:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \\ \boldsymbol{\kappa}_1 \\ \boldsymbol{\kappa}_2 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_s \\ \boldsymbol{\kappa}_s \end{Bmatrix}, \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{F} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} & \mathbf{H} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{A}^s & \mathbf{D}^s \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{D}^s & \mathbf{F}^s \end{bmatrix} \quad (28)$$

$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) =$

$$\sum_{k=1}^{N_L} \int_{z_k}^{z_{k+1}} Q_{ij}^{(k)} (1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (29)$$

$$(A_{ij}^s, D_{ij}^s, F_{ij}^s) = \sum_{k=1}^{N_L} \int_{z_k}^{z_{k+1}} Q_{ij}^{(k)} (1, z^2, z^4) dz \quad (i, j = 4, 5) \quad (30)$$

如图 3 所示, 对 FG-GRC 板施加内荷载作用, 它的势能为:

$$W_g = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_x & R_{xy} \\ R_{xy} & R_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} d\Omega \quad (31)$$

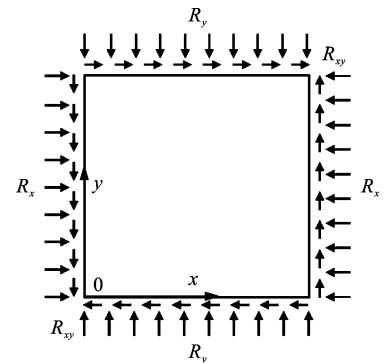


图 3 面内荷载作用下 FG-GRC 板

Fig. 3 The FG-GRC plate under in-plane loads

将式(27)和式(31)进行叠加,则得 FG-GRC 板屈曲时的势能泛函为:

$$\Pi = U_p - W_g \quad (32)$$

3.2 控制列式

利用式(9)对 FG-GRC 板节点进行离散可得:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0^h &= [u_0^h \quad v_0^h \quad w_0^h \quad \phi_x^h \quad \phi_y^h \quad \psi_x^h \quad \psi_y^h]^T = \\ & \sum_{I=1}^n N_I(x) u_I = \\ & \sum_{I=1}^n N_I(x) [u_I \quad v_I \quad w_I \quad \phi_{xI} \quad \phi_{yI} \quad \psi_{xI} \quad \psi_{yI}]^T \end{aligned} \quad (33)$$

将式(33)代入式(32),根据最小势能原理, $\delta\Pi = 0$,可得 FG-GRC 板屈曲无网格控制方程:

$$(\mathbf{K} - \mathbf{G})\mathbf{U} = 0 \quad (34)$$

其中:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_m^T \\ \mathbf{B}_{b1}^T \\ \mathbf{B}_{b2}^T \\ \mathbf{B}_{s1}^T \\ \mathbf{B}_{s2}^T \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{F} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} & \mathbf{H} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_s & \mathbf{D}_s \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_s & \mathbf{F}_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_m \\ \mathbf{B}_{b1} \\ \mathbf{B}_{b2} \\ \mathbf{B}_{s1} \\ \mathbf{B}_{s2} \end{Bmatrix} d\Omega$$

$$\mathbf{G} = \int_{\Omega} \mathbf{G}_I^T \bar{\mathbf{N}} \mathbf{G}_J d\Omega$$

式中:

$$\mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} N_{I,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{I,y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{I,y} & N_{I,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{b1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N_{I,x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{I,y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{I,y} & N_{I,x} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{b2} = c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{I,x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{I,y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{I,y} & N_{I,x} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{s1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{I,x} & N_I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{I,y} & 0 & N_I & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{s2} = 3c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_I \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{I,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{I,y} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} R_x & R_{xy} \\ R_{xy} & R_y \end{bmatrix}$$

设 $R_x = c_1 R_y$, $R_x = c_2 R_{xy}$ (c_1, c_2 为常数),将 R_x 从 \mathbf{G} 中提出来,则有:

$$(\mathbf{K} - R_x \bar{\mathbf{G}}) = 0 \quad (35)$$

通过解上述特征值方程,可得 FG-GRC 板临界屈曲荷载.

4 数值结果与分析

文中所有算例采用无网格均布节点,高斯节点数为 4×4 . 考虑单轴压缩 ($R_x = -1, R_y = 0, R_{xy} = 0$), 双轴压缩 ($R_x = -1, R_y = -1, R_{xy} = 0$), 面内剪切 ($R_x = 0, R_y = 0, R_{xy} = -1$) 三种荷载类型. FG-GRC 板和 GPLs 的几何尺寸分别为 $a \times b \times h = 0.45 \text{ m} \times 0.45 \text{ m} \times 0.045 \text{ m}$, $l_{\text{GPL}} \times w_{\text{GPL}} \times h_{\text{GPL}} = 2.5 \mu\text{m} \times 1.5 \mu\text{m} \times 1.5 \text{ nm}$. 环氧树脂基体和 GPLs 的材料属性见表 1^[2,24,25]. 如无特别说明,默认取 $a/b = 1$, $N_L = 10$, $g_{\text{GPL}} = 1.0\%$. 临界屈曲荷载无量纲公式为: $N_{\text{cr}} = N_{\text{cr}} a^2 / E_M h^3$.

表 1 FG-GRC 板材料属性

Table 1 Material properties of FG-GRC plate

Material properties	Epoxy	GPL
Young's modulus (GPa)	$E_M = 3$	$E_{\text{GPL}} = 1010$
Poisson's ratio	$\nu_M = 0.36$	$\nu_{\text{GPL}} = 0.186$
Density (kg/m ³)	$\rho_M = 1200$	$\rho_{\text{GPL}} = 1060$

FG-GRC 板结构考虑如下常见 3 种边界条件:

(1) 固支边界(C): 当 $x=0$ 和 a 时, $v=w=\phi_x = \phi_y = \psi_x = \psi_y = 0$. 当 $y=0$ 和 b 时, $u=w=\phi_x = \phi_y = \psi_x = \psi_y = 0$.

(2) 简支边界(S): 当 $x=0$ 和 a 时, $v=w=\phi_y = \psi_y = 0$. 当 $y=0$ 和 b 时, $u=w=\phi_x = \psi_x = 0$.

(3) 自由边界(F): 没有限制.

4.1 收敛性及有效性分析

图 4 给出了单压下四边简支 FG-GRC 板归一化无量纲临界屈曲荷载随均布离散点数的收敛情况. 由图 4 可知: 随着无网格节点数的增多, 数值结果越加逼近解析解; 在无网格节点数在 50 左右时, 计算结果已基本收敛. 二者说明了本文方法收敛性

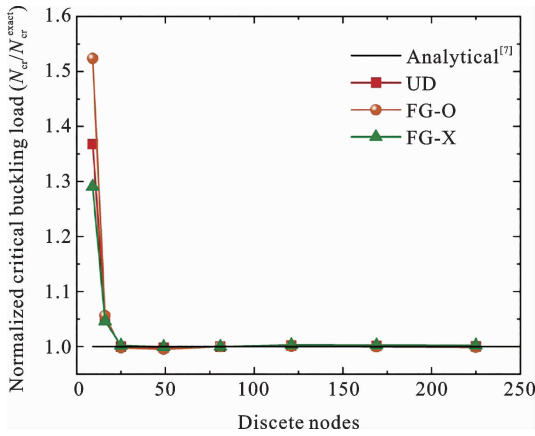


图 4 单压下四边简支 FG-GRC 板归一化无量纲临界屈曲荷载收敛性分析

Fig. 4 Convergence analysis of normalized critical buckling loads of the simply supported FG-GRC plate

好,易趋于稳定. 后续算例中均采用 11×11 均布节点进行离散.

表 2 计算了四边简支 FG-GRC 板在单轴压缩和双轴压缩下无量纲临界屈曲荷载,并将计算结果与 Song^[7]、王壮壮^[12] 分别基于 FSDT 和 TSDT,采用 Navier 解答得到的解析解进行对比. 结果发现,采用本文方法所得计算结果与已有文献的解析解吻合良好,证明了本文方法求解 FG-GRC 板屈曲问题的有效性.

表 2 单压或双压下四边简支 FG-GRC 板无量纲临界屈曲荷载
Table 2 Dimensionless critical buckling loads of simply supported FG-GRC plate under uniaxial and biaxial compression

Load type	Methods	UD	FG-O	FG-X
Uniaxial compression	TSDT ^[12]	0.0152	0.0108	0.0191
	FSDT ^[7]	0.0152	0.0107	0.0195
	present	0.0152	0.0108	0.0192
Biaxial compression	TSDT ^[12]	0.0076	0.0054	0.0096
	FSDT ^[7]	0.0076	0.0053	0.0097
	present	0.0076	0.0054	0.0096

为了将本文方法与文献中夹芯板的试验数据结果进行对比,把本文 FG-GRC 板物理关系退化到各向异性材料,应力应变关系见文献[26]. 板芯考虑轻

木和泡沫两种材料,上下板面为纤维增强材料,三者材料属性见文献[27]中的表 1. 轻木夹芯板和泡沫夹芯板的长宽分别为 $183 \text{ cm} \times 92 \text{ cm}$ 和 $122 \text{ cm} \times 92 \text{ cm}$,板芯厚度均为 1.27 cm ,板面厚度为 0.32 cm . 边界条件为长边简支,短边固定. 表 3 给出了短边单压下夹芯板临界屈曲荷载试验结果、有限元解及本文解,对比发现本文所获得数值结果更接近于有限元解. 数值解与试验解的误差来源^[27]主要有两点:一是试验时无法真正获得跟数值分析时同等固定及简支边界条件;二是试验过程可能会伴随着材料非线性发生.

表 3 短边单压下夹芯板临界屈曲荷载对比分析

Table 3 Comparative analysis of critical buckling loads of sandwich panels under short edge single compression

Core material	Experimental (kN) ^[27]	FEM (kN) ^[27]	Present (kN)
Balsa	334	365	369
Foam	267	347	343

4.2 参数分析

表 4 和表 5 分别展示了四边简支 FG-GRC 板在单轴压缩和双轴压缩下的无量纲临界屈曲荷载和无量纲临界屈曲荷载变化率 R_N 的影响,其中 $R_N = N_{cr}/N_{cr}^M \times 100\%$, N_{cr} 和 N_{cr}^M 分别表示 FG-GRC 板和环氧树脂板,即有 GPLs 和无 GPLs 增强板的无量纲临界屈曲荷载. 由表 4-5 可知:(a) 本文基于改进 Reddy 型 TSDT (I-TSDT),采用无网格法得到的计算结果与王壮壮等^[12] 基于 TSDT,采用 Navier 解答得到的解析解基本一致,证明了本文方法计算 FG-GRC 板临界屈曲荷载具有较高的计算精度;(b) 与 I-TSDT 和 TSDT 相比,FSDT 低估了 FG-O 型 FG-GRC 板的临界屈曲荷载和临界屈曲荷载变化率,而高估了 FG-X 型 FG-GRC 板的临界屈曲荷载和临界屈曲荷载变化率,三种剪切理论下 UD 型 FG-GRC 板的计算结果一致,这是由于 FSDT 假设截面沿厚度方向的应变是线性的,而 I-TSDT 和 TSDT 假设截面沿厚度方向的应变是非线性的,且 GPLs

中的 FG-X 型和 FG-O 型分布的不均匀性会增加其差异；(c)环氧树脂(Pure epoxy)板的临界屈曲荷载均小于 FG-GRC 板，且随着 GPLs 的重量分数 g_{GPL} 增大而增大，说明 GPLs 极高的弹性模量可有效增

加 FG-GRC 板的刚度；(d)三种 GPLs 分布模式下的 FG-GRC 板临界屈曲荷载存在较大的差异，其大小依次为：FG-X>UD>FG-O，这是由于 GPLs 分布模式差异，导致 FG-GRC 板结构刚度差异所致。

表 4 单压下四边简支 FG-GRC 板无量纲临界屈曲荷载和 R_N

Table 4 Dimensionless critical buckling loads and R_N of simply supported FG-GRC plate under uniaxial compression

GPLs type	Method	g_{GPL}						
		0.0%	0.2%	0.4%	0.6%	0.8%	1.0%	1.2%
UD	FSDT ^[7]	0.0035	0.0058 (165.7%)	0.0082 (234.3%)	0.0105 (300.0%)	0.0128 (365.7%)	0.0152 (434.3%)	0.0175 (500.0%)
	TSDT ^[12]	0.0035	0.0058 (165.7%)	0.0082 (234.3%)	0.0105 (300.0%)	0.0128 (365.7%)	0.0152 (434.3%)	0.0175 (500.0%)
	I-TSDT	0.00352	0.00587 (166.8%)	0.00821 (233.2%)	0.01055 (299.7%)	0.01289 (366.2%)	0.01523 (432.7%)	0.01757 (499.1%)
FG-O	FSDT ^[7]	0.0035	0.0050 (142.9%)	0.0064 (182.9%)	0.0078 (222.9%)	0.0093 (265.7%)	0.0107 (305.7%)	0.0121 (345.7%)
	TSDPT ^[12]	0.0035	0.0050 (142.9%)	0.0064 (182.9%)	0.0079 (225.7%)	0.0093 (265.7%)	0.0108 (308.6%)	0.0122 (348.6%)
	I-TSDT	0.00352	0.00500 (142.0%)	0.00645 (183.2%)	0.00791 (224.7%)	0.00936 (265.9%)	0.01081 (307.1%)	0.01226 (348.3%)
FG-X	FSDT ^[7]	0.0035	0.0067 (191.4%)	0.0099 (282.9%)	0.0131 (374.3%)	0.0163 (465.7%)	0.0195 (557.1%)	0.0227 (648.6%)
	TSDT ^[12]	0.0035	0.0067 (191.4%)	0.0098 (280.0%)	0.0129 (368.6%)	0.0160 (457.1%)	0.0191 (545.7%)	0.0222 (634.3%)
	I-TSDT	0.00352	0.00669 (190.1%)	0.00982 (279.0%)	0.01294 (367.6%)	0.01605 (456.0%)	0.01916 (544.3%)	0.02226 (632.4%)

表 5 双压下四边简支 FG-GRC 板无量纲临界屈曲荷载和 R_N

Table 5 Dimensionless critical buckling loads and R_N of simply supported FG-GRC plate under biaxial compression

GPLs type	Method	g_{GPL}						
		0.0%	0.2%	0.4%	0.6%	0.8%	1.0%	1.2%
UD	FSDT ^[7]	0.0018	0.0029 (161.1%)	0.0041 (227.8%)	0.0053 (294.4%)	0.0064 (355.6%)	0.0076 (422.2%)	0.0088 (488.9%)
	TSDT ^[12]	0.0018	0.0029 (161.1%)	0.0041 (227.8%)	0.0053 (294.4%)	0.0064 (355.6%)	0.0076 (422.2%)	0.0088 (488.9%)
	I-TSDT	0.00176	0.00293 (166.5%)	0.00410 (233.0%)	0.00527 (299.4%)	0.00644 (365.9%)	0.00761 (432.4%)	0.00878 (498.9%)

	FSDT ^[7]	0.0018	0.0025 (138.9%)	0.0032 (177.8%)	0.0039 (216.7%)	0.0046 (255.6%)	0.0053 (294.4%)	0.0061 (338.9%)
FG-O	TSDT ^[12]	0.0018	0.0025 (138.9%)	0.0032 (177.8%)	0.0039 (216.7%)	0.0047 (255.6%)	0.0054 (294.4%)	0.0061 (338.9%)
	I-TSDT	0.00176	0.00250 (142.0%)	0.00323 (183.5%)	0.00395 (224.4%)	0.00468 (265.9%)	0.00540 (306.8%)	0.00613 (348.3%)
	FSDT ^[7]	0.0018	0.0034 (188.9%)	0.005 (277.8%)	0.0066 (366.7%)	0.0082 (455.6%)	0.0097 (538.9%)	0.0113 (627.8%)
FG-X	TSDPT ^[12]	0.0018	0.0033 (188.9%)	0.0049 (277.8%)	0.0065 (366.7%)	0.0080 (455.6%)	0.0096 (538.9%)	0.0111 (627.8%)
	I-TSDT	0.00176	0.00334 (189.8%)	0.00491 (279.0%)	0.00647 (367.6%)	0.00803 (456.3%)	0.00958 (544.3%)	0.01113 (632.4%)

图5给出了总层数 N_L 对单压下四边简支 FG-GRC 板无量纲临界屈曲荷载变化率 R_N 的影响。从图5可以看出：当 FG-GRC 板的总层数 $N_L < 10 \sim 15$ 时，FG-X 和 FG-O 分布模式下的 FG-GRC 板临界屈曲荷载变化率较为剧烈，说明该阶段相较于环氧树脂板，GPLs 增强板的刚度降低（或增加）较快；当 FG-GRC 板的总层数 $N_L > 10 \sim 15$ 时，板临界屈曲荷载变化率较为平缓；由于 UD 型板中的 GPLs 是均匀分布，总层数对其无影响。

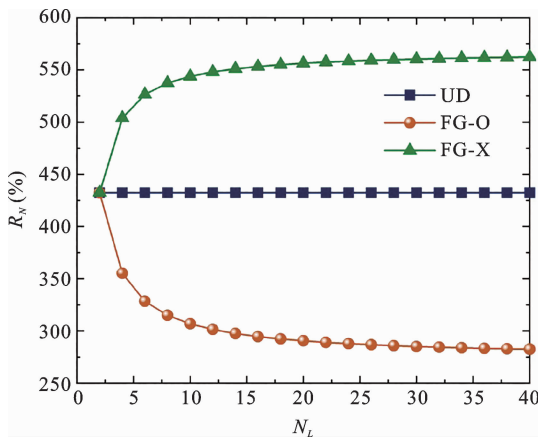


图5 总层数 N_L 对单压下四边简支 FG-GRC 板无量纲临界屈曲荷载变化率 R_N 的影响

Fig. 5 Effect of total number of layers N_L on the percentage dimensionless critical buckling loads change R_N of the FG-GRC plate

图6给出了宽厚比 b/h 对单压下四边简支 FG-GRC 板无量纲临界屈曲荷载 N_{cr} 的影响，可以得到：三种 GPLs 分布型的 FG-GRC 板临界屈曲荷载随宽厚比的变化趋势基本一致；FG-GRC 板临界屈曲荷载随着宽厚比的增大而增大，即板越薄，临界屈曲荷载越大。

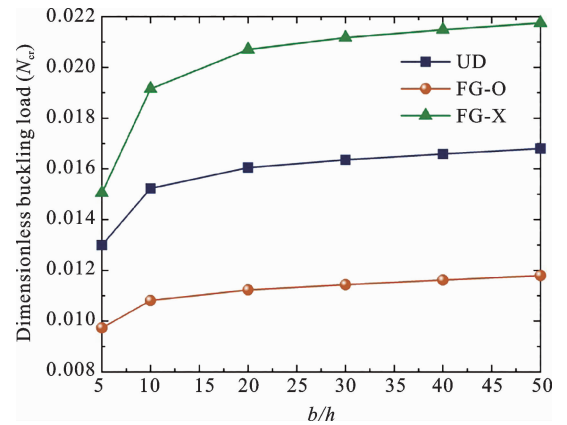


图6 宽厚比 b/h 对单压下四边简支 FG-GRC 板无量纲临界屈曲荷载的影响

Fig. 6 Effect of width-to-thickness ratio b/h on the dimensionless critical buckling load of simply supported FG-GRC plates under uniaxial compression

图7讨论了GPLs的长宽比 l_{GPL}/w_{GPL} 和长厚比 l_{GPL}/h_{GPL} 对单轴压缩和双轴压缩下四边简支 FG-GRC 板无量纲临界屈曲荷载 N_{cr} 的影响。数值计算

时,固定 $l_{GPL} = 2.5 \mu\text{m}$ 值,变化 w_{GPL} 和 h_{GPL} . 研究发现:随着 GPLs 的长厚比 l_{GPL}/h_{GPL} 增加到 1000 左右,FG-GRC 板临界屈曲荷载急剧增加,然后随着 l_{GPL}/h_{GPL} 的进一步增加而增加非常缓慢. 当长厚比 l_{GPL}/h_{GPL} 增加到 2000 以上时,FG-GRC 板临界屈曲荷载趋向于稳定且 GPLs 的长宽比 l_{GPL}/w_{GPL} 和长厚比 l_{GPL}/h_{GPL} 对 FG-GRC 板临界屈曲荷载影响不

再明显;方形 GPLs($l_{GPL}/w_{GPL} = 1.0$)增强 FG-GRC 板的临界屈曲荷载比矩形 GPLs($l_{GPL}/w_{GPL} = 3.0$)增强 FG-GRC 板临界屈曲荷载大,这是因为方形 GPLs($l_{GPL}/w_{GPL} = 1.0$)有着较高的表面积,GPLs 与基体材料之间具有较大的接触面积,致使其具有更高的结构刚度.

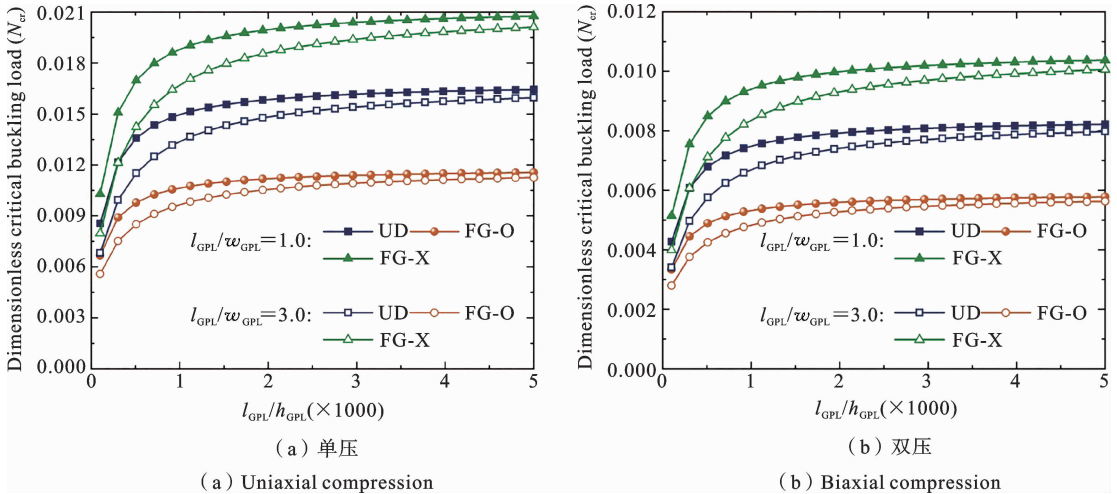


图 7 GPLs 几何尺寸对单压或双压下四边简支 FG-GRC 板无量纲临界屈曲荷载的影响
Fig. 7 Effect of GPLs geometry on the dimensionless critical buckling load of simply supported FG-GRC plates under uniaxial or biaxial compression

图 8 给出了不同边界条件、面内荷载类型及 GPLs 分布模式下 FG-GRC 板无量纲临界屈曲荷载 N_{cr} 随重量分数 ($g_{GPL} \%$) 的变化. 由图 8 可知:对于不同边界条件和面内荷载类型,FG-X 型的 FG-GRC 板的临界屈曲荷载值始终最大,UD 型次之,FG-O 型最小;FG-GRC 板的临界屈曲荷载随着边界条件约束的削弱而减小;单轴压缩、双轴压缩和面内剪切下三类 GPLs 分布的 FG-GRC 板临界屈曲荷载均随着重量分数 g_{GPL} 增大而增大,且单轴压缩得到的临界屈曲荷载大于双轴压缩临界屈曲荷载,这是因为受双轴压缩的板比单轴压缩的板更容易屈曲,而对于受面内剪切的板,因最难引起板结构的不稳定,所以其临界屈曲荷载值最大.

5 结论

本文基于改进 Reddy 型 TSDT 和移动克里金

插值,提出了求解 FG-GRC 板临界屈曲荷载问题的无网格法,并根据最小势能原理推导出屈曲控制方程,通过数值分析得出以下结论:

- (1) 本文得到的计算结果与解析解吻合较好,证明了该方法求解 FG-GRC 板临界屈曲荷载问题的有效性和准确性.
- (2) 当 FG-GRC 板的总层数 $N_L < 10 \sim 15$ 时,FG-O 和 FG-X 型的 FG-GRC 板临界屈曲荷载变化率较为剧烈,说明该阶段相较于环氧树脂板,GPLs 增强板的刚度降低(或增加)较快;当 FG-GRC 板的总层数 $N_L > 10 \sim 15$ 时,临界屈曲荷载变化率较为平缓.

(3) GPLs 的长厚比 l_{GPL}/h_{GPL} 在 0 到 1000 左右区间内,FG-GRC 板临界屈曲荷载急剧增加. 当 GPLs 的长厚比 l_{GPL}/h_{GPL} 增加到 2000 以上时,FG-GRC 板临界屈曲荷载趋向于稳定且 GPLs 的长宽比 l_{GPL}/w_{GPL} 和长厚比 l_{GPL}/h_{GPL} 对 FG-GRC 板临界

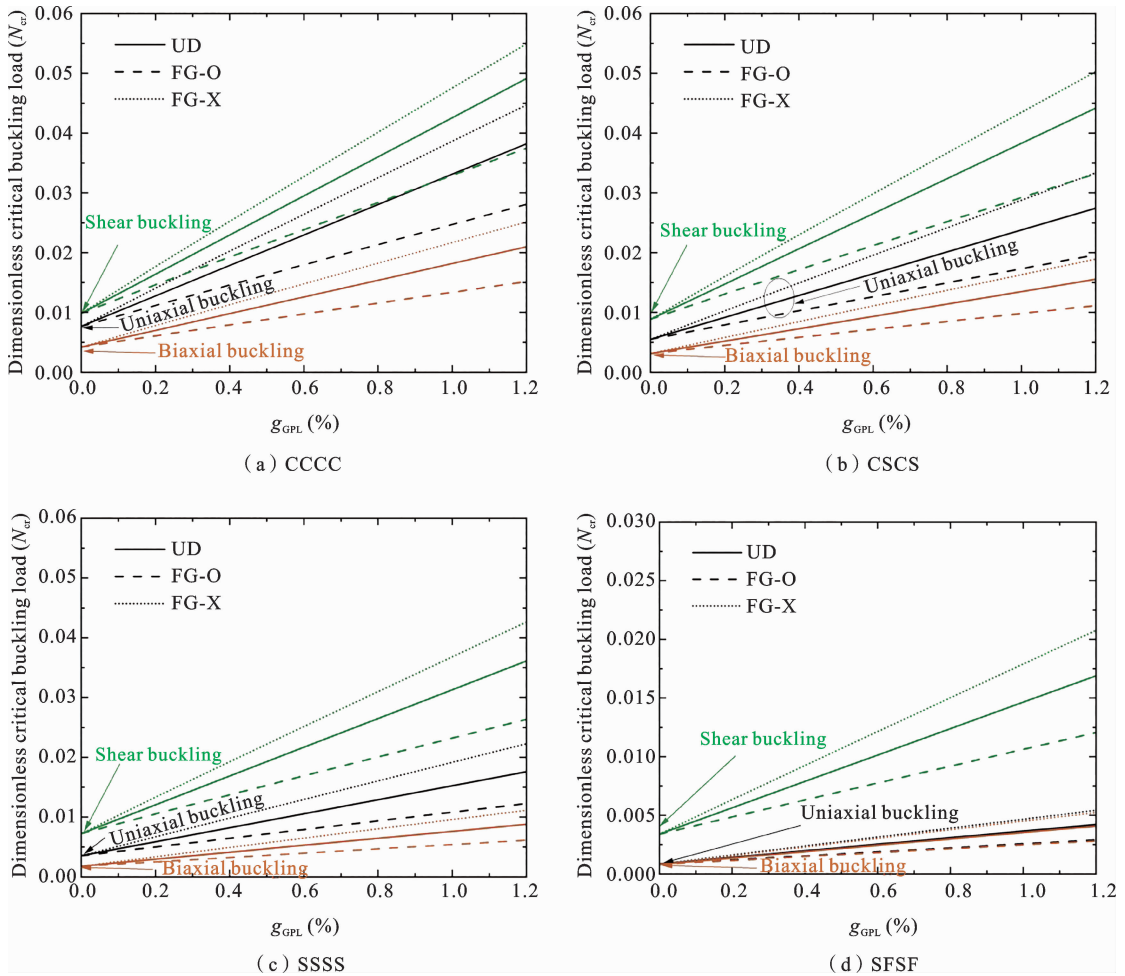


图8 不同边界条件下 FG-GRC 板无量纲临界屈曲荷载随重量分数 g_{GPL} 的变化

Fig.8 The variation of dimensionless critical buckling load of FG-GRC plate with g_{GPL} under different boundary conditions

屈曲荷载影响不再明显。

参考文献

[1] Novoselov K S, Geim A K, Morozov S V, et al. Electric field effect in atomically thin carbon films [J]. *Science*, 2004, 306(5696): 666-669.

[2] Rafiee M A, Rafiee J, Wang Z, et al. Enhanced mechanical properties of nanocomposites at low graphene content [J]. *ACS nano*, 2009, 3(12): 3884-3890.

[3] Lee C, Wei X, Kysar J W, et al. Measurement of the elastic properties and intrinsic strength of monolayer graphene [J]. *Science*, 2008, 321(5887): 385-388.

[4] Xu D, Skachko I, Barker A, et al. Approaching ballistic transport in suspended graphene [J]. *Nature*

Nanotechnology, 2008, 3(8): 385-388.

[5] Song M, Kitipornchai S, Yang J. Free and forced vibrations of functionally graded polymer composite plates reinforced with graphene nanoplatelets [J]. *Composite Structures*, 2017, 159: 579-588.

[6] Song M, Yang J, Kitipornchai S, et al. Buckling and postbuckling of biaxially compressed functionally graded multilayer graphene nanoplatelet-reinforced polymer composite plates [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2017, 131: 345-355.

[7] Song M, Yang J, Kitipornchai S. Bending and buckling analyses of functionally graded polymer composite plates reinforced with graphene nanoplatelets [J]. *Composites Part B: Engineering*, 2018, 134: 106-113.

[8] Lei Z, Su Q, Zeng H, et al. Parametric studies on

- buckling behavior of functionally graded graphene-reinforced composites laminated plates in thermal environment [J]. *Composite Structures*, 2018, 202: 695-709.
- [9] Thai C H, Ferreira A J M, Tran T D, et al. Free vibration, buckling and bending analyses of multilayer functionally graded graphene nanoplatelets reinforced composite plates using the NURBS formulation [J]. *Composite Structures*, 2019, 220: 749-759.
- [10] 庞有卿, 王爱文, 郝育新等. 功能梯度石墨烯增强复合材料板的自由振动[J]. *应用力学学报*, 2020, 37(02): 558-565. (Pang Y Q, Wang A W, Hao Y X, et al. Free vibration of functionally graded graphene-reinforced composite plates [J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2020, 37(02): 558-565. (in Chinese)).
- [11] 黄小林, 魏耿忠, 刘思奇等. 黏弹性地基上石墨烯增强功能梯度矩形板的自由振动和动力响应[J]. *应用力学学报*, 2021, 38(03): 1202-1208. (Huang X L, Wei G Z, Liu S Q, et al. Free vibration and dynamic response of functionally graded graphene-reinforced rectangular plates on viscoelastic foundations [J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2021, 38(03): 1202-1208. (in Chinese)).
- [12] 王壮壮, 马连生. 高阶剪切变形板理论下 FG-GRC 板的屈曲和弯曲分析[J]. *工程力学*, 2023, 40(06): 9-18. (Wang Z Z, Ma L S. Buckling and bending analysis of FG-GRC plates using high-order shear deformation plate theories [J]. *Engineering Mechanics*, 2023, 40(06): 9-18. (in Chinese)).
- [13] Zhou L, Najjari Y. Analytical solution of buckling problem in plates reinforced by Graphene platelet based on third order shear deformation theory [J]. *Steel and Composite Structures, An International Journal*, 2022, 43(6): 725-734.
- [14] 彭林欣, 杨绿峰. 基于一阶剪切变形理论和移动最小二乘近似的加肋板屈曲临界荷载求解[J]. *工程力学*, 2012, 29(7): 42-48. (Peng L X, Yang L F. Critical buckling load calculation of ribbed plates by the first-order shear deformation theory and the moving-least square approximation [J]. *Engineering Mechanics*, 2012, 29(7): 42-48. (in Chinese)).
- [15] Peng L X, Chen S Y, Wei D Y, et al. Static and free vibration analysis of stiffened FGM plate on elastic foundation based on physical neutral surface and MK method [J]. *Composite Structures*, 2022, 290: 115482.
- [16] Chen W, Yang J S, Wei D Y, et al. Buckling analysis of corrugated-core sandwich plates using a FSDT and a meshfree Galerkin method [J]. *Thin-Walled Structures*, 2022, 180: 109846.
- [17] Selim B A, Zhang L W, Liew K M. Vibration analysis of CNT reinforced functionally graded composite plates in a thermal environment based on Reddy's higher-order shear deformation theory [J]. *Composite Structures*, 2016, 156: 276-290.
- [18] Selim B A, Zhang L W, Liew K M. Impact analysis of CNT-reinforced composite plates based on Reddy's higher-order shear deformation theory using an element-free approach [J]. *Composite Structures*, 2017, 170: 228-242.
- [19] Arthur, W., Leissa. Conditions for laminated plates to remain flat under inplane loading [J]. *Composite Structures*, 1986, 6(4): 261-270.
- [20] Afdl J H, Kardos J L. The Halpin-Tsai equations: a review [J]. *Polymer Engineering & Science*, 1976, 16(5): 344-352.
- [21] Lei G. Moving kriging interpolation and element-free Galerkin method [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, 56: 1-11.
- [22] Tu S, Yang H, Leilei D, et al. A stabilized moving Kriging interpolation method and its application in boundary node method [J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2019, 100: 14-23.
- [23] Bui T Q, Nguyen M N, Zhang C. Buckling analysis of Reissner-Mindlin plates subjected to in-plane edge loads using a shear-locking-free and meshfree method [J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2011, 35(9): 1038-1053.
- [24] Yasmin A, Daniel I M. Mechanical and thermal properties of graphite platelet/epoxy composites [J]. *Polymer*, 2004, 45(24): 8211-8219.
- [25] Fang L, Ming P, Ju L. Ab initio calculation of ideal strength and phonon instability of graphene under tension [J]. *Physical Review B*, 2007, 76(6): 64120.
- [26] Reddy J N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*[M]. New York Washington, D. C.: CRC Press, 2003.

- [27] Boyle M P, Roberts J C, Wienhold P D, et al. Experimental, numerical, and analytical results for buckling and post-buckling of orthotropic rectangular sandwich panels [J]. *Composite Structures*, 2001, 52(34): 375-380.

Buckling Analysis of Functionally Graded Graphene-reinforced Plates Based on Moving Kriging and Third-order Deformation Theory

Wei Chen¹ Yaochu Fang¹ Linxin Peng^{2,3}

⁽¹⁾*School of Civil Engineering, University of South China, Hengyang, 421001*

⁽²⁾*School of Civil Engineering and Architecture, Guangxi University, Nanning, 530004*

⁽³⁾*Key Laboratory of Disaster Prevention and Structural Safety of Ministry of Education, Guangxi Key Laboratory of Disaster Prevention and Engineering Safety, Guangxi University, Nanning, 530004*

Abstract The emergence of graphene nanoplatelets (GPLs) has enabled the development of light-weight and high-strength plates, making it a prominent area of research in science and engineering. Therefore, it is essential to study the buckling performance of functionally graded graphene-reinforced composite (FG-GRC) plates. This paper presents a new meshless model to solve the buckling behavior problem of FG-GRC plates. The model is based on an improved Reddy-type third-order shear deformation theory (TS-DT) with seven degrees of freedom and a moving Kriging (MK) interpolation method, which can overcome the challenge of implementing the second-type boundary conditions in meshless methods and eliminate the need for shear correction factors. The model is applicable to thin/medium/thick plate problems and has high computational accuracy. The Halpin-Tsai model is used to predict the effective Young's modulus of the FG-GRC plate, and the effective Poisson's ratio is determined using the mixture law. The meshless governing equation for the buckling of the FG-GRC plate with seven unknowns is derived based on the principle of minimum potential energy. The convergence and effectiveness of the proposed method are verified by comparing it with literature results. The numerical results demonstrate that when the total number of layers (N_L) of the FG-GRC plate is less than 10-15, the critical buckling load of the FG-O-type and FG-X-type plates changes more drastically than that of the epoxy pure plate, indicating that the stiffness of the graphene-reinforced plate decreases (or increases) rapidly in this stage, as opposed to the epoxy pure plate. However, when N_L exceeds 10-15, the change rate of the critical buckling load for the FG-GRC plate becomes smoother. Furthermore, the critical buckling load of the FG-GRC plate increases sharply when the length-thickness ratio of the GPLs reaches around 1000. Once the length-thickness ratio of GPLs surpasses 2000, the critical buckling load of the FG-GRC plate tends to stabilize, and the length-width ratio and length-thickness ratio of the GPLs have no significant effect on it. Overall, the research findings of this study not only contribute to the understanding of FG-GRC plates but also offer practical and insightful recommendations for their design and theoretical research.

Key words functionally graded graphene-reinforced composite plates, improved Reddy-type third-order shear deformation theory, moving Kriging, critical buckling load