

基于特征函数展开-变分法的多涂层纳米纤维复合材料纵向剪切有效性能*

肖俊华^{1,2**} 郑欣^{1,2} 信玉岩³

(¹ 燕山大学工程力学系, 秦皇岛, 066004)

(² 燕山大学河北省重型装备与大型结构力学可靠性重点实验室, 秦皇岛, 066004)

(³ 河海大学工程力学系, 南京, 211100)

摘要 本文基于细观力学单胞法和 Gurtin-Murdoch 表面弹性理论, 研究了周期纳米多涂层纤维复合材料在纵向剪切载荷作用时的弹性场和有效弹性性能. 利用周期微结构的单胞泛函变分方法和特征函数展开法, 给出了周期纳米涂层复合材料有纵向剪切有效模量的解析解. 所得解答与已有结果比较的一致性说明了本文方法的有效性. 通过改变多涂层的微结构参数, 可以调控周期纳米纤维复合材料材料的宏观有效性能. 算例中讨论了涂层力学性能、涂层几何参数、表面性能和纤维体积分数对复合材料有效性能的影响. 本文提出的方法和所得结果为周期纳米涂层纤维复合材料力学性能的预测和调控提供了理论依据.

关键词 周期纳米复合材料, 表面效应, 多涂层纤维, 特征函数展开法, 变分法

DOI: 10.19636/j.cnki.cjasm42-1250/o3.2025.024

0 引言

复合材料内部的微结构分布形式多种多样, 周期微结构是其中一种典型的分布方式. 周期结构具有重复分布的基本胞元, 表示材料内部的夹杂排列从完全无序到严格有序的情形^[1,2]. 现代复合材料设计尤其是计算机辅助材料设计, 通常就是指周期分布的胞元设计, 周期复合材料具有许多独特的特性^[3,4]. 合理的周期微结构参数设计, 可以调控周期纳米纤维复合材料的宏观有效性能^[5,6], 可以提升复合材料材料的力学性能^[7,8], 制造出满足不同领域和应用需求的复合材料. 多涂层是指几何参数在厚度坐标上成比例的一种新型涂层^[9-11]. 多涂层可以实现材料参数的梯度变化, 使涂层的力学性能梯度变化从而实现对材料的强度、韧性和刚度等特性的设计和控制^[12-14]. 纳米涂层可应用于许多方面, 在涂料中加入纳米材料, 能够起到阻燃和隔热, 起到

防火作用^[15]. Herve 和 Zaoui^[16] 研究了多层涂层纤维增强复合材料的弹性性能. Kot^[17] 提出了涂层基材体系的接触力学相关的问题, 研究了多层 Ti 软层对涂层断裂的影响. Wang 等^[18] 研究了多层结构对 Ti/TiN 涂层性能的影响. 戴兰宏等^[19] 中利用 Green 函数积分方程技术, 在夹杂应变均匀的近似假定下, 将 Hill 界面条件应用于整个二相体内, 采用逐步渐进的均匀化技术将模型推广至 N 层涂层夹杂问题, 得到了 N 层涂层夹杂复合材料宏观有效模量的显式表达.

纳米复合材料的增强相在纳米量级, 其宏观力学性能不同于传统复合材料^[20]. 针对周期纳米复合材料的有效力学性能, 国内外众多学者进行了深入和广泛研究. Duan 等^[21] 研究了含纳米空腔体的有效体积模量和剪切模量与空腔半径的关系, 研究结果可用于分析纳米复合材料和泡沫结构的性能. Li 等^[22] 通过求解纳米颗粒在基体中的无限稀疏分散问题, 提出了一种用于评价具有界面效应的纳米复

* 河北省自然科学基金项目(A2022203025)资助.

2025-08-05 收到修改稿, 2025-08-07 网络首发.

** 通讯作者. E-mail: xiaojunhua@ysu.edu.cn.

合材料有效弹性性能的微分格式. Wang 等^[23]建立了开发了用于纳米复合材料模拟的三维多粒子单元自动生成的专用程序代码,研究了纳米复合材料的结构对其弹性性能的影响. Chen^[24]讨论了纤维压电纳米复合材料的有效电弹模量随纤维尺寸的变化. Luo 和 Wang^[25]研究了椭圆夹杂两相模型在反平面剪切载荷作用时的半解析解答. Lu 等^[26]利用考虑表面、界面和尺寸效应的能量公式,研究了纳米结构多铁复合材料的电、磁和磁电性能. 肖俊华和徐耀玲^[27]基于广义自洽方法研究了界面性能、夹杂尺寸和夹杂材料参数对纳米复合材料有效反平面剪切模量的影响.

在非梯度化涂层体系中,当涂层材料与基体材料间存在显著物性差异时,界面处弹性模量、密度、泊松比及膨胀系数等参数的突变效应将导致残余应力集中,进而引发界面结合强度退化及力学性能劣化. 功能梯度材料作为多相复合材料体系,其组成相分布、微观组织结构及宏观物性参数沿特定空间方向呈现连续梯度变化特征. 典型如仿生功能梯度涂层,通过成分梯度分布实现物性参数的平滑过渡,有效缓解界面应力集中现象^[28-31].

纳米复合材料力学性能的特殊性源于其增强相的表面有着不同于基体材料的原子排列和性质^[32-34],随着增强相结构尺寸的减小,其最外层原子的数量逐渐增加,当尺寸至纳米尺度时,表面效应不能忽略^[35-37]. Gurtin-Murdoch 表面弹性理论^[38-40]

通过引入表面应力考虑表面自由能的影响,将连续介质力学中的宏观特征尺寸与纳米夹杂/缺陷的微观特征尺寸进行了统一描述,该理论广泛应用于纳米复合材料宏观有效力学性能的研究^[41]. 本文基于细观力学单胞法和 Gurtin-Murdoch 表面弹性理论,考虑纳米纤维和涂层的表面效应,利用特征函数展开和变分方法给出了周期纳米纤维复合材料有效纵向剪切模量的解析解. 基于所得解答,讨论了涂层材料性能和几何参数以及表面性能对复合材料有效性能的影响,阐明了纳米尺度时纤维尺寸、体积分数和纤维/基体刚度匹配对纳米复合材料有效纵向剪切模量的影响.

1 多涂层纳米纤维复合材料问题与基本方程

图 1(a)所示为双周期排列多涂层纳米纤维复合材料示意图,两个方向基本周期分别为 d_1 和 d_2 . 设远场作用均匀纵向剪切应变 γ_0^0 . 图 1(b)是表示微结构周期特征的单胞与边界,涂层有 K 层, R_1 为纤维半径, R_c^k ($k=1 \cdots K$) 为第 k 层涂层的半径, R_2 为涂层外半径. l, c, m 分别表示纤维、涂层和基体. 周期结构中的每个胞元可以通过平移一个周期 p 来重合, $p = m_1 d_1 + m_2 d_2$, 其中 m_1 和 m_2 为任意整数.

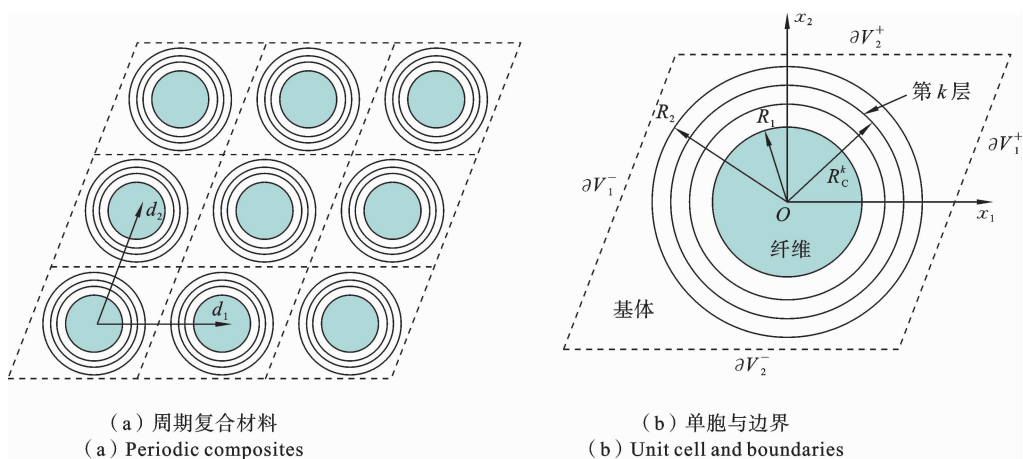


图 1 周期多涂层纳米纤维复合材料示意图

Fig. 1 Schematic diagram of periodic multi-coating nano-fiber composites

对于横观各向同性材料,在远程均匀纵向剪切作用时位移场 w 满足下面平衡方程^[25]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = 0 \quad (1)$$

问题的应力场、位移场和合力可以通过一个复势函数 $F(z)$ 及其导数表示:

$$\begin{cases} \sigma_{13} - i\sigma_{23} = GF'(z) \\ w = \frac{1}{2}[F(z) + \overline{F(z)}] \\ T_1 = -\int_A^B (\sigma_{23} dx - \sigma_{13} dy) = \frac{1}{2}Gi[\overline{F(z)} - F(z)]_A^B \end{cases} \quad (2)$$

其中 $i = \sqrt{-1}$, $z = x_1 + ix_2$ 表示复势函数, $\overline{F(z)}$ 表示 $F(z)$ 的共轭, $F'(z)$ 表示复势函数关于变量 z 的求导, $[\cdot]_A^B$ 表示方括号内的量在 A 点和 B 点的差值, G 表示剪切模量.

基于 Gurtin-Murdoch 表面弹性理论^[38-40], 在纳米纤维与涂层界面处, 应用位移连续与应力跳跃的非经典边界条件:

$$\begin{cases} w_1(t) = w_c^1(t), \quad t = R_1 e^{i\theta} \\ \tau_{rz}^1(t) - \tau_{rz}^c(t) = \frac{2\mu^s}{R_1} \frac{\partial \epsilon_{\theta z}^{S_1}}{\partial \theta}, \quad t = R_1 e^{i\theta} \end{cases} \quad (3)$$

在第 $k-1$ 层涂层界面与第 k 层涂层界面处, 满足:

$$\begin{cases} w_c^{k-1}(t) = w_c^k(t), \quad t = R_c^{k-1} e^{i\theta} \\ \tau_{rz}^{k-1}(t) - \tau_{rz}^k(t) = \frac{2\mu^s}{R_c^{k-1}} \frac{\partial \epsilon_{\theta z}^{S_k}}{\partial \theta}, \quad t = R_c^{k-1} e^{i\theta} \end{cases} \quad (4)$$

在涂层与基体界面处, 满足:

$$\begin{cases} w_c(t) = w_m(t), \quad t = R_2 e^{i\theta} \\ \tau_{rz}^c(t) - \tau_{rz}^m(t) = \frac{2\mu^s}{R_2} \frac{\partial \epsilon_{\theta z}^{S_3}}{\partial \theta}, \quad t = R_2 e^{i\theta} \end{cases} \quad (5)$$

其中 R_1 为纤维半径, R_c^k ($k=1 \cdots K$) 为涂层中第 k 层半径, R_2 为涂层半径. 纤维与涂层的界面、第 $k-1$ 层与第 k 层的界面、涂层与基体之间的界面分别表示为 S_1 、 S_2 和 S_3 . $\epsilon_{\theta z}^{S_i}$ 表示界面 S_i ($i=1, 2, 3$) 上的应变分量.

2 解析分析与解答

复合材料内单胞满足中心对称, 单胞内应力场也满足中心对称, 即: $(\tau_{13} - i\tau_{23})_{z=-z_0} = (\tau_{13} -$

$i\tau_{23})_{z=z_0}$, 因此各介质域内复势函数 $F(z)$ 满足:

$$F'(z) = F'(-z), \quad F(z) = -F(-z) \quad (6)$$

纤维域内的复势函数 $F_1(z)$ 可展开为仅含有奇数次项的 Taylor 级数^[42]:

$$F_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n z^{2n-1} \quad (7)$$

基体域中的复势函数 $F_m(z)$ 可展开为仅含有奇数次项的 Laurent 级数^[42]:

$$F_m(z) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n z^{-(2n-1)} + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n z^{(2n-1)} \quad (8)$$

式中 E_n 、 P_n 和 Q_n 是待定的复系数.

涂层分层为 K 层, 设第 k 层的剪切模量为 G_c^k , 内径为 R_c^{k-1} , 外径为 R_c^k . 涂层第 $k-1$ 层的外径与第 k 层的内径相等, 即: $R_c^{k-1} = R_c^k$, 第 k 层对应的复势函数 $F_c^k(z)$ 可以展开为如下 Laurent 级数:

$$F_c^k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n^k z^{-(2n-1)} + \sum_{n=1}^{\infty} G_n^k z^{(2n-1)} \quad (k=1 \cdots K) \quad (9)$$

式中 F_n^k 和 G_n^k 是待定复系数.

将式(7)-(9)代入边界条件(3)-(5), 可得:

$$\begin{cases} F_1(z) + \overline{F_1(z)} = F_c^1(z) + \overline{F_c^1(z)} \\ \tau_{rz}^1(t) - \tau_{rz}^c(t) = \frac{2\mu^s}{R_1} \frac{\partial \epsilon_{\theta z}^{S_1}}{\partial \theta}, \quad t = R_1 e^{i\theta}, \quad z \cdot \bar{z} = R_1^2 \\ F_c^{k-1}(z) + \overline{F_c^{k-1}(z)} = F_c^k(z) + \overline{F_c^k(z)} \\ \tau_{rz}^{k-1}(t) - \tau_{rz}^k(t) = \frac{2\mu^s}{R_c^{k-1}} \frac{\partial \epsilon_{\theta z}^{S_k}}{\partial \theta}, \quad t = R_c^{k-1} e^{i\theta} \\ z \cdot \bar{z} = (R_c^{k-1})^2, \quad k=1 \cdots K \\ F_c^K(z) + \overline{F_c^K(z)} = F_m(z) + \overline{F_m(z)} \\ \tau_{rz}^c(t) - \tau_{rz}^m(t) = \frac{2\mu^s}{R_2} \frac{\partial \epsilon_{\theta z}^{S_3}}{\partial \theta}, \quad t = R_2 e^{i\theta}, \quad z \cdot \bar{z} = R_2^2 \end{cases} \quad (10)$$

由上式可得:

$$\begin{cases} E_n = G_n^1 + \overline{F_n^1} R_1^{2-4n} \\ G_1[(2n-1)E_n R_1^{2n-2}] - G_c^1[G_n^1(2n-1)R_1^{2n-2} + \overline{F_n^1}(1-2n)R_1^{-2n}] = -\mu^s E_n R_1^{2n-3}(2n-1)^2 \\ G_n^{k-1} + \overline{F_n^{k-1}}(R_c^{k-1})^{2-4n} = G_n^k + \overline{F_n^k}(R_c^{k-1})^{2-4n} \\ G_c^{k-1}[G_n^{k-1}(2n-1)(R_c^{k-1})^{2n-2} + \overline{F_n^{k-1}}(1-2n) \cdot (R_c^{k-1})^{-2n}] - G_c^k[G_n^k(2n-1)(R_c^{k-1})^{2n-2} + \overline{F_n^k}(1-2n)(R_c^{k-1})^{-2n}] = -\mu^s [G_n^{k-1}(R_c^{k-1})^{2n-3} \cdot (2n-1)^2 + \overline{F_n^{k-1}}(R_c^{k-1})^{-2n-1}(2n-1)^2] \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} G_n^k + \overline{F}_n^k R_2^{2-4n} = Q_n + \overline{P}_n R_2^{2-4n} \\ G_c^k [G_n^k (2n-1) R_2^{2n-2} + \overline{F}_n^k (1-2n) R_2^{-2n}]_2 - \\ G_m [Q_n (2n-1) R_2^{2n-2} + \overline{P}_n (1-2n) R_2^{-2n}] = \\ -\mu^s [G_n^k R_2^{2n-3} (2n-1)^2 + \overline{F}_n^k R_2^{-2n-1} (2n-1)^2] \end{cases} \quad (12)$$

由式(11)和(12)可以得出：

$$\begin{cases} E_n = G_n^1 + \overline{F}_n^1 R_1^{2-4n} \\ G_1 E_n \frac{\mu^s (2n-1)}{R_1} E_n = G_c^1 [G_n^1 - \overline{F}_n^1 R_1^{2-4n}] \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} G_n^{k-1} + \overline{F}_n^{k-1} (R_c^{k-1})^{2-4n} = G_n^k + \overline{F}_n^k (R_c^{k-1})^{2-4n} \\ G_c^{k-1} [G_n^{k-1} - \overline{F}_n^{k-1} (R_c^{k-1})^{2-4n}] + \\ \mu^s \left[\frac{(2n-1)}{R_c^{k-1}} G_n^{k-1} + \overline{F}_n^k \frac{(2n-1)}{R_c^{k-1}} (R_c^{k-1})^{2-4n} \right] \\ = G_c^k [G_n^k - \overline{F}_n^k (R_c^{k-1})^{2-4n}] \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} G_n^k + \overline{F}_n^k R_2^{2-4n} = Q_n + \overline{P}_n R_2^{2-4n} \\ G_c^k [G_n^k - \overline{F}_n^k R_2^{2-4n}] + \mu^s \left[\frac{(2n-1)}{R_2} G_n^k + \right. \\ \left. \frac{\overline{F}_n^k (2n-1)}{R_2} R_2^{2-4n} \right] = G_m [Q_n - \overline{P}_n R_2^{2-4n}] \end{cases}$$

消去 E_n ，可得：

$$F_n^1 = \frac{G_1 + \mu^s (2n-1)/R_1 - G_c^1}{-G_1 - \mu^s (2n-1)/R_1 - G_c^1} R_1^{4n-2} \overline{G}_n^1 \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \text{令 } \eta_n = & \frac{\left[G_m - \frac{\mu^s (2n-1)}{R_2} \right] \left(1 + \eta_n^k \left(\frac{R_c^{k-1}}{R_2} \right)^{4n-2} \right) - G_c^k \left[1 - \eta_n^k \left(\frac{R_c^{k-1}}{R_2} \right)^{4n-2} \right]}{\left[G_m + \frac{\mu^s (2n-1)}{R_2} \right] \left(1 + \eta_n^k \left(\frac{R_c^{k-1}}{R_2} \right)^{4n-2} \right) + G_c^k \left[1 - \eta_n^k \left(\frac{R_c^{k-1}}{R_2} \right)^{4n-2} \right]}, \text{ 可得：} \\ P_n = & \eta_n \overline{Q}_n (R_2)^{4n-2} \end{aligned} \quad (18)$$

其中 G_1 和 G_m 分别表示纤维和基体的剪切模量， G_c^k 表示第 k 层界面相(多涂层)的剪切模量。

基体中的复势函数特征展开式可以写为：

$$F_m(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n R_2^{4n-2} \overline{Q}_n z^{-(2n-1)} + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n z^{2n-1} \quad (19)$$

当代表性单元体具有轴对称性且边界条件也关于坐标轴对称时，复势函数满足： $F'(z) = -\overline{F'(-z)} = -\overline{F'(z)}$ ，方程(8)中的复势函数也满足 $\overline{P}_n = -P_n, \overline{Q}_n = -Q_n$ ，则基体中的复势函数特征展开简化为：

$$\begin{aligned} \text{令 } \eta_1 = & \frac{G_1 + \mu^s (2n-1)/R_1 - G_c^1}{-G_1 - \mu^s (2n-1)/R_1 - G_c^1}, \text{ 得 } \eta_{k-1} = \\ & \eta_1 \left(\frac{R_1}{R_c^{k-1}} \right)^{4n-2}. \end{aligned}$$

消去 F_n^1, G_n^1, F_n^{k-1} 和 G_n^{k-1} ，可得：

$$F_n^k = \overline{G}_n^k (R_c^{k-1})^{4n-2} \frac{\left[G_c^k - G_c^{k-1} \left(\frac{1 - \eta_n^{k-1}}{1 + \eta_n^{k-1}} \right) - \xi \right]}{\left[G_c^k + G_c^{k-1} \left(\frac{1 - \eta_n^{k-1}}{1 + \eta_n^{k-1}} \right) + \xi \right]} \quad (16)$$

$$\text{令 } \eta_n^k = \frac{G_c^k - G_c^{k-1} \left(\frac{1 - \eta_n^{k-1}}{1 + \eta_n^{k-1}} \right) - \xi}{G_c^k + G_c^{k-1} \left(\frac{1 - \eta_n^{k-1}}{1 + \eta_n^{k-1}} \right) + \xi}, \xi = \frac{\mu^s (2n-1)}{R_c^{k-1}}.$$

消去 F_n^k 和 G_n^k ，可得：

$$P_n = \overline{Q}_n (R_2)^{4n-2} \frac{\left[G_m - G_c^k \frac{1 - \eta_n^k \left(\frac{R_c^{k-1}}{R_2} \right)^{4n-2}}{1 + \eta_n^k \left(\frac{R_c^{k-1}}{R_2} \right)^{4n-2}} - \frac{\mu^s (2n-1)}{R_2} \right]}{\left[G_m + G_c^k \frac{1 - \eta_n^k \left(\frac{R_c^{k-1}}{R_2} \right)^{4n-2}}{1 + \eta_n^k \left(\frac{R_c^{k-1}}{R_2} \right)^{4n-2}} + \frac{\mu^s (2n-1)}{R_2} \right]} \quad (17)$$

$$P_n = \eta_n \overline{Q}_n (R_2)^{4n-2} \quad (18)$$

$$F_m(z) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \left[-\eta_n R_2^{4n-2} z^{-(2n-1)} + z^{2n-1} \right] \quad (20)$$

应力、位移和边界合力可以用下面求和的形式表示：

$$\begin{cases} \sigma_{i3} = \sum_{n=1}^N B_n \sigma_i^{(n)} \\ \omega = \sum_{n=1}^N B_n \omega^{(n)} \\ T_t = \sum_{n=1}^N B_n T_t^{(n)} \end{cases} \quad (21)$$

其中：

$$\left\{ \begin{aligned} B_n &= -\eta_n R_2^{4n-2} Q_n, & 1 \leq n \leq N \\ \sigma_{13}^{(n)} &= \frac{G_m}{2} [(1-2n)(z^{-2n} - \bar{z}^{-2n}) - (2n-1)\eta_n^{-1} R_2^{2-4n} (z^{2n-2} - \bar{z}^{2n-2})], & 1 \leq n \leq N \\ \sigma_{23}^{(n)} &= \frac{-G_m}{2i} [(1-2n)(z^{-2n} + \bar{z}^{-2n}) - (2n-1)\eta_n^{-1} R_2^{2-4n} (z^{2n-2} + \bar{z}^{2n-2})], & 1 \leq n \leq N \\ \omega^{(n)} &= \frac{1}{2} [(z^{1-2n} - \bar{z}^{1-2n}) - \eta_n^{-1} R_2^{2-4n} (z^{2n-1} - \bar{z}^{2n-1})], & 1 \leq n \leq N \\ T_i^m &= \frac{G_m i}{2} [(\bar{z}^{-(2n-1)} + z^{-(2n-1)}) + \eta_n^{-1} R_2^{2-4n} (\bar{z}^{2n-1} + z^{2n-1})], & 1 \leq n \leq N \end{aligned} \right. \quad (22)$$

将方程(21)和方程(22)代入驻值条件:

$$\begin{aligned} & \sum_k \int_{\partial V_k^+} \delta \sigma^{k+} \cdot (W^{k+} - W^{k-}) dS - \\ & \sum_k \int_{\partial V_k^+} (\sigma^{k+} + \sigma^{k-}) \cdot \delta W^{k-} dS = \\ & \sum_k \int_{\partial V_k^+} \delta \sigma^{k+} \cdot \langle \gamma \rangle \cdot p^k dS \end{aligned} \quad (23)$$

可以得到如下线性方程:

$$\sum_{n=1}^N D_{nm} B_n = C_m, \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (24)$$

其中:

$$\begin{aligned} D_{mm} &= \sum_k \int_{\partial V_k^+} n^{k+} \cdot \sigma_{(m)}^{k+} (W_{(n)}^{k+} - W_{(n)}^{k-}) dS - \\ & \sum_k \int_{\partial V_k^+} n^{k-} \cdot (\sigma_{(n)}^{k-} - \sigma_{(n)}^{k+}) W_{(m)}^{k-} dS \quad (25) \\ C_m &= \sum_k \int_{\partial V_k^+} (n^{k+} \cdot \sigma_{(m)}^{k+}) (\langle \gamma \rangle \cdot p^k) dS \\ &= \sum_k [T_{(m)}^{k+} \langle \gamma \rangle \cdot p^k] \end{aligned} \quad (26)$$

其中 $\sigma_{(m)}^{k+}$, $W_{(n)}^{k+}$ 和 $T_{(m)}^{k+}$ 分别表示 $\sigma_i^{(m)}$, $W^{(n)}$ 和 $T^{(m)}$ 在 V_k^+ 上的取值, 上标“ $-$ ”表示在 ∂V_k^- 上取值. 利用公式(24)计算各展开系数并将其代入公式(21)后, 即可得到周期多涂层纳米纤维复合材料的应力场和位

其中 λ 是纤维和涂层的总体积分数, $\eta_1 = \frac{G_1 + \mu^s(2n-1)/R_1 - G_c^1}{-G_1 - \mu^s(2n-1)/R_1 - G_c^1}$, $\eta_{k-1} = \eta_1 \left(\frac{R_1}{R_c^{k-1}}\right)^{4n-2}$, $\eta_n^k = \frac{G_c^k - G_c^{k-1} \left(\frac{1-\eta^{k-1}}{1+\eta^{k-1}}\right) - \frac{\mu^s(2n-1)}{R_c^{k-1}}}{G_c^k + G_c^{k-1} \left(\frac{1-\eta^{k-1}}{1+\eta^{k-1}}\right) + \frac{\mu^s(2n-1)}{R_c^{k-1}}}$, $\eta_n^m = \frac{\left[G_m - \frac{\mu^s(2n-1)}{R_2}\right] \left(1 + \eta_n^k \left(\frac{R_c^{k-1}}{R_2}\right)^{4n-2}\right) - G_c^k \left[1 - \eta_n^k \left(\frac{R_c^{k-1}}{R_2}\right)^{4n-2}\right]}{\left[G_m + \frac{\mu^s(2n-1)}{R_2}\right] \left(1 + \eta_n^k \left(\frac{R_c^{k-1}}{R_2}\right)^{4n-2}\right) + G_c^k \left[1 - \eta_n^k \left(\frac{R_c^{k-1}}{R_2}\right)^{4n-2}\right]}$.

3 结果收敛分析与比较

本文所得纳米多涂层复合材料的有效模量的解析解随特征展开项数 N 的收敛情况如表 1 所示, 其中纤维半径取 1 nm, 取涂层数 $K=2$, 第 1 层涂层半径 2 nm, 第 2 层涂层半径 3 nm, $G_1=10G_m$, $G_c^1=0$.

移场. 单胞内的平均应力可写为:

$$\langle \sigma_{i3} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{i3} dV = \frac{1}{V} \sum_k T^k p_i^k, \quad i = 1, 2 \quad (27)$$

式中 T^k 表示单胞边界 ∂V_k 的合力.

周期纳米复合材料的有效剪切模量计算公式为:

$$G_E = \frac{\langle \sigma_{13} \rangle}{\langle \gamma_{13} \rangle} \quad (28)$$

其中 $\langle \gamma_{13} \rangle$ 表示平均切应变, 其值等于远场均匀应变 γ_{13}^0 .

当涂层纤维呈正方形排列, 即图 1(b)中 $d_1=d_2$ 且胞元夹角为 90° , 特征展开项数中的 $N=1$ 时, 纳米多涂层纤维复合材料的有效剪切模量可简化为:

$$\frac{G_E}{G_m} = \frac{(\pi - 2\eta\lambda)^2}{2\pi^2(1 + \eta\lambda) - (\pi + 2\eta\lambda)^2} \quad (29)$$

当涂层纤维呈六边形排列, 即图 1(b)中 $d_1=d_2$ 且胞元夹角为 60° , 特征展开项数中的 $N=1$ 时, 纳米多涂层纤维复合材料的有效剪切模量可简化为:

$$\frac{G_E}{G_m} = \frac{\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\eta\lambda\right)^2}{2\pi^2(1 + \eta\lambda) - \left(\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}\eta\lambda\right)^2} \quad (30)$$

$1G_m, G_c^2=0.5G_m, \alpha=\mu^s/G_m=2 \times 10^{-10}$ m. 由表可以看出, 本文提出的特征展开-变分法计算结果显示出了较快的收敛特性. 随着展开项数的增加, 涂层纤维呈正方形和正六边形排列时的结果都显示出很好的收敛性, 且与细观力学方法的结果^[43]吻合一致. 当特征展开数 $N=7$ 时, 计算结果已经具备了足够的准确性, 可以认为 $N=7$ 时通过特征展开-变分法得

到的有效模量结果足够精确。

表 1 有效纵向剪切模量随特征展开项数 N 的收敛情况

Table 1 Convergence of effective longitudinal shear modulus with N

N	$\lambda=0.1$		$\lambda=0.3$		$\lambda=0.5$	
	正方形	正六边形	正方形	正六边形	正方形	正六边形
1	0.9267	0.9264	0.7970	0.7947	0.6860	0.6806
3	0.9263	0.9264	0.7942	0.7941	0.6786	0.6788
5	0.9263	0.9263	0.7940	0.7941	0.6781	0.6787
7	0.9262	0.9263	0.7940	0.7941	0.6781	0.6787
Xiao et al ^[43] (GSCM)	0.9263		0.7941		0.6788	

当不考虑涂层和纤维的表面效应时(表面弹性常数 $\mu^s=0$), 本文的高阶解 ($N=7$) 与已有结果^[44] 比较如图 2 所示, 其中纤维和基体的剪切模量分别为 $G_f=172.37$ GPa 和 $G_m=1.5322$ GPa, 涂层数 $K=2$, 取 $G_c^1/G_m=70, G_c^2/G_m=30, \theta=\pi/2, d_1=d_2$, 涂层厚度 $\delta_1=R_c^1-R_1, \delta_2=R_2-R_c^1, \delta_1=\delta_2=0.01$. 结果显示所得解析解与现有文献结果高度吻合, 验证了本文方法的有效性和准确性。

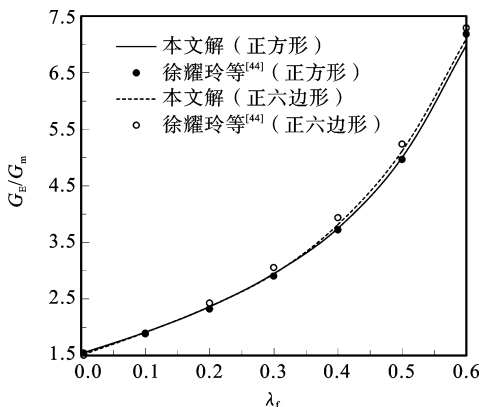


图 2 纵向剪切模量随纤维体积分数 λ_f 的变化

Fig. 2 Variation of longitudinal shear modulus with fiber volume fraction λ_f

4 结果与讨论

4.1 涂层刚度对纤维/基体刚度匹配的影响

取涂层数 $K=2$, 图 3 给出了第 2 层涂层(外涂

层)剪切模量 $\lg(G_c^2/G_m)$ 对复合材料纵向剪切模量的影响曲线, 其中纤维体分数为 $\lambda=0.3, N=7, \alpha=2 \times 10^{-10}, G_c^1/G_m=10$, 纤维半径 $R_1=5$ nm, 第 1 层涂层半径 $R_c^1=6$ nm, 第 2 层涂层半径 $R_c^2=7$ nm, $\delta_1=\delta_2=1$ nm, $d_1=d_2$. 由图可以看出, 当外涂层刚度值在一定范围内时(横坐标中间部分), 纤维/基体模量比的变化对复合材料有效模量的影响显著; 然而, 当外涂层的刚度非常大或者非常小时(横坐标两端部分), 复合材料的有效模量就会趋于定值, 不再受到纤维刚度变化的影响. 这表明纤维/基体模量比对复合材料有效模量的影响程度, 受涂层材料性能的调控. 当某一涂层(本例中外涂层)具有极低或极高的刚度时, 其所展现出的刚度性能显著主导复合材料的整体力学性能. 这种极软或极硬涂层的存在, 将限制纤维与基体对该复合材料整体刚度的贡献, 其原因在于纤维与基体的变形和应力传递受到极软或极硬涂层的限制。

4.2 涂层几何参数对复合材料有效模量的影响

取涂层数 $K=2$, 图 4 给出了涂层壁厚和表面性能 $\alpha=\mu^s/G_m$ 对复合材料有效模量 G_E/G_0 的影响曲线, 其中 G_0 表示经典细观力学(不考虑表面效应 $\alpha=0$)时复合材料的有效纵向剪切模量, 涂层纤维体积分数 $\lambda=0.3$, 纤维半径 $R_1=1$ nm, $\delta_1=R_c^1-R_1, \delta_2=R_2-R_c^1, G_1/G_m=10, G_c^1/G_m=3, G_c^2/G_m=7, \alpha=\mu^s/G_m, d_1=d_2$. 可以看出, 在经典弹性理论 ($\alpha=0$) 中, 无量纲纵向剪切模量与涂层的几何尺寸无关. 当

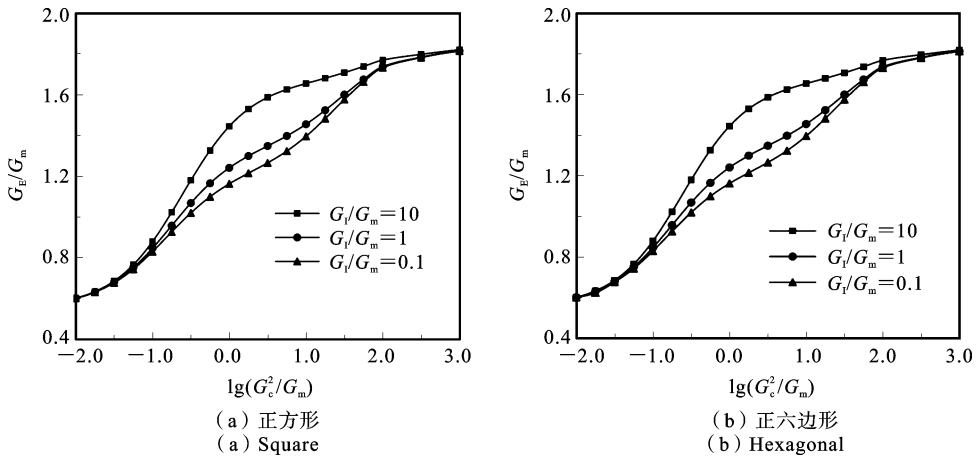


图 3 有效纵向剪切模量随涂层刚度的变化

Fig. 3 Variation of effective longitudinal shear modulus with stiffness of coating

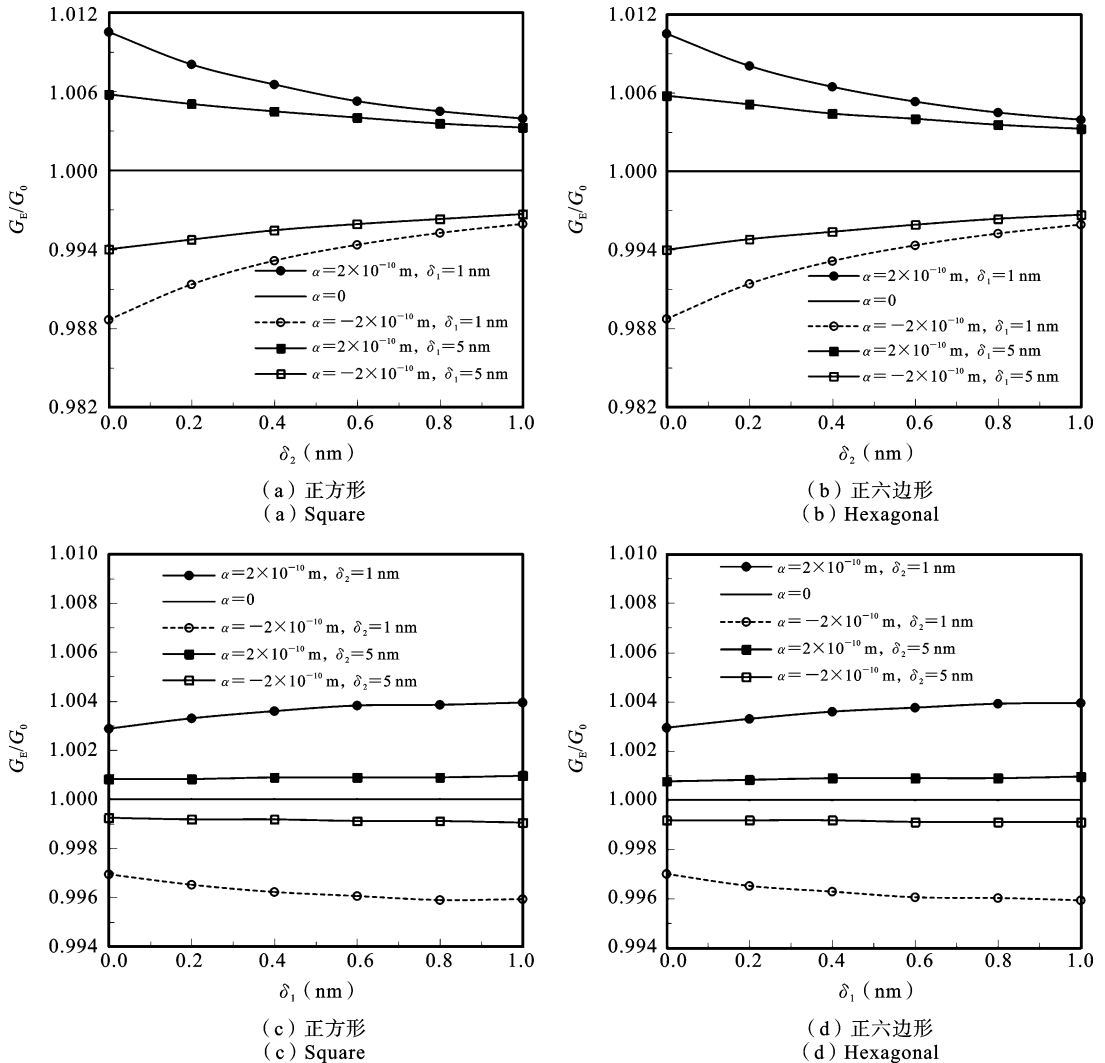


图 4 有效纵向剪切模量随涂层几何参数的变化

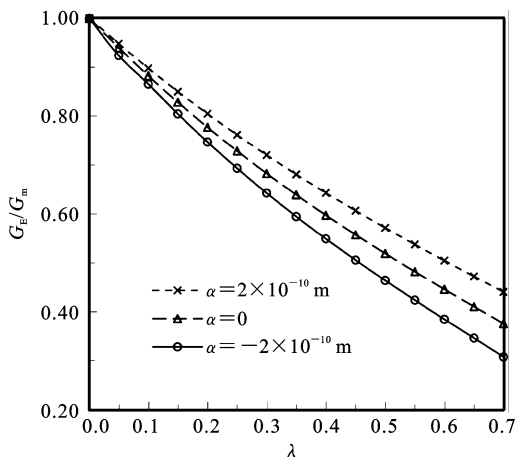
Fig. 4 Variation of effective longitudinal shear modulus with geometric parameters of coating

考虑表面效应时,无量纲纵向剪切模量在纳米尺度范围内受涂层尺寸的影响.表面性能参数 α 为正时,无量纲有效纵向剪切模量高于经典结果.两层涂层厚度的变化对无量纲纵向剪切模量的影响很大,固定涂层 δ_1 厚度,增加涂层 δ_2 厚度时,复合材料有效模量随涂层 δ_2 厚度的增加而逐渐减小.而固定涂层 δ_2 厚度,增加涂层 δ_1 厚度时,复合材料有效模量随涂层 δ_1 厚度的增加而增大.正表面常数时的无量纲有效纵向剪切模量高于负表面常数的结果.

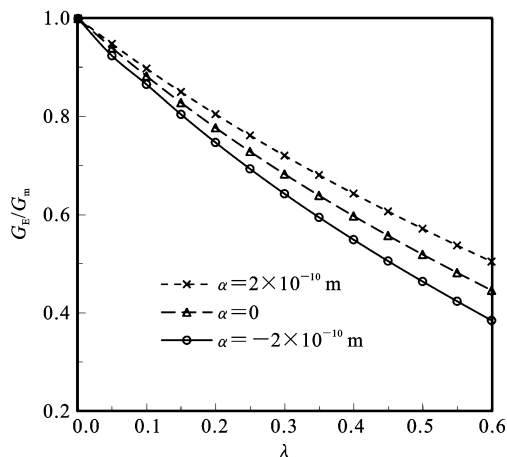
4.3 纤维体积分数对模量的影响

取涂层数 $K=2$,图 5 给出了纤维和涂层总体积

分数 λ 对纳米复合材料有效无量纲纵向剪切模量的影响曲线,其中 $N=7, R_1=1 \text{ nm}, R_c^1=2 \text{ nm}, R_2=3 \text{ nm}, G_1/G_m=10, G_c^1/G_m=1, G_c^2/G_m=0.1$.可以看出,纤维体积分数的增加作为影响表界面效应的关键参数,对复合材料的整体性能具有直接影响.表面效应对复合材料整体有效模量的贡献有限;然而,随着纤维体积分数的递增,表面效应对复合材料有效模量的影响逐渐凸显,成为改变其力学性能的重要因素,体积分数的增加使表面效应越明显.



(a) 正方形
(a) Square



(b) 正六边形
(b) Hexagonal

图 5 有效纵向剪切模量随纤维涂层总体积分数 λ 的变化

Fig. 5 Variation of effective longitudinal shear modulus with total volume fraction λ of coated fiber

4.4 涂层数对复合材料有效模量的影响

图 6 给出了不同涂层数和表面性能 $\alpha = \mu^s/G_m$ 对复合材料有效模量 G_E/G_m 的影响曲线,其中纤维半径 $R_1=1 \text{ nm}, \delta_1=R_c^1-R_1, \delta_2=R_c^2-R_c^1, \delta_3=R_3-R_c^2, \delta_1=\delta_2=\delta_3=1 \text{ nm}, \theta=\pi/2, G_1/G_m=10G_c^1/G_m=7, G_c^2/G_m=5, G_c^3/G_m=3\alpha=\mu^s/G_m, d_1=d_2$.比较不同涂层界面层数的情形,界面层的存在对界面位置应力集中系数的影响不容忽视.从图中可以看出,相同体积分数的情况下,随着涂层数 k 的增加,有效复合材料剪切模量在逐渐减小.涂层数越多,界面效应对有效剪切模量的影响越大,涂层数的增加使得界面减弱了应力传递.

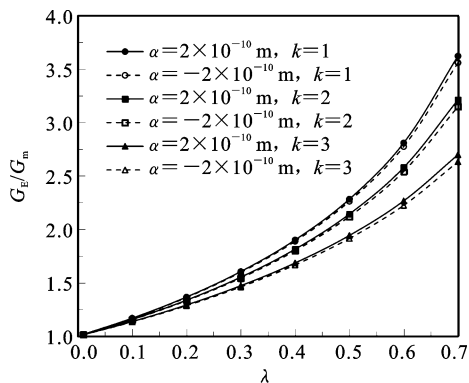


图 6 有效纵向剪切模量随涂层数 k 的变化

Fig. 6 Variation of effective longitudinal shear modulus with number of coatings k

5 结论

本文研究了周期纳米多涂层纤维复合材料在纵向剪切载荷作用时的有效纵向剪切模量,基于表面弹性理论模型并借助特征展开-变分法进行分析与求解,得到了周期纳米涂层复合材料有纵向剪切有效模量的解析解.结果表明:特征展开项的收敛速度很快,取有限项时可以给出周期纳米复合材料有效模量的精确解,且与已有结果吻合较好.保持纤维半径和体积分数一定,纤维/基体模量比对复合材料有效模量的影响程度,受涂层材料性能的调控,涂层极软或极硬时将限制纤维与基体对该复合材料整体刚度的贡献.当考虑表面效应时,无量纲纵向剪切模量在纳米尺度范围内受涂层尺寸的影响.随着纤维涂层总体积分数的增大,表面效应对复合材料有效模量的影响逐渐凸显,成为改变其力学性能的重要因素,体积分数越大表面效应越明显.随着涂层数的增多,表面效应对复合材料的有效模量有显著影响,界面效应导致应力传递能力减弱.

参考文献

- [1] Aboudi J. *Mechanics of Composite Materials: A Unified Micromechanical Approach* [M]. Amsterdam: Elsevier Science Publisher, 1991.
- [2] Nemat-Nasser S, Hori M. *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials* [M]. Amsterdam: Elsevier Science Publisher, 1999.
- [3] Chan H L, W, Guy I L. Piezoelectric ceramic/polymer composites for high frequency applications [J]. *Key Engineering Materials*, 1994, 92-93: 275-300.
- [4] Lee JS, Boyd JG, Lagoudas DC. Effective properties of three-phase electro-magneto-elastic composites [J]. *International Journal of Engineering Science*, 2005, 43(10): 790-825.
- [5] 徐耀玲, 蒋持平. 双周期圆柱形夹杂纵向剪切问题的精确解 [J]. *力学学报*. 2003, 35(3): 265-271. (Xu Y L, Jiang C P. An exact solution for a doubly periodic array of cylindrical inclusions under longitudinal shear [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2003, 35(3): 265-271. (in Chinese))
- [6] 谢新亮, 肖俊华, 蒋持平. 双周期电磁弹性纤维增强复合材料的纵向剪切问题 [J]. *复合材料学报*, 2005, 22(5): 184-189. (Xie X L, Xiao J H, Jiang C P. Problems of magneto electro elastic composites with doubly periodic fibers under longitudinal shear [J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2005, 22(5): 184-189. (in Chinese))
- [7] 田桥, 徐耀玲, 肖俊华. 基于界面层模型的双周期纳米夹杂复合材料反平面问题研究 [J]. *力学季刊*, 2019, 40(3): 488-497. (Tian Q, Xu YL, Xiao J H. Study on composites containing doubly periodic nano inhomogeneities under antiPlane shear based on inter-phase model [J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2019, 40(3): 488-497. (in Chinese))
- [8] 董灏, 崔俊芝, 聂玉峰. 周期复合材料结构高阶多尺度方法的数值精度提高策略 [J]. *数值计算与计算机应用*, 2023, 44(1): 12-24. (Dong H, Cui J Z, Nie Y F. The improvement strategy of numerical accuracy of high-order multi-scale method for periodic composite structures [J]. *Journal on Numerical Methods and Computer Applications*, 2023, 44(1): 12-24. (in Chinese))
- [9] Hirai H, Chen L. Recent and prospective development of FGM in Japan [J]. *Materials Science Forum*, 1999, 308: 509-514.
- [10] Chen G, Feng Z, Liang Y. Formation mechanism of laser-clad gradient thermal barrier coatings [J]. *Transaction Nonferrous Metal Society China*, 2000, 10(1): 92-93.
- [11] Dahan, U Admon, Frage N, Sariel J, et al. The development of a functionally graded TiC-Ti multilayer hard coating [J]. *Surface and Coatings Technology*, 2001, 137: 111-115.
- [12] Brookes K J A. Hard metal coatings and FGMs continue advance [J]. *Metal Powder Report*, 2000, 55(4): 16-20.
- [13] Walter Lengauer, Klaus Dreyer. Functionally graded hardmetals [J]. *Journal of Alloys and Compounds*, 2002, 338: 194-212.
- [14] Chi S, Chung Y L. Cracking in coating-substrate system with multi-layered and FGM coatings [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2003, 70(10): 1227-1243.

- [15] 宋宏文, 刘继光. 纳米涂层的应用及进展[J]. 机械, 2002, 29(4): 69-71. (Song H W, Liu J G. Application of nano coating and study of equipment[J]. Machinery, 2002, 29(4): 69-71. (in Chinese))
- [16] Herve E, Zaoui A. Elastic behaviour of multiply coated fibre-reinforced composites [J]. International Journal of Engineering Science, 1995, 33 (10): 1419-1433.
- [17] Kot M. Contact mechanics of coating-substrate systems: Monolayer and multilayer coatings [J]. Archives of Civil and Mechanical Engineering, 2012, 12 (4): 464-470.
- [18] Wang Y F, Li Z X, Wang H N, Du J H, Zhang C W. Effect of Multilayered Structure on Properties of Ti/TiN Coating[J]. Rare Metal Materials & Engineering, 2017, 46(5): 1219-1224.
- [19] 戴兰宏, 黄筑平, 王仁. N-层涂层夹杂体复合材料有效模量显示表达[J]. 高分子材料科学与工程, 2000, 16(3): 17-19. (Dai L H, Huang Z P, Wang R. Explicit expression of the effective moduli of N-Layered inclusion based composites [J]. Polymer Materials Science & Engineering, 2000, 16(3): 17-19. (in Chinese))
- [20] Mogilevskaya S G, Crouch S L, Stolarski H K. Multiple interacting circular nano-inhomogeneities with surface/interface effects[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2008, 56(6): 2298-2327.
- [21] Duan H L, Wang J, Huang Z P, Karihaloo B L. Size-dependent effective elastic constants of solids containing nano-inhomogeneities with interface stress [J]. Journal of the Mechanics & Physics of Solids, 2005, 53(7): 1574-1596.
- [22] Li P, Wang Q, Shi S. Differential scheme for the effective elastic properties of nano-particle composites with interface effect[J]. Computational Materials Science, 2011, 50(11): 3230-3237.
- [23] Wang H W, Zhou H W, Peng R D. Nanoreinforced polymer composites: 3D FEM modeling with effective interface concept[J]. Composites Science and Technology, 2011, 71(7): 980-988.
- [24] Chen T. Exact size-dependent connections between effective moduli of fibrous piezoelectric nanocomposites with interface effects[J]. Acta Mechanica, 2008, 196(3-4): 205-217.
- [25] Luo J, Wang X. On the anti-plane shear of an elliptic nano inhomogeneity[J]. European Journal of Mechanics / A Solids, 2009, 28(5): 926-934.
- [26] Lu X Y, Li H, Wang B A. Theoretical analysis of electric, magnetic and magnetoelectric properties of nano-structured multiferroic composites[J]. Journal of the Mechanics & Physics of Solids, 2011, 59(10): 1966-1977.
- [27] 肖俊华, 徐耀玲. 纳米夹杂复合材料的有效反平面剪切模量研究[J]. 固体力学学报, 2011, 32(3): 287-292. (Xiao J H, Xu Y L. Study on the effective anti-plane shear modulus of nano inhomogeneity composite materials[J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2011, 32(3): 287-292. (in Chinese))
- [28] Roy S. Functionally graded coatings on biomaterials: A critical review [J]. Materials Today Chemistry, 2020, 18: 100375.
- [29] Fath R, Wei H, Sale B, Radhika N, Jian JH, Ma AB, Ahmed MH, Li Q, Ostrikov KK. Past and present of functionally graded coatings: Advancements and future challenges [J]. Applied Materials Today, 2022, 26: 101373.
- [30] Sathish M, Radhik N, Saleh B. A critical review on functionally graded coatings: Methods, properties, and challenges [J]. Composites Part B: Engineering, 2021, 225: 109278.
- [31] Latka L, Pawlowski L, Winnick M, Sokolowski P, Malachowska A, Kozerski S. Review of functionally graded thermal sprayed coatings [J]. Applied Sciences, 2020, 10: 5153.
- [32] Muller P, Saul A. Elastic effects on surface physics [J]. Surface Science Reports, 2004, 54(5): 157-258.
- [33] Kulkarni A J, Zhou M, Ke F J. Orientation and size dependence of the elastic properties of zinc oxide nanobelts [J]. Nanotechnology, 2005, 16 (12): 2749-2756.
- [34] Wang R J, Wang C Y, Feng Y T, et al. Mechanical responses of a-axis GaN nanowires under axial loads [J]. Nanotechnology, 2018, 29(9): 095707.
- [35] Sergeeva E. Dependence of the elastic properties of a single-walled carbon nanotube on its chirality [J]. Solid State Phenomena, 2018, 284: 20-24.

- [36] Zakhari M E A, Anderson P D, Hutter M. Effect of particle-size dynamics on properties of dense spongy-particle systems: Approach towards equilibrium[J]. *Physical Review E*, 2017, 96(1): 012604.
- [37] Kocak B, Ciftci Y O. The effect of pressure on structural, electronic, elastic, vibration and optical properties of ScXSb (X=Ni, Pd, Pt) compounds[J]. *Computational Condensed Matter*, 2018, 14: 176-185.
- [38] Gurtin M E, Murdoch A I. Addenda to our paper A continuum theory of elastic material surfaces[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1975, 59(4): 389-390.
- [39] Morton, E, Gurtin, and, A, Ian, et al. Surface stress in solids[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1978, 14(6): 431-440.
- [40] Gurtin M E, Weissmuller J, Larche F. A general theory of curved deformable interface in solids at equilibrium[J]. *Philosophical Magazine A*, 1998, 78(5): 1093-1109.
- [41] Xiao J H, Xu Y L. Micromechanics prediction of the effective elastic property of composites reinforced with cylindrically orthotropic nano fiber under antiplane shear[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2022, 92(8): 2237-2246.
- [42] Yan P, Jiang C P, Song F, Xu X H. Estimation of transverse thermal conductivity of doubly-periodic fiber reinforced composites [J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2010, 23: 54-60.
- [43] Xiao J H, Xu B X, Xu Y L, Zhang F C. The generalized self-consistent micromechanics prediction of the magneto-electroelastic properties of multi-coated nanocomposites with surface effect[J]. *Smart Materials and Structures*, 2019, 28(5): 055004.
- [44] 徐耀玲, 肖俊华, 沈艳芝. 增强相周期分布的多涂层纤维复合材料反平面问题的解析方法[J]. *工程力学*, 2010, 27(11): 196-203. (Xu Y L, Xiao J H, Shen Y Z. An analytical method for multiply coated fiber composites with periodic reinforcement phase under antiplane shear[J]. *Engineering Mechanics*, 2010, 27(11): 196-203. (in Chinese))

Effective Longitudinal Shear Property of Periodic Multi-coated Nanofiber Composites Based on Eigenfunction Expansion-Variational Method

Junhua Xiao^{1,2} Xin Zheng^{1,2} Yuyan Xin³

(¹Department of Engineering Mechanics, Yanshan University, Qinhuangdao, 066004)

(²Hebei Key Laboratory of Mechanical Reliability for Heavy Equipments and Large Structures, Yanshan University, Qinhuangdao, 066004)

(³Department of Engineering Mechanics, Hohai University, Nanjing, 211100)

Abstract Composite materials exhibit diverse microstructure distributions, with periodic microstructures being a typical pattern. Periodic structures feature repeating basic cells, representing the situation where the inclusion arrangement within a material changes from completely disordered to strictly ordered. Modern composite material design, especially computer-aided material design, usually refers to the design of periodically distributed cells. Multi-coating refers to a new type of coating in which the geometric parameters are proportional on the thickness coordinate. Multi-coating can achieve gradient changes in material parameters, allowing for gradient changes in the mechanical properties of the coating and thereby enabling the design and control of material properties such as strength, toughness, and stiffness. Nanocomposites possess unique mechanical properties. When the structural size of the reinforcing phase reaches the nanoscale, the surface effect cannot be ignored. The macroscopic mechanical properties of nanocomposites are different from those of traditional composites. In this work, based on the unit cell method of micromechanics and the Gurtin-Murdoch theory of surface elasticity, the elastic field and effective property of periodic coated-fiber nanocomposites subjected to longitudinal shear loads are studied. The analytical solution for the longitudinal shear effective modulus of periodic nanocoated composites is obtained using the unit cell functional variational method and the eigenfunction expansion method. The consistency between the obtained solution and the existing results indicates the validity of the proposed method. The macroscopic effective property of periodic nanocomposites can be controlled by changing the microstructure parameters of the multi-coating. The effects of coating mechanical properties, coating geometric parameters, surface properties and fiber volume fraction on the effective properties of the composite are discussed. The analytical method proposed in this paper and the obtained results provide a theoretical basis for the design of periodic nanocoated fiber composites and the regulation of their mechanical properties.

Key words periodic nanocomposites, surface effect, multi-coated fiber, eigenfunction expansion method, variational method