

磁电弹性体中纳米孔边任意位置贯穿裂纹的解析解*

肖俊华^{1,2**} 信玉岩^{1,2}

(¹ 燕山大学工程力学系, 秦皇岛, 066004)(² 燕山大学河北省重型装备与大型结构力学可靠性重点实验室, 秦皇岛, 066004)

摘要 本文研究了反平面机械载荷、面内电载荷和面内磁载荷作用下磁电弹材料中含有纳米尺度孔边任意位置贯穿裂纹的 III 型断裂力学性能。基于 Gurtin-Murdoch 表面弹性理论考虑纳米缺陷(孔洞和裂纹)的表面效应, 利用磁电弹理论和复变弹性理论获得了纳米缺陷表面为磁电不可通条件下磁电弹场的精确解, 给出了贯穿裂纹两端裂尖的磁电弹场强因子的解析表达。所得结果与已有研究比较说明了本文方法的有效性。讨论了裂纹位置、裂纹相互作用与施加多物理场载荷对无量纲磁电弹场强因子的影响。结果表明: 贯穿裂纹裂尖的无量纲磁电弹场强因子尺寸效应显著; 缺陷表面效应对裂纹耦合尖端场的影响受裂纹位置的制约; 无量纲磁电弹场强因子受贯穿裂纹两端的裂纹长度比与施加力电磁载荷的显著影响。

关键词 磁电弹性材料, 纳米尺度多缺陷, 孔边贯穿裂纹, 尺寸效应, 裂纹位置

DOI: 10.19636/j.cnki.cjsm42-1250/o3.2023.026

0 引言

磁电弹性材料^[1]是一种可以实现机械能-电能-磁能相互转换的新型结构材料, 具有压电、压磁和磁电耦合效应三种优良的特性。由磁电弹性材料制成的构件广泛应用于检测技术、超声成像和传感器技术等高科技领域中的传感器和驱动器等智能器件。磁电弹性材料在室温下力学性能呈脆性^[2], 脆性材料在制备和使用内部容易产生裂纹, 从而发生断裂失效。

材料中常见的缺陷包括孔洞和裂纹。当缺陷尺寸在纳米量级时, 其比表面积(表面积/体积)非常大^[3,4], 缺陷表面的原子占比非常高, 其断裂性能受缺陷表面效应的影响, 磁电弹尖端场具有显著的尺寸效应。由 Gurtin 和 Murdoch 提出的表面弹性理论(G-M 表面弹性理论)^[5-7]通过引入表面应力考虑表面自由能的影响, 在纳米尺度缺陷表面应用非经典的边界条件, 近几十年来该理论广泛用于纳米尺度的缺陷问题(裂纹和孔洞)。研究磁电弹性材料含

纳米孔边裂纹问题的代表性文献如下: Xiao 等^[8]基于复变函数理论, 研究了考虑表面效应时磁电弹性材料含纳米缺陷(纳米裂纹和纳米夹杂)问题的 III 型断裂问题并给出了纳米裂纹尖端磁电弹场强因子解析解。Liu 等^[9]基于保角映射理论, 研究了磁电弹性材料含纳米缺陷(纳米椭圆孔或纳米裂纹)问题的 III 型断裂性能, 给出了裂纹尖端断裂参数。杨东升和刘官厅^[10]研究了考虑表面效应时磁电弹性材料中含正 $4n$ 边形孔边裂纹反平面问题的断裂性能, 给出了纳米缺陷表面为磁电不可通条件下裂纹尖端断裂参数。Xiao 等^[11]研究了纳米缺陷表面为磁电不可通条件下磁电弹性材料含纳米椭圆形孔边双裂纹问题的 III 型断裂力学分析并给出了纳米裂纹尖端磁电弹场强因子的封闭解。Guo 等^[12]研究了具有增强层的磁电弹性材料含纳米缺陷(椭圆孔或裂纹)问题的 III 型断裂力学性能, 给出了磁电弹场强因子的闭合解。Yang 和 Liu^[13]研究了磁电弹性材料含纳米正三角形孔边裂纹反平面问题的断裂性能, 分别给出了缺陷表面为磁电可通条件下和磁电不可通条件下裂纹尖端断裂参数。Xiao 等^[14]研究了缺陷表面为磁电不

* 河北省自然科学基金(A2022203025)和河北省高等学校科学技术研究重点项目(ZD2021104)资助。

2023-06-15 收到修改稿, 2023-06-27 网络首发。

** 通讯作者。 E-mail: xiaojunhua@ysu.edu.cn.

可通条件下磁电弹性材料含纳米圆形孔边周期裂纹问题的Ⅲ型断裂分析,给出了基体材料内部磁电弹场和裂纹尖端断裂参数.

目前,对于磁电弹性材料中含纳米尺度孔边任意位置贯穿裂纹问题尚未见有报道.孔边任意位置裂纹问题的断裂分析是多缺陷强度问题的重要组成部分且更加普遍,相比于孔边轴向裂纹在数学上更加难以解决.本文基于 G-M 理论和保角变换技术,研究磁电弹性材料中含纳米尺度圆孔边任意位置贯穿裂纹的反平面断裂力学问题.获得了纳米缺陷的磁电弹场表达式,给出了磁电弹场强因子解析式,讨论了磁电弹场强因子随缺陷尺寸、裂纹位置、裂纹相互作用和施加载荷的变化规律.

1 纳米尺度孔边任意位置贯穿裂纹和基本方程

图 1 表示考虑表面效应时磁电弹性材料(横观各向同性)中孔边任意位置贯穿裂纹示意图,远场作用机械载荷 τ_{yz}^∞ 、电载荷 D_y^∞ 和磁载荷 B_y^∞ . 纳米圆孔半径为 R ,贯穿裂纹沿圆孔径向,纳米裂纹 1 和 2 长度分别为 L 和 l ,纳米裂纹位置由 α 确定.圆孔区域和基体区域分别用 V_c 和 V_m 表示,纳米缺陷(孔洞与裂纹)表面用 S 表示,下标 c 、 m 分别表示圆孔和

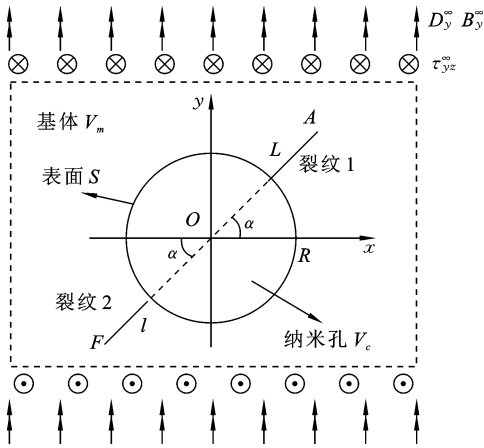


图 1 磁电弹性材料含纳米尺度孔边任意位置贯穿裂纹示意图

Fig. 1 Schematic of an arbitrary location through-crack at the edge of a nano-hole in magneto-electro-elastic materials

基体. Oz 轴为磁电弹材料的磁电极化方向.

问题的控制方程和物理方程如下^[15-17]:

$$\nabla^2 W = 0 \tag{1}$$

$$\Sigma_x - i\Sigma_y = C \left(\frac{\partial W}{\partial x} - i \frac{\partial W}{\partial y} \right) \tag{2}$$

$$\Sigma_r - i\Sigma_\theta = C \left(\frac{\partial W}{\partial r} - i \frac{\partial W}{r\partial\theta} \right) \tag{3}$$

其中 $C = \begin{bmatrix} c_{44} & e_{15} & q_{15} \\ e_{15} & -\kappa_{11} & -\alpha_{11} \\ q_{15} & -\alpha_{11} & -\mu_{11} \end{bmatrix}$, $W = [\omega \quad \varphi \quad \psi]^T$ 表

示广义位移, $\Sigma_j = [\tau_{jz} \quad D_j \quad B_j]^T$ 表示广义应力,其中 ω 表示反平面位移, φ 表示面内电势, ψ 表示面内磁势, τ_{yz} 表示反平面应力, D_j 表示面内电位移, B_j 表示面内磁感应强度.

利用复变弹性理论,磁电弹性材料含纳米尺度孔边任意位置贯穿裂纹的广义位移场和磁电弹场可以表示为^[11,14]:

$$W = \text{Re}[U(z)] = \frac{1}{2} [U(z) + \overline{U(z)}] \tag{4}$$

$$\Sigma_x - i\Sigma_y = C \frac{dU(z)}{dz} \tag{5}$$

$$\Sigma_r - i\Sigma_\theta = e^{i\theta} C \frac{dU(z)}{dz} \tag{6}$$

其中 $U(z) = [F(z) \quad \Phi(z) \quad \Theta(z)]^T$ 表示解析函数向量,其中 $F(z)$ 、 $\Phi(z)$ 、 $\Theta(z)$ 分别为反平面位移、面内电势、面内磁势的复函数表示形式.

假设纳米缺陷为磁电不可通条件,利用 G-M^[5-7] 表面弹性理论,纳米孔边任意位置贯穿裂纹问题在界面上的非经典位移和应力边界条件如下^[18]:

$$W_c(t) = W_m(t) \quad (t \in S) \tag{7}$$

$$-\Sigma_r^M = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Sigma_\theta^S}{\partial \theta} \quad (t \in S) \tag{8}$$

$$\Sigma_\theta^S = C^S Z_\theta^S \tag{9}$$

其中 $t(\rho, \theta) = \rho e^{i\theta}$ 表示缺陷表面上任意一点的极坐标, C^S 表示纳米缺陷(圆孔和贯穿裂纹)的表面磁电弹常数矩阵,且有:

$$Z_\theta^S = Z_\theta^C = Z_\theta^M \tag{10}$$

2 磁电弹性场的解析解

将如图 1 所示物理平面(z 平面)中纳米圆孔孔边任意位置贯穿裂纹圆孔外部区域保角映射到数学平面

(ζ 平面) 中半径为 R 的圆外区域, 其映射函数如下^[19]:

$$z = \omega(\zeta) = \frac{\zeta}{4} \left[\epsilon_1 \left(1 + \frac{e^{i\alpha} R}{\zeta} \right)^2 + \epsilon_2 \left(1 - \frac{e^{i\alpha} R}{\zeta} \right)^2 + \sqrt{\left[\epsilon_1 \left(1 + \frac{e^{i\alpha} R}{\zeta} \right)^2 + \epsilon_2 \left(1 - \frac{e^{i\alpha} R}{\zeta} \right)^2 \right]^2 + 16 \frac{e^{2i\alpha} R^2}{\zeta^2}} \right] \quad (11)$$

$$\epsilon_1 = \frac{1}{2} [(1 + \lambda_1) + (1 + \lambda_1)^{-1}], \quad \lambda_1 = \frac{L}{R} \quad (12)$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{2} [(1 + \lambda_2) + (1 + \lambda_2)^{-1}], \quad \lambda_2 = \frac{l}{R} \quad (13)$$

将解析函数向量 $U = [F \ \Phi \ \Theta]^T$ 在数学平面 (ζ 平面) 内展开成洛朗级数形式^[20]:

$$U(\zeta) = \begin{Bmatrix} F(\zeta) \\ \Phi(\zeta) \\ \Theta(\zeta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a^* \\ b^* \\ c^* \end{Bmatrix} \ln \zeta + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \begin{Bmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{Bmatrix} \zeta^k \quad (14)$$

经分析取有限项级数形式就可得到问题的闭合解:

$$U_c(\zeta) = \begin{Bmatrix} F_c(\zeta) \\ \Phi_c(\zeta) \\ \Theta_c(\zeta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A^F \\ A^\Phi \\ A^\Theta \end{Bmatrix} \zeta \quad (\zeta \text{ 平面圆域内}) \quad (15)$$

$$\begin{Bmatrix} U_m(\zeta) \\ \Phi_m(\zeta) \\ \Theta_m(\zeta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_1^F \\ B_1^\Phi \\ B_1^\Theta \end{Bmatrix} \zeta + \begin{Bmatrix} B_{-1}^F \\ B_{-1}^\Phi \\ B_{-1}^\Theta \end{Bmatrix} \frac{1}{\zeta} \quad (16)$$

(ζ 平面圆域外)

其中 $[A^F \ A^\Phi \ A^\Theta]^T$, $[B_1^F \ B_1^\Phi \ B_1^\Theta]^T$ 和 $[B_{-1}^F \ B_{-1}^\Phi \ B_{-1}^\Theta]^T$ 是待定复常数矩阵。

基于远场载荷条件, 由式(5)和(16)可得:

$$\begin{Bmatrix} B_1^F \\ B_1^\Phi \\ B_1^\Theta \end{Bmatrix} = -i \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} C^{-1} \begin{Bmatrix} \tau_{yz}^\infty \\ D_y^\infty \\ B_y^\infty \end{Bmatrix} \quad (17)$$

由磁电弹场公式(6)和纳米尺度位移和应力非经典表面边界公式(7)、(8), 可得待定复常数矩阵之间的关系如下:

$$\begin{Bmatrix} A^F \\ A^\Phi \\ A^\Theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_1^F \\ B_1^\Phi \\ B_1^\Theta \end{Bmatrix} - \frac{1}{R^2} \begin{Bmatrix} B_{-1}^F \\ B_{-1}^\Phi \\ B_{-1}^\Theta \end{Bmatrix} \quad (18)$$

$$\frac{C^S}{R} \begin{Bmatrix} A^F \\ A^\Phi \\ A^\Theta \end{Bmatrix} = C \left[\begin{Bmatrix} B_1^F \\ B_1^\Phi \\ B_1^\Theta \end{Bmatrix} + \frac{1}{R^2} \begin{Bmatrix} B_{-1}^F \\ B_{-1}^\Phi \\ B_{-1}^\Theta \end{Bmatrix} \right] \quad (19)$$

联立式(17)-(19), 得:

$$\begin{Bmatrix} A^F \\ A^\Phi \\ A^\Theta \end{Bmatrix} = -i(\epsilon_1 + \epsilon_2) \left(\frac{C^S}{R} + C \right)^{-1} \begin{Bmatrix} \tau_{yz}^\infty \\ D_y^\infty \\ B_y^\infty \end{Bmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{Bmatrix} B_{-1}^F \\ B_{-1}^\Phi \\ B_{-1}^\Theta \end{Bmatrix} = -iR^2 \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \left(\frac{C^S}{R} + C \right)^{-1} \left(\frac{C^S}{R} - C \right) C^{-1} \begin{Bmatrix} \tau_{yz}^\infty \\ D_y^\infty \\ B_y^\infty \end{Bmatrix} \quad (21)$$

由式(5)、(15)-(17)、(20)和(21), 可得磁电弹性材料内的磁电弹场表达式:

$$\Sigma_y + i\Sigma_x = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2\omega'(\zeta)} \left[E - \frac{R^2}{\zeta^2} C \left(\frac{C^S}{R} + C \right)^{-1} \left(\frac{C^S}{R} - C \right) C^{-1} \right] \cdot \begin{Bmatrix} \tau_{yz}^\infty \\ D_y^\infty \\ B_y^\infty \end{Bmatrix} \quad (22)$$

其中 E 为三阶单位矩阵。

3 裂纹尖端磁电弹场强因子

3.1 裂纹尖端磁电弹场强因子解析解

定义图 1 平面内裂纹尖端 A 点和 F 点的磁电弹场强因子如下^[21]:

$$\begin{Bmatrix} K_{III}^{Ary} + iK_{III}^{Arx} \\ K_{III}^{ADy} + iK_{III}^{ADx} \\ K_{III}^{ABy} + iK_{III}^{ABx} \end{Bmatrix} = \lim_{z \rightarrow z_A} (\Sigma_y + i\Sigma_x) \sqrt{2\pi(z - z_1)} \quad (23)$$

$$\begin{Bmatrix} K_{III}^{Fry} + iK_{III}^{Frx} \\ K_{III}^{FDy} + iK_{III}^{FDx} \\ K_{III}^{FBy} + iK_{III}^{FBx} \end{Bmatrix} = \lim_{z \rightarrow z_F} (\Sigma_y + i\Sigma_x) \sqrt{2\pi(z - z_2)} \quad (24)$$

其中: x 和 y 表示两个分量, $z_1 = (R + L)e^{i\alpha}$ 和 $z_2 = (R + L)e^{i(\alpha + \pi)}$. 将式(22)代入式(23)和(24), 可得:

$$\begin{Bmatrix} K_{III}^{Ary} + iK_{III}^{Arx} \\ K_{III}^{ADy} + iK_{III}^{ADx} \\ K_{III}^{ABy} + iK_{III}^{ABx} \end{Bmatrix} = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \left[E - e^{-2i\alpha} C \left(\frac{C^S}{R} + C \right)^{-1} \cdot \left(\frac{C^S}{R} - C \right) C^{-1} \right] \begin{Bmatrix} \tau_{yz}^\infty \\ D_y^\infty \\ B_y^\infty \end{Bmatrix} \lim_{\zeta \rightarrow R e^{i\alpha}} \frac{\sqrt{\omega(\zeta) - \omega(R e^{i\alpha})}}{\omega'(\zeta)} \quad (25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{III}^{Fxy} + iK_{III}^{Frx} \\ K_{III}^{FDy} + iK_{III}^{FDx} \\ K_{III}^{FBy} + iK_{III}^{FBx} \end{array} \right\} = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \left[E - e^{-2i(\alpha + \pi)} C \left(\frac{C^S}{R} + C \right)^{-1} \left(\frac{C^S}{R} - C \right) C^{-1} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{l} \tau_{yz}^\infty \\ D_y^\infty \\ B_y^\infty \end{array} \right\} \lim_{\zeta \rightarrow Re^{i(\alpha + \pi)}} \frac{\sqrt{\omega(\zeta) - \omega(Re^{i(\alpha + \pi)})}}{\omega'(\zeta)} \quad (26)$$

其中： $\omega'(Re^{i\alpha}) = 0$ 和 $\omega'(Re^{i(\alpha + \pi)}) = 0$ 。对式(25)和(26)使用洛必达法则，则纳米缺陷表面为磁电不可通条件下裂纹尖端 A 和 F 磁电弹场强因子 x 和 y 分量为：

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{III}^{Axy} + iK_{III}^{Arx} \\ K_{III}^{ADy} + iK_{III}^{ADx} \\ K_{III}^{ABy} + iK_{III}^{ABx} \end{array} \right\} = \frac{\sqrt{\pi}(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{2\sqrt{\omega''(Re^{i\alpha})}} \cdot \left[E - e^{-2i\alpha} C \left(\frac{C^S}{R} + C \right)^{-1} \left(\frac{C^S}{R} - C \right) C^{-1} \right] \left\{ \begin{array}{l} \tau_{yz}^\infty \\ D_y^\infty \\ B_y^\infty \end{array} \right\} \quad (27)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{III}^{Fxy} + iK_{III}^{Frx} \\ K_{III}^{FDy} + iK_{III}^{FDx} \\ K_{III}^{FBy} + iK_{III}^{FBx} \end{array} \right\} = \frac{\sqrt{\pi}(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{2\sqrt{\omega''(Re^{i(\alpha + \pi)})}} \cdot \left[E - e^{-2i(\alpha + \pi)} C \left(\frac{C^S}{R} + C \right)^{-1} \left(\frac{C^S}{R} - C \right) C^{-1} \right] \left\{ \begin{array}{l} \tau_{yz}^\infty \\ D_y^\infty \\ B_y^\infty \end{array} \right\} \quad (28)$$

定义无量纲磁电弹场强因子：

$$\left\{ \begin{array}{l} K_\tau^{Ay} + iK_\tau^{Ax} \\ K_D^{Ay} + iK_D^{Ax} \\ K_B^{Ay} + iK_B^{Ax} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{K_{III}^{Axy} + iK_{III}^{Arx}}{\sqrt{\pi L'} \tau_{yz}^\infty} \\ \frac{K_{III}^{ADy} + iK_{III}^{ADx}}{\sqrt{\pi L'} D_y^\infty} \\ \frac{K_{III}^{ABy} + iK_{III}^{ABx}}{\sqrt{\pi L'} B_y^\infty} \end{array} \right\} \quad (29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_\tau^{Fy} + iK_\tau^{Fx} \\ K_D^{Fy} + iK_D^{Fx} \\ K_B^{Fy} + iK_B^{Fx} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{K_{III}^{Fxy} + iK_{III}^{Frx}}{\sqrt{\pi L'} \tau_{yz}^\infty} \\ \frac{K_{III}^{FDy} + iK_{III}^{FDx}}{\sqrt{\pi L'} D_y^\infty} \\ \frac{K_{III}^{FBy} + iK_{III}^{FBx}}{\sqrt{\pi L'} B_y^\infty} \end{array} \right\} \quad (30)$$

其中： $L' = R + (L + l)/2$ 表示等效裂纹长度， K_τ^{Ax} 、 K_τ^{Ay} 、 K_τ^{Frx} 、 K_τ^{Fy} 、 K_D^{Ax} 、 K_D^{Ay} 、 K_D^{Frx} 、 K_D^{Fy} 、 K_B^{Ax} 、 K_B^{Ay} 、 K_B^{Frx} 、 K_B^{Fy}

和 K_B^{Fy} 分别表示裂纹尖端 A 和 F 的磁电弹场强因子 x 和 y 分量。

3.2 几种磁电弹场强因子特殊情况

(1) 弹性材料含纳米孔边任意位置贯穿裂纹
当 $\kappa_{11} = 0, \mu_{11} = 0, e_{15} = 0, q_{15} = 0$ 和 $\alpha_{11} = 0$ 时，

式(27)退化为：

$$K_\tau^{Ay} + iK_\tau^{Ax} = \frac{\sqrt{\pi}(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{2\sqrt{\omega''(Re^{i\theta})}} \left(1 - e^{-2i\alpha} \frac{C_{44}^S/R - C_{44}}{C_{44}^S/R + C_{44}} \right) \tau_{yz}^\infty \quad (31)$$

式(31)与文献[19]结果一致。

(2) 磁电弹性材料含孔边任意位置贯穿裂纹
不考虑缺陷(孔和裂纹)的表面效应时，即 $C^S = 0$ ，式(27)和(28)退化为：

$$\left\{ \begin{array}{l} K_\tau^{Ay} + iK_\tau^{Ax} \\ K_D^{Ay} + iK_D^{Ax} \\ K_B^{Ay} + iK_B^{Ax} \end{array} \right\} = \frac{\sqrt{\pi}(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{2\sqrt{\omega''(Re^{i\alpha})}} (1 + e^{-2i\alpha}) \left\{ \begin{array}{l} \tau_{yz}^\infty \\ D_y^\infty \\ B_y^\infty \end{array} \right\} \quad (32)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_\tau^{Fy} + iK_\tau^{Fx} \\ K_D^{Fy} + iK_D^{Fx} \\ K_B^{Fy} + iK_B^{Fx} \end{array} \right\} = \frac{\sqrt{\pi}(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{2\sqrt{\omega''(Re^{i(\alpha + \pi)})}} (1 + e^{-2i(\alpha + \pi)}) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \tau_{yz}^\infty \\ D_y^\infty \\ B_y^\infty \end{array} \right\} \quad (33)$$

式(32)和(33)表示磁电弹材料中宏观尺度孔边任意位置贯穿裂纹裂尖的磁电弹场强因子的解析解。

(3) 磁电弹性材料含单个纳米孔边任意位置裂纹
令裂纹 2 长度 $l = 0$ ，式(27)退化为：

$$\left\{ \begin{array}{l} K_\tau^{Ay} + iK_\tau^{Ax} \\ K_D^{Ay} + iK_D^{Ax} \\ K_B^{Ay} + iK_B^{Ax} \end{array} \right\} = \frac{\sqrt{\pi}(\epsilon_1 + 1)}{2\sqrt{\omega''(Re^{i\alpha})}} \cdot \left[E - e^{-2i\alpha} C \left(\frac{C^S}{R} + C \right)^{-1} \left(\frac{C^S}{R} - C \right) C^{-1} \right] \left\{ \begin{array}{l} \tau_{yz}^\infty \\ D_y^\infty \\ B_y^\infty \end{array} \right\} \quad (34)$$

式(34)与文献[22]的结果一致。

(4) 磁电弹性材料含纳米尺度孔边轴向对称贯穿裂纹

当裂纹位置 $\alpha = 0$ 且令裂纹 1 和 2 长度相等，即： $L = l$ ，式(27)退化为：

$$\left\{ \begin{array}{l} K_\tau^A \\ K_D^A \\ K_B^A \end{array} \right\} = \frac{\sqrt{\pi}\epsilon_1}{\sqrt{\omega''(Re^{i\alpha})}} \cdot$$

$$\left[E - e^{-2i\alpha} C \left(\frac{C^S}{R} + C \right)^{-1} \left(\frac{C^S}{R} - C \right) C^{-1} \right] \begin{Bmatrix} \tau_{yz}^{\infty} \\ D_y^{\infty} \\ B_y^{\infty} \end{Bmatrix} \quad (35)$$

式(35)与文献[11]($a=b$)和文献[14]($n=2$)的结果一致。

4 算例与讨论

取复合材料 $\text{BaTiO}_3\text{-CoFe}_2\text{O}_4$ 为基体材料^[23]；纳米缺陷(孔洞和裂纹)的表面常数见表 2^[24]。

表 1 基体材料的磁电弹常数^[23]

Table 1 Magnetoelastic constants of matrix material^[23]

c_{44} (GPa)	e_{15} (C/m ²)	q_{15} (N/Am)	κ_{11} (10^{-9} C ² /Nm ²)	α_{11} (10^{-12} Ns/VC)	μ_{11} (10^{-6} Ns/C ²)
44	5.8	275	5.64	5.2	297

表 2 纳米缺陷表面的两种界面参数^[24]

Table 2 Two kinds of interface parameters of nano-defect surface^[24]

材料常数	c_{44}^S (N/m)	e_{15}^S (10^{-9} C/m)	q_{15}^S (10^{-9} N/A)	κ_{11}^S (10^{-18} C ² /Nm)
压磁相	10	0	330	0.03
压电相	2	50	0	0

4.1 磁电弹强度因子的尺寸效应

图 2 表示无量纲磁电弹场强因子随纳米孔半径 R 的变化曲线,其中 $\tau_{yz}^{\infty} = 4$ MPa, $D = 10^{-3}$ C/m², $B = 10^{-2}$ N/Am, $L/R = 1$, $l/R = 0.8$, $\alpha = \pi/6$. 图 2(a) 显示,随着孔洞半径 R 的增加且缺陷表面为压电表面时,无量纲应力强度因子 y 分量 K_{τ}^{Ay} 先增加后轻微减小和 K_{τ}^{Fy} 先减小后轻微增加, x 分量 K_{τ}^{Ax} 和 K_{τ}^{Fx} 先逐渐减小后轻微增加;缺陷表面为压磁表面时, K_{τ}^{Ay} 逐渐增加, K_{τ}^{Fy} 逐渐减小, K_{τ}^{Ax} 和 K_{τ}^{Fx} 逐渐减小. 随着 R 逐渐增大,无量纲应力强度因子趋于经典磁电弹解答. 从图 2(b) 看出,缺陷表面为压电表面时,无量纲电位移场强因子具有显著的尺寸效应,随着孔洞半径 R 的增加, y 分量 K_D^{Ay} 逐渐增加和 K_D^{Fy} 逐渐减小, x 分量 K_D^{Ax} 和 K_D^{Fx} 都逐渐减小. 缺陷表面为压磁表面时,无量纲电位移场强因子 x 和 y 分量迅速趋于经典磁电弹理论解. 图 2(c) 表明,缺陷表面为压磁表面时,无量纲磁感应强度因子 x 和 y 分量具有显著的尺寸效应. 随着孔半径 R 的增加, y 分量 K_B^{Ay} 逐渐增加和 K_B^{Fy} 逐渐减小, x 分量 K_B^{Ax} 和 K_B^{Fx} 逐渐减小并趋于经典结果. 缺陷表面为压电表面时,无量纲磁感应强度因子 x 和 y 分量与

经典磁电弹理论解一致。

4.2 裂纹位置对磁电弹场强因子的影响

图 3 表示无量纲磁电弹场强因子随纳米贯穿裂纹位置 α 的变化曲线, $\tau = 4$ MPa, $D_y^{\infty} = 10^{-3}$ C/m², $B = 10^{-2}$ N/Am, $L/R = 1$, $l/R = 0.8$, $R = 10$ nm.

由图 3(a) 可知,随着裂纹位置 α 从 0 增加至 90° ,无量纲应力强度因子 y 分量 K_{τ}^{Ay} 单调减小, K_{τ}^{Fy} 先逐渐减小后增大. x 分量 K_{τ}^{Ax} 先逐渐减小后增大, K_{τ}^{Fx} 单调增加. 缺陷表面效应对无量纲应力强度因子 x 和 y 分量的影响取决于纳米裂纹的位置. 图 3(b) 表明,随着 α 从 0 增加至 90° 且缺陷表面性质为压电时,无量纲电位移场强因子 y 分量 K_D^{Ay} 单调增加, K_D^{Fy} 先逐渐增加后轻微减小. 无量纲电位移场强因子 x 分量 K_D^{Ax} 先逐渐增加后轻微减小, K_D^{Fx} 单调减小. 缺陷表面性质为压磁时, K_D^{Ay} 单调减小, K_D^{Fy} 先逐渐减小后增加, K_D^{Ax} 先逐渐减小后增加, K_D^{Fx} 单调增加. 图 3(c) 表明,随着 α 从 0 增加至 90° 且缺陷表面性质为压电时,无量纲磁感应强度因子 y 分量 K_B^{Ay} 单调减小, K_B^{Fy} 先减小后增加. 无量纲磁感应强度因子 x 分量 K_B^{Ax} 先减小后增加, K_B^{Fx} 单调增加. 缺陷表面性质为压磁时, K_B^{Ay} 轻微增加, K_B^{Fy}

单调增加, K_B^{Ax} 单调增加, K_B^{Fx} 轻微减少. 图 3 表明, 缺陷表面效应对无量纲磁电弹场强因子的影响受裂

纹位置的制约.

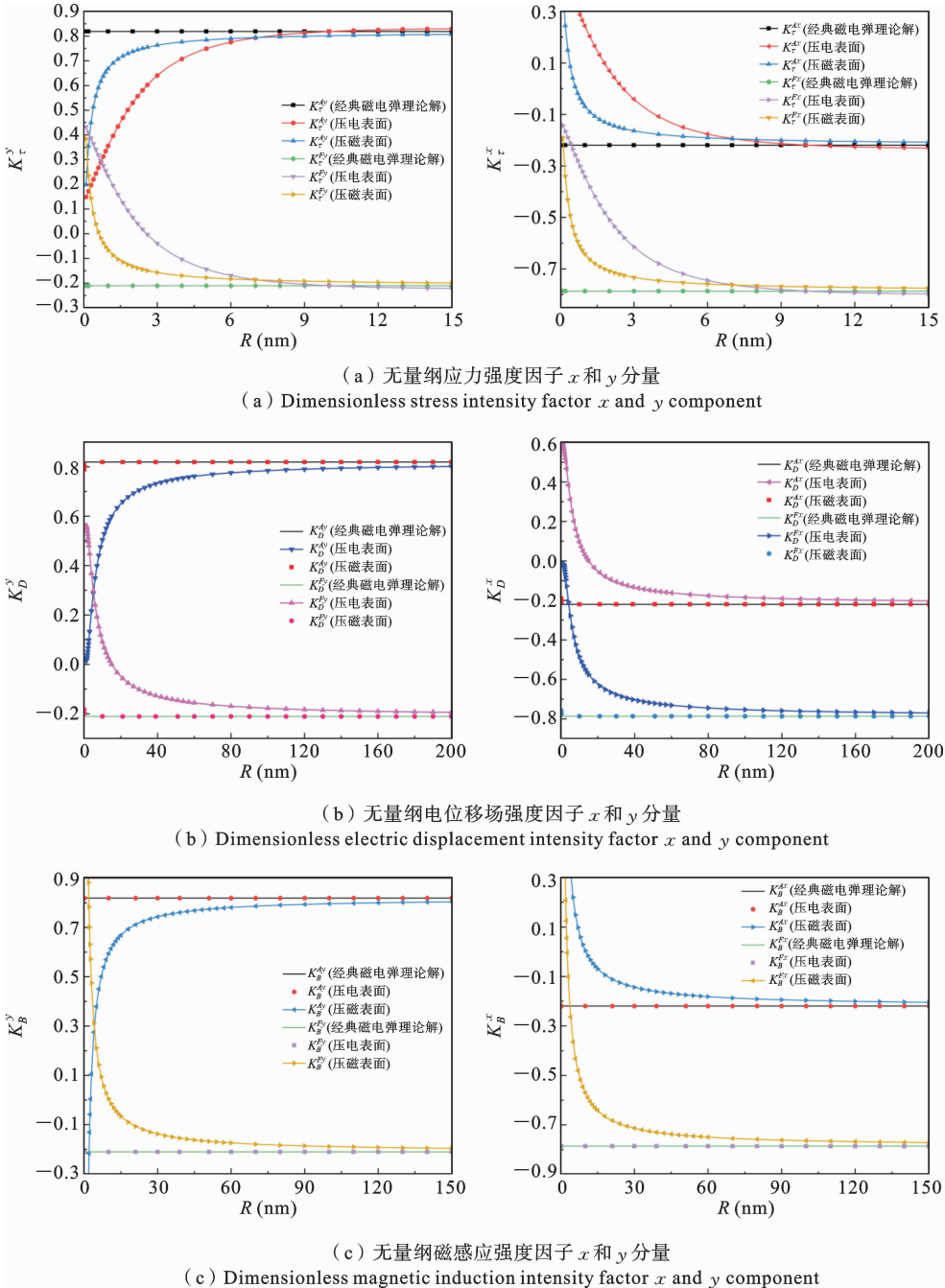


图 2 无量纲磁电弹场强因子随纳米缺陷尺寸的变化曲线

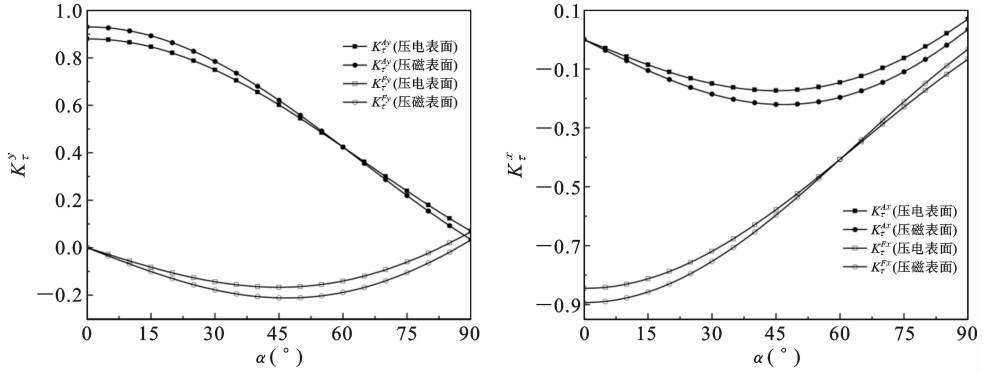
Fig. 2 Variations of the dimensionless MEE intensity factors with nano-defect size

4.3 裂纹相互作用对磁电弹场强因子的影响

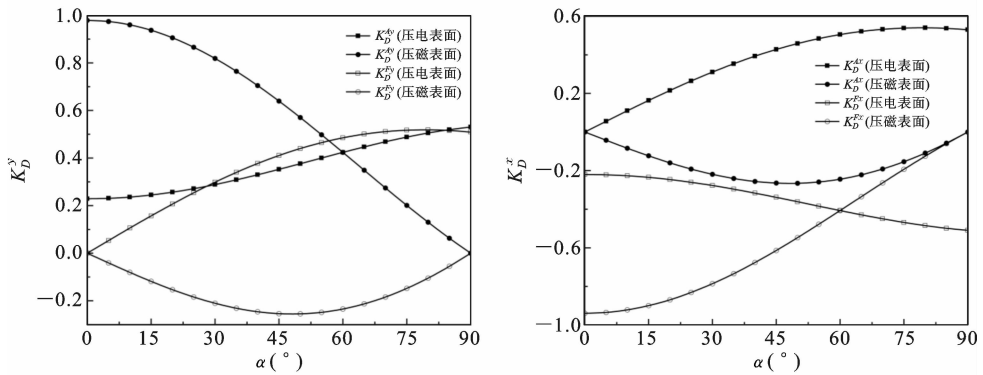
图 4 给出了无量纲磁电弹场强因子随贯穿裂纹两侧裂纹长度比 l/L 的变化曲线, 其中 $\tau_{yz}^\infty = 4$ MPa, $D_y^\infty = 10^{-3}$ C/m², $B_y^\infty = 10^{-2}$ N/Am, $R = 10$

nm, $L = 10$ nm, $\alpha = \pi/6$.

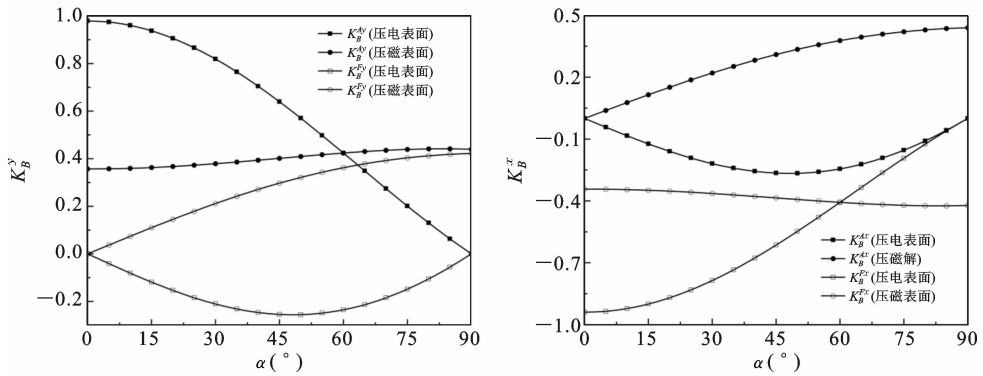
由图 4(a) 看出, 随着 l/L 的增加, 无量纲应力强度因子 y 分量 K_τ^{Ay} 逐渐减小, x 分量 K_τ^{Ax} 轻微增加. K_τ^{Fy} 和 K_τ^{Fx} 先减小至最小值后轻微增加至稳定



(a) 无量纲应力强度因子 x 和 y 分量
(a) Dimensionless stress intensity factor x and y component



(b) 无量纲电位移场强度因子 x 和 y 分量
(b) Dimensionless electric displacement intensity factor x and y component



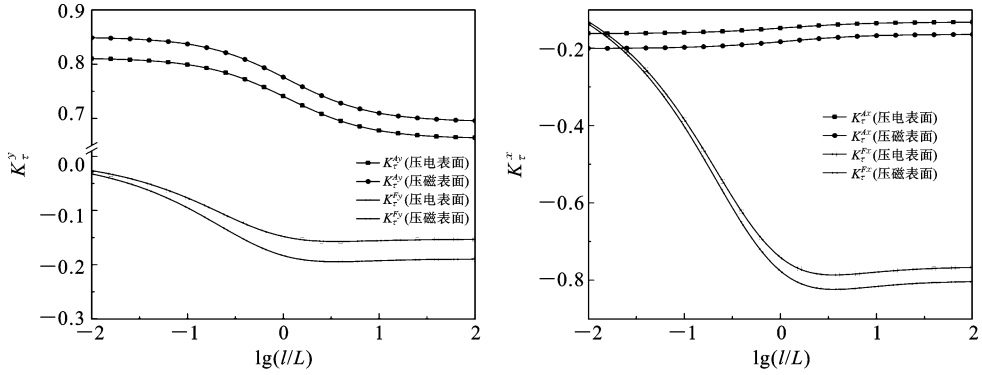
(c) 无量纲磁感应强度因子 x 和 y 分量
(c) Dimensionless magnetic induction intensity factor x and y component

图 3 无量纲磁电弹场强因子随纳米裂纹位置的变化曲线

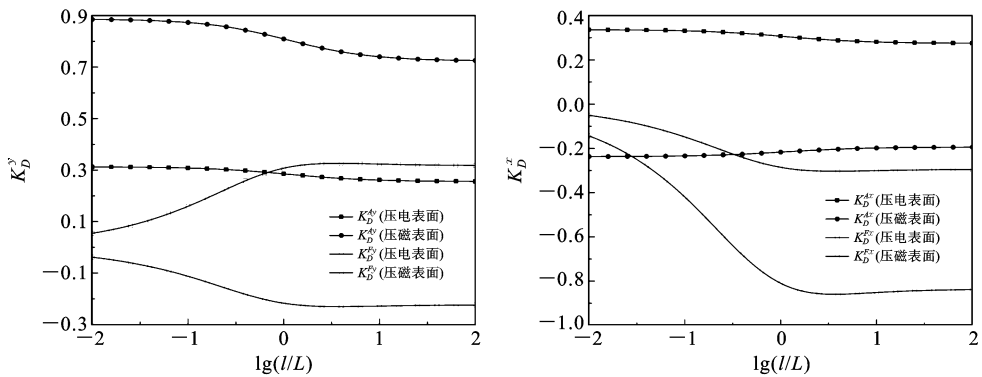
Fig. 3 Variations of the dimensionless MEE intensity factors with nano-crack location

值. 图 4(b)表明,随着 l/L 的增加且缺陷表面为压电表面时,无量纲电位移场强因子 y 分量 K_D^{Ay} 缓慢减小, K_D^{By} 逐渐增加至稳定值. 而无量纲电位移场强因子 x 分量 K_D^{Ax} 缓慢减小, K_D^{Bx} 逐渐减小至稳定值. 缺陷表面为压磁表面时, K_D^{Ay} 缓慢减小而 K_D^{Ax} 轻微增加; K_D^{By} 和 K_D^{Bx} 逐渐减小至稳定值. 图 4(c)表明,

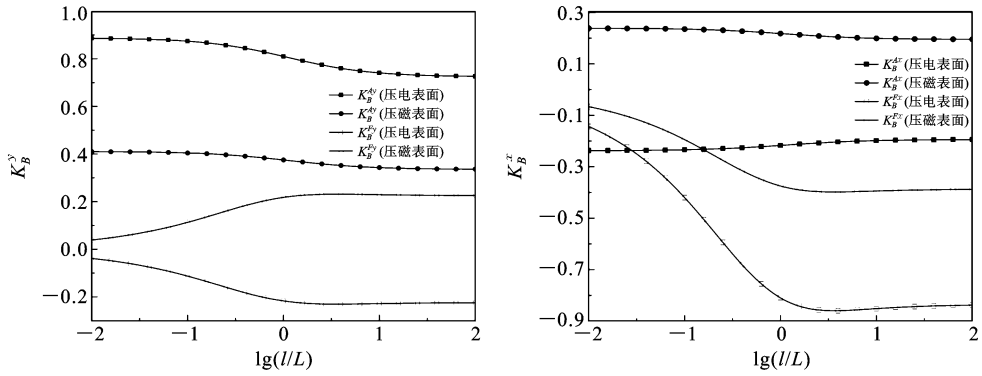
随着 l/L 的增加且缺陷表面为压电表面时,无量纲磁感应强度因子 y 分量 K_B^{Ay} 和 K_B^{By} 逐渐减小至稳定值. x 分量 K_B^{Ax} 轻微增加, K_B^{Bx} 逐渐减小至最小值后轻微增加至稳定值. 缺陷表面为压磁表面时, K_B^{Ay} 缓慢减小, K_B^{By} 逐渐增加至稳定值; K_B^{Ax} 缓慢减小, K_B^{Bx} 逐渐减小至最小值后轻微增加.



(a) 无量纲应力强度因子 x 和 y 分量
(a) Dimensionless stress intensity factor x and y component



(b) 无量纲电位移场强度因子 x 和 y 分量
(b) Dimensionless electric displacement intensity factor x and y component



(c) 无量纲磁感应强度因子 x 和 y 分量
(c) Dimensionless magnetic induction intensity factor x and y component

图 4 无量纲磁电弹场强因子随裂纹相互作用的变化曲线

Fig. 4 Variations of the dimensionless MEE intensity factors with crack interaction

4.4 机械载荷对磁电弹场强因子的影响

图 5 给出了磁电弹场强因子随机械载荷 τ_{yz}^∞ 的变化,其中 $D_y^\infty = 10^{-3} \text{ C/m}^2$, $B_y^\infty = 10^{-2} \text{ N/Am}$, $R = 30 \text{ nm}$, $L/R = 1$, $l/R = 0.8$, $\alpha = \pi/6$. 图 5(a) 显示,随着机械载荷的增加且缺陷表面为压磁表面时,无量纲应力强度因子 y 分量 K_τ^{Ay} 迅速增加至稳定值,

K_τ^{Fy} 迅速减小至稳定值; x 分量 K_τ^{Ax} 和 K_τ^{Fx} 迅速减小至稳定值. 无量纲电位移场强因子 K_D^{Ay} 、 K_D^{Fy} 、 K_D^{Ax} 和 K_D^{Fx} 几乎不变. 无量纲磁感应强度因子 y 分量 K_B^{Ay} 线性减小和 K_B^{Fy} 线性增加, x 分量 K_B^{Ax} 和 K_B^{Fx} 线性增加. 当缺陷表面为压电表面时, K_τ^{Ay} 逐渐减小至稳定值, K_τ^{Fy} 逐渐增加至稳定值, K_τ^{Ax} 和 K_τ^{Fx} 逐渐

增加至稳定值; K_D^{Ay} 线性减小, K_D^{Fy} 、 K_D^{Ax} 和 K_D^{Fx} 呈线性增加; K_B^{Ay} 、 K_B^{Fy} 、 K_B^{Ax} 和 K_B^{Fx} 保持不变, 即: 无量纲

磁感应强度因子在缺陷表面为压电时不受机械载荷的影响。

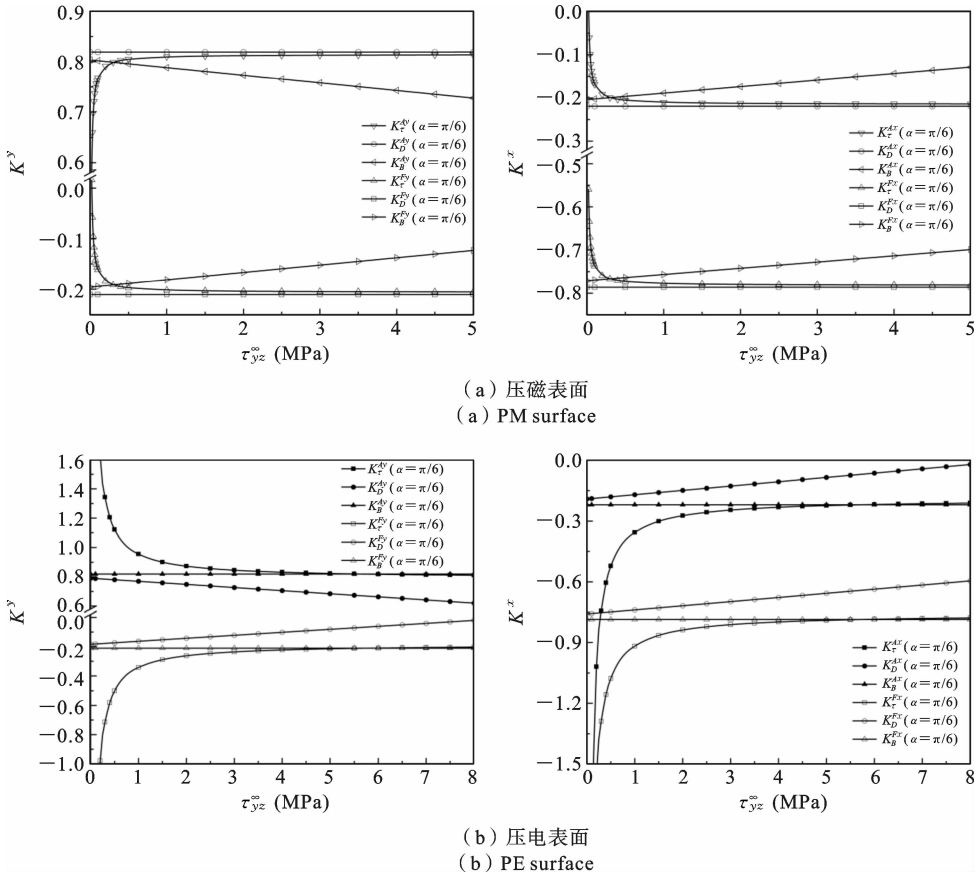


图 5 无量纲磁电弹场强因子 x 和 y 分量随机机械载荷的变化曲线

Fig. 5 Variations of the dimensionless MEE intensity factors x and y component with mechanical load

4.5 电载荷对磁电弹场强因子的影响

图 6 给出了无量纲磁电弹场强因子随电载荷 D_y^∞ 的变化趋势, 其中 $\tau_{yz}^\infty = 4 \text{ MPa}$, $B_y^\infty = 10^{-2} \text{ N/Am}$, $R = 30 \text{ nm}$, $L/R = 1$, $l/R = 0.8$, $\alpha = \pi/6$. 图 6 (a) 表明, 随着电载荷增加且缺陷表面性质为压磁时, 无量纲应力强度因子几乎不变. 无量纲电位移场强因子 y 分量 K_D^{Ay} 迅速减小至稳定值, K_D^{Fy} 快速增加至稳定值; x 分量 K_D^{Ax} 和 K_D^{Fx} 快速增加至稳定值. 无量纲磁感应强度因子 y 分量 K_B^{Ay} 线性减小, 而 K_B^{Fy} 线性增加; x 分量 K_B^{Ax} 和 K_B^{Fx} 皆线性增加. 图 6 (b) 显示, 缺陷表面性质为压电时, 无量纲应力强度因子 K_r^{Ay} 线性增加, K_r^{Fy} 、 K_r^{Ax} 和 K_r^{Fx} 线性减小. 无量纲电位移场强因子 K_D^{Ay} 逐渐增加至稳定值, K_D^{Fy} 、 K_D^{Ax} 和 K_D^{Fx} 逐渐减小至稳定值. 无量纲磁感应强度

因子几乎不变, 即缺陷为压电表面时屏蔽了电载荷对无量纲磁感应强度因子的影响。

4.6 磁载荷对磁电弹场强因子的影响

图 7 表示无量纲磁电弹场强因子随磁载荷 B_y^∞ 的变化趋势, 其中 $\tau_{yz}^\infty = 4 \text{ MPa}$, $D_y^\infty = 10^{-3} \text{ C/m}^2$, $R = 30 \text{ nm}$, $L/R = 1$, $l/R = 0.8$, $\alpha = \pi/6$. 图 7 (a) 表明, 随着磁载荷的增加且缺陷表面为压磁表面时, 缺陷表面为压磁时会屏蔽磁载荷对应力强度因子和电位移场强因子的影响; 而无量纲磁感应强度因子 y 分量 K_B^{Ay} 逐渐增加至稳定值, K_B^{Fy} 逐渐减小至稳定值; x 分量 K_B^{Ax} 和 K_B^{Fx} 都逐渐减小至稳定值. 图 7 (b) 显示, 缺陷表面为压电表面时无量纲磁电弹场强因子保持不变, 即: 缺陷表面为压电时磁电弹场强因子不受磁载荷变化的影响。

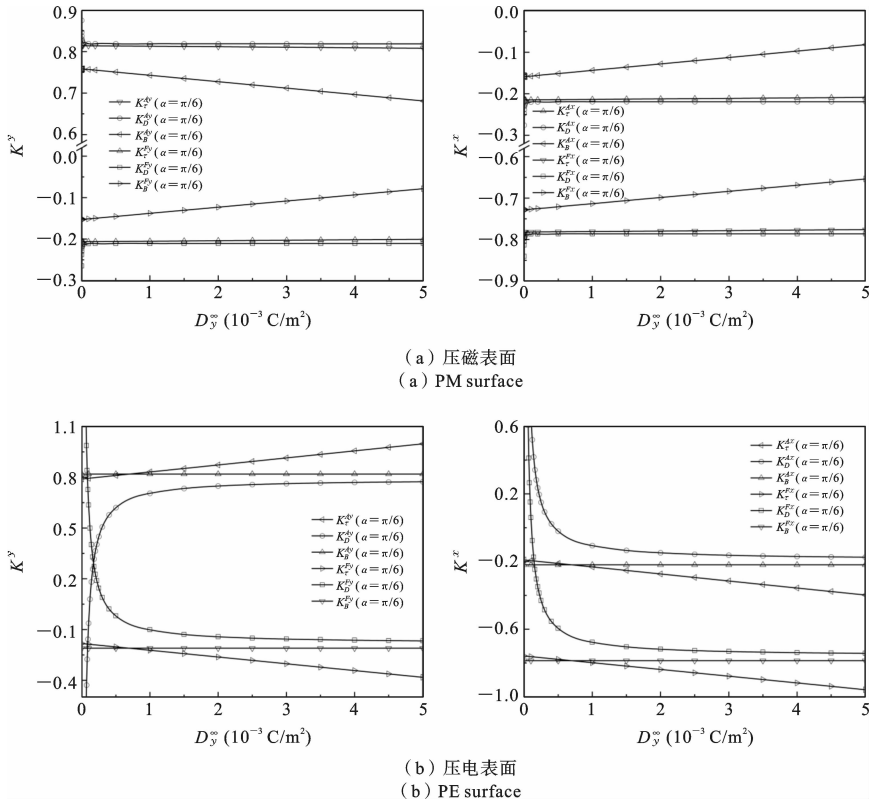


图 6 无量纲磁电弹场强因子 x 和 y 分量随电载荷的变化曲线

Fig. 6 Variations of the dimensionless MEE intensity factors x and y component with electric load

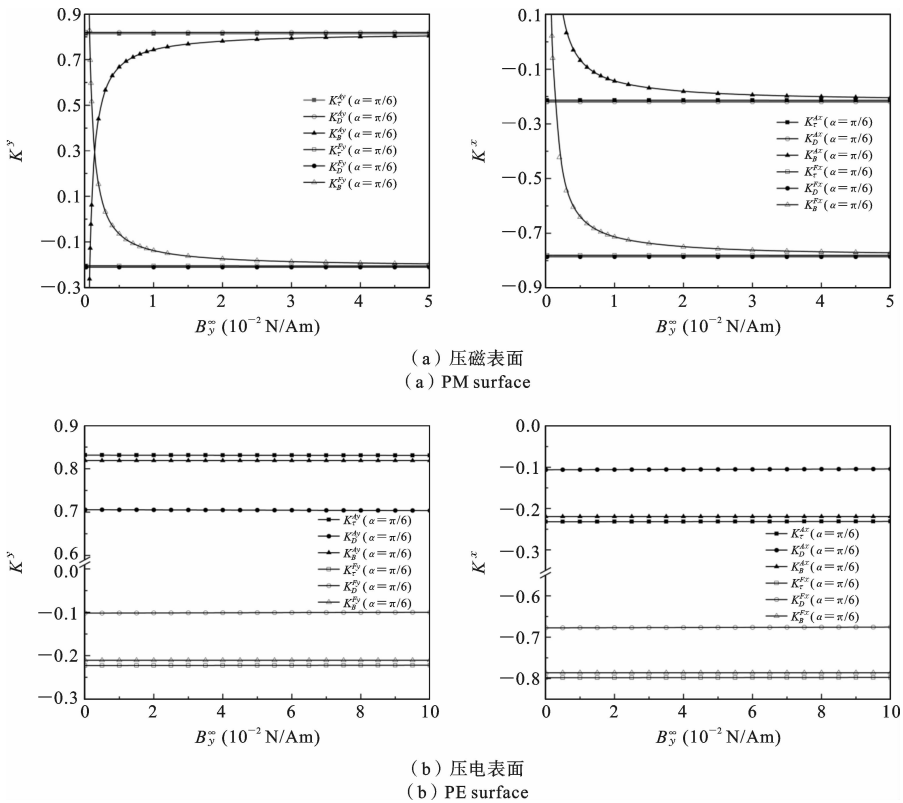


图 7 无量纲磁电弹场强因子 x 和 y 分量随磁载荷的变化曲线

Fig. 7 Variations of the dimensionless MEE intensity factors x and y component with magnetic load

5 结论

本文基于 G-M 表面弹性理论和磁电弹性理论, 研究了磁电不可通条件下磁电弹性材料含纳米孔边任意位置贯穿裂纹问题的 III 型断裂力学性能, 给出了裂纹尖端磁电弹场和场强因子的解析表达式. 由于纳米缺陷(孔洞和裂纹)的表面效应, 贯穿裂纹两端裂尖的磁电弹场强因子具有显著的尺寸效应且呈现出复杂的变化规律. 缺陷的表面效应对磁电弹场强因子的影响趋势受裂纹位置、缺陷表面性质(压电表面或压磁表面)、贯穿裂纹两端长度比值以及施加力电磁载荷的制约.

参考文献

- [1] Suchtelen J V. Product properties: a new application of composite materials[J]. Philips Research Reports, 1972, 27: 28-37.
- [2] Song Z F, Sih G C. Crack initiation behavior in magneto-electroelastic composite under in-plane deformation[J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2003, 39(3): 189-207.
- [3] Davis M E. Ordered porous materials for emerging applications[J]. Nature, 2002, 417(6891): 813-821.
- [4] Sharma P, Ganti S, Bhate N. Effect of surfaces on the size-dependent elastic state of nano-inhomogeneities[J]. Applied Physics Letters, 2003, 82(4): 535-537.
- [5] Gurtin M E, Murdoch A I. A continuum theory of elastic material surfaces[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1975, 57(4): 291-323.
- [6] Gurtin M E, Murdoch A I. Surface stress in solids [J]. International Journal of Solids and Structures, 1978, 14(6): 431-440.
- [7] Gurtin M E, Weissmuller J, Larche F. A general theory of curved deformable interfaces in solids at equilibrium[J]. Philosophical Magazine A, 1998, 78(5): 1093-1109.
- [8] Xiao J H, Xu Y L, Zhang F C. Fracture analysis of magneto-electroelastic solid weakened by periodic cracks and line inclusions[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2018, 205: 70-80.
- [9] Liu Y Z, Guo J H, Zhang X Y. Surface effect on a nano-elliptical hole or nano-crack in magneto-electroelastic materials under antiplane shear[J]. Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik, 2019, 99(7): e201900043.
- [10] 杨东升, 刘官厅. 磁电弹性材料中含有带四条纳米裂纹的正 4n 边形纳米孔的反平面断裂问题[J]. 物理学报, 2020, 69(24): 244601. (Yang D S, Liu G T. Anti-plane fracture problem of four nano-cracks emanating from a regular 4n-polygon nano-hole in magneto-electroelastic materials [J]. Acta Physica Sinica, 2020, 69(24): 244601. (in Chinese))
- [11] Xiao J H, Xu B X, Xu Y L, Zhang F C. Fracture analysis on a cracked elliptical hole with surface effect in magneto-electroelastic solid [J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2020, 107: 10253.
- [12] Guo J H, He L T, Liu Y Z, Li L H. Anti-plane analysis of a reinforced nano-elliptical cavity or nano-crack in a magneto-electroelastic matrix with surface effect[J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2020, 107: 102553.
- [13] Yang D S, Liu G T. Anti-plane fracture problem of three nano-cracks emanating from a magnetoelectrically permeable regular triangle nano-hole in magneto-electroelastic materials[J]. Modern Physics Letters B, 2021, 35(7): 2150127.
- [14] Xiao J H, Feng G Y, Su M Y, Xu Y L, Zhang F C. Fracture analysis on periodic radial cracks emanating from a nano-hole with surface effects in magneto-electroelastic materials [J]. Engineering Fracture Mechanics, 2021, 258: 108115.
- [15] Jiang Y L. Micromechanics of magneto-electroelastic composite materials: average fields and effective behavior[J]. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 1998, 9(6): 404-416.
- [16] Jiang Y L. Magneto-electroelastic multi-inclusion and inhomogeneity problems and their applications in composite materials[J]. International Journal of Engineering Science, 2000, 38(18): 1193-2011.
- [17] Wang X, Shen Y P. Inclusions of arbitrary shape in magneto-electroelastic composite materials[J]. International Journal of Engineering Science, 2003, 41(1):

- 85-102.
- [18] Xiao J H, Xu B X, Xu Y L, Zhang F C. The generalized self-consistent micromechanics prediction of the magneto-electroelastic properties of multi-coated nanocomposites with surface effect[J]. *Smart Materials and Structures*, 2019, 28(5): 055004.
- [19] Xin Y Y, Xiao J H. Mode III fracture analysis of an oblique through-crack emanating from a nano-hole with surface effect[J]. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2023, 18(3): 391-403.
- [20] Muskhelishvili N I. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*[M]. Groningen; Noordhoff, 1953.
- [21] 李联和, 刘官厅. 一维六方准晶中螺形位错与楔形裂纹的相互作用[J]. *物理学报*, 2012, 61(8): 326-330. (Li L H, Liu G T. A screw dislocation interacting with a wedge-shaped crack in one-dimensional hexagonal quasicrystals [J]. *Acta Physica Sinica*, 2012, 61(8): 326-330. (in Chinese))
- [22] Xiao J H, Xin Y Y. Fracture analysis of circular hole edge arbitrary position crack with surface effects in magneto-electroelastic materials[J]. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2023, 28(10): 2202-2214.
- [23] Sih G C, Chen E P. Dilatational and distortional behavior of cracks in magneto-electroelastic materials [J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2003, 40(1): 1-21.
- [24] Guo J H, Wang Y B. Size-dependent three-phase cylinder model of magneto-electroelastic nanocomposites with interface effect under antiplane shear[J]. *Acta Mechanica*, 2018, 229(3): 1399-1414.

Analytical Solution of an Arbitrary-location Through Crack Emanating from a Nano-hole in Magneto-electro-elastic Materials

Junhua Xiao^{1,2} Yuyan Xin^{1,2}

(¹Department of Engineering Mechanics, Yanshan University, Qinhuangdao, 066004)

(²Hebei Key Laboratory of Mechanical Reliability for Heavy Equipments and Large Structures, Yanshan University, Qinhuangdao, 066004)

Abstract With the development of engineering technology and materials science, pure elastic materials can no longer meet the application needs of materials in industrial manufacturing. Magneto-electro-elastic (MEE) materials have more complex internal structures compared to classical elastic materials, and the methods for solving mechanical and physical performance are more difficult compared to classical elastic materials. Therefore, the mode III fracture behavior of MEE materials with nano-defects (pores and cracks) is investigated in this study. Based on the Gurtin-Murdoch surface theory and conformal mapping theory, the mode III fracture properties of MEE materials containing an arbitrary-location through crack emanating from a nano-hole under anti-plane mechanical loading, in-plane electrical loading, and in-plane magnetic loading are studied. The accurate solution of the MEE field in the matrix is obtained using the MEE theory and the far-field loading conditions. Analytical expressions for the MEE field intensity factors of the tips at both ends of the through crack, assuming that the surface of nano-defects is magneto-electric impermeable, are given. The proposed method is validated through a comparison with existing research. The effects of crack location, crack interaction, and the application of multiple physical loads on the dimensionless MEE field strength factors are discussed. The results show that the dimensionless MEE field intensity factors exhibit a significant size effect. The surface effect of nano-defects on the MEE tip fields of the cracks is constrained by the crack location. The dimensionless MEE field intensity factors are significantly affected by the ratio of the through crack length to the applied MEE loads. The results obtained in this study provide a theoretical basis for the experiments and numerical simulations of the mode III fracture behavior of an arbitrary-location through crack emanating from a nano-hole in MEE materials.

Key words MEE materials, multiple nano-defects, through crack emanating from nano-hole, size effect, crack location