

SH 波入射直角域中含椭圆孔的动力分析*

赵元博** 程玉朕 韩 坤

(东北石油大学机械工程与科学学院, 大庆, 163318)

摘 要 针对直角域中的缺陷, 本文理论研究了直角域下的椭圆孔边的集中应力的变化情况. 本文先采用累次镜像法将直角域空间转换成全空间, 利用极坐标变换法, 推导出镜像后的椭圆孔在原始复平面坐标系中的表达式, 其次利用与复变函数相结合的 Hankel 波函数推导出了应力表达式, 再利用椭圆孔方程, 建立椭圆边一点的辐角与该点的垂线和坐标轴之间夹角的联系, 避免了传统“保角变换”法的使用, 并根据椭圆孔边的自由应力边界条件, 建立无穷线性代数方程, 最后截取有限项求解未知系数. 通过对椭圆孔孔心距离上和右边界的距离、入射角度、椭圆孔偏转角以及入射波波数的分析, 得到: 入射波数越大, 动应力集中系数波动的频率越大; 在低频入射时, 随着距离右边界的距离越大, 动应力集中系数先减小后趋于稳定, 距离稳定值为 5. 本次研究为直角域中椭圆形缺陷边的动应力因子提供了数值结论, 为实际工程中的直角板的缺陷检测提供了详细的理论结果.

关键词 直角域, 累次镜像法, 椭圆孔方程, 动应力集中系数

DOI: 10.19636/j.cnki.cjasm42-1250/o3.2025.008

0 引言

研究包含椭圆孔的直角域在入射 SH 波下的动力分析, 在工程实践和应用方面具有重要的意义. 对于弹性波的散射问题, 从土木工程、地震领域、岩石力学、无损检测和海洋工程都有广泛的应用^[1-4]. 从对半空间中椭圆孔或是圆形孔亦或是圆柱孔对 SH 波散射^[5,6], 到带形域中各种孔洞对 SH 波的散射研究^[7], 弹性波的研究也是不断的在丰富和完善. 对于各种均匀介质中含孔洞、裂纹及各种夹杂问题也得到了众多学者们的研究^[8-12]. 对于直角域问题, 目前针对缺陷和裂纹的研究比较多^[13,14], 对于非圆形孔前人采用“保角变换法”解决边界的问题^[15,16], 本文采用一种新型方法对直角域单个椭圆孔对 SH 波散射问题进行研究.

本文使用复变函数法建立椭圆孔的复平面坐标系, 然后使用极坐标变换法将镜像后的椭圆孔变换到原始椭圆孔的复平面当中, 再使用波函数展开法

建立椭圆孔波场和应力的表达式, 通过建立椭圆孔边的任意一点的辐角与该点和坐标轴之间的夹角的关系, 避免保角变换的使用, 通过应力自由边界条件, 求解方程中的未知数, 最后求得孔边的动应力集中系数(DSCF).

1 理论分析

1.1 模型的建立

如图 1 所示, 直角域中含单个椭圆孔在入射 SH 波下的示意图. 图中所示, d 表示椭圆孔距离直角域右边界的距离; h 表示椭圆孔距离直角域上边界的距离; 对于直角域中单个椭圆孔的孔心标号为 O_1 ; 入射波(SH 波)的入射角度为 α . 对于直角域问题, 本文采用镜像的方法, 先向上镜像一次, 在将原始椭圆孔和第一次镜像后的椭圆孔向右镜像, 将直角域镜像为全空间问题, 使问题得到简化. 将椭圆孔编号为第 1 号椭圆孔, 镜像后分别得到第 2、3、4 号椭圆孔.

* 东北石油大学人才引进科研启动费资助项目(1305021867)和东北石油大学青年科学基金(15071120532)资助.

2025-04-08 收到修改稿, 2025-04-17 网络首发.

** 通讯作者. E-mail: ZYB201507@126.com.

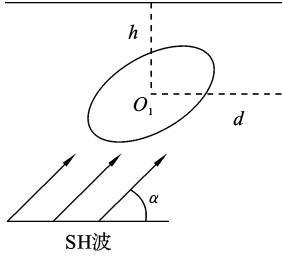


图 1 直角域椭圆孔示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the elliptical hole in the right-angle domain

如图 2 所示,采用镜像法解决直角域问题,将第 1 号椭圆孔先向上镜像一次,得到第 2 号椭圆孔,将镜像后的椭圆孔的孔心编号为 O_2 ;再对第 1、2 号椭圆孔向右镜像一次,得到第 3、4 号椭圆孔,孔心编号分别为 O_3 、 O_4 ;椭圆孔的偏转角之间的关系为 $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$,镜像后得到全空间中椭圆孔的位置情况,边界通过镜像法消除。

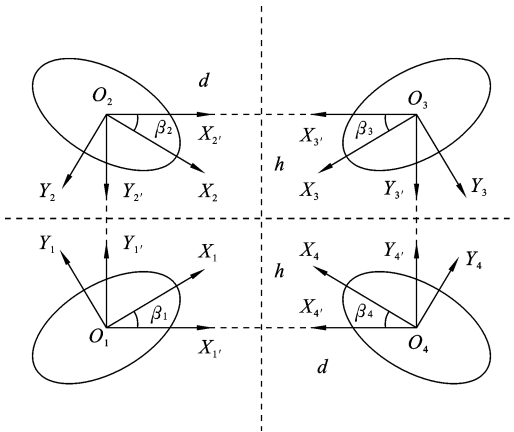


图 2 全空间椭圆孔的局部坐标系示意图

Fig. 2 Schematic diagram of the local coordinate system of the elliptical hole in full space

对原始直角域空间的椭圆空间建立局部的坐标系.以椭圆孔的长轴为 X_1 轴,以椭圆孔的短轴为 Y_1 轴,建立局部坐标系 $X_1-O_1-Y_1$,并引入相对应的复平面 (Z_1, \bar{Z}_1) ,再以水平轴为 $X_{1'}$ 轴,竖直方向轴为 $Y_{1'}$ 轴,建立局部坐标系 $X_{1'}-O_{1'}-Y_{1'}$,并引入相对应的复平面 $(Z_{1'}, \bar{Z}_{1'})$,其中复平面 (Z_1, \bar{Z}_1) 与复平面 $(Z_{1'}, \bar{Z}_{1'})$ 之间的关系为:

$$\begin{cases} Z_1 = Z_{1'} e^{-i\beta_1} \\ Z_{1'} = Z_1 e^{i\beta_1} \end{cases} \quad (1)$$

同理,对向上镜像后的椭圆孔建立局部坐标系 $X_2-O_2-Y_2$ 和 $X_{2'}-O_{2'}-Y_{2'}$,相对应的复平面为 (Z_2, \bar{Z}_2) 和 $(Z_{2'}, \bar{Z}_{2'})$,得:

$$\begin{cases} Z_2 = Z_{2'} e^{i\beta_1} \\ Z_{2'} = Z_2 e^{-i\beta_1} \end{cases} \quad (2)$$

再将原始椭圆孔和第 2 号椭圆孔向右镜像,得到两个椭圆孔,建立其局部坐标系 $X_3-O_3-Y_3$ 、 $X_4-O_4-Y_4$ 和局部坐标系 $X_{3'}-O_{3'}-Y_{3'}$ 、 $X_{4'}-O_{4'}-Y_{4'}$,并引入相对应的复平面 (Z_3, \bar{Z}_3) 、 (Z_4, \bar{Z}_4) 和复平面 $(Z_{3'}, \bar{Z}_{3'})$ 、 $(Z_{4'}, \bar{Z}_{4'})$.因为是镜像得到的第 2、3、4 号椭圆孔,则令 $\beta = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$,得到:

$$\begin{cases} Z_3 = Z_{3'} e^{-i\beta} \\ Z_4 = Z_{4'} e^{i\beta} \end{cases} \quad (3)$$

将第 2 号椭圆孔极坐标 (Z_2, \bar{Z}_2) 通过极坐标平移法将其转换到第 1 号椭圆孔的极坐标 (Z_1, \bar{Z}_1) 中,得:

$$Z_2 = (\bar{Z}_1 e^{-i\beta} + 2hi) e^{-i\beta} \quad (4)$$

同理,对于第 3 号椭圆孔,其复平面 (Z_3, \bar{Z}_3) 与复平面 (Z_1, \bar{Z}_1) 之间的关系为:

$$Z_3 = -(Z_1 e^{i\beta} - Z^1) e^{-i\beta} \quad (5)$$

其中: $Z^1 = 2d + 2hi$.

同理,对于第 4 号椭圆孔, (Z_4, \bar{Z}_4) 与复平面 (Z_1, \bar{Z}_1) 之间的关系为:

$$Z_4 = -(\bar{Z}_1 e^{-i\beta} - 2d) e^{-i\beta} \quad (6)$$

1.2 入射波波场及应力

对于第 1 号椭圆孔,在复平面 (Z_1, \bar{Z}_1) 内的波场 $W^{(1)}$ 为:

$$\begin{aligned} W^{(1)}(Z_1, \bar{Z}_1) &= W_0 \exp \left[\frac{ik}{2} (Z_1 e^{i\beta} e^{-i\alpha_0} + \bar{Z}_1 e^{-i\beta_1} e^{i\alpha_0}) \right] \\ &= W_0 \exp [ik \operatorname{Re} (Z_1 e^{i\beta_1} e^{-i\alpha_0})] \end{aligned}$$

其中: (I) 表示为入射波; (Z_1, \bar{Z}_1) 表示波场所在的复平面。

对于第 2 号椭圆孔,复平面 $(Z_{2'}, \bar{Z}_{2'})$ 与复平面 (Z_1, \bar{Z}_1) 之间的关系为:

$$Z_{2'} = \bar{Z}_1 e^{-i\beta} + 2hi \quad (7)$$

则在复平面 (Z_1, \bar{Z}_1) 内的波场为:

$$W^{(1)}(Z_1, \bar{Z}_1) = W_0 \exp \left\{ \frac{ik}{2} [(\bar{Z}_1 e^{-i\beta} + 2ih) e^{-i\alpha_0} \right.$$

$$+ (Z_1 e^{i\beta} - 2hi) e^{i\alpha_0} \Big\} =$$

$$W_0 \exp[ik \operatorname{Re}(Z_1 e^{i\beta} - 2hi) e^{i\alpha_0}]$$

对于第 3 号椭圆孔,复平面 (Z_3', \bar{Z}_3') 与复平面 (Z_1, \bar{Z}_1) 之间的关系为:

$$Z_3' = -Z_1 e^{i\beta} + Z^1 \quad (8)$$

则在复平面 (Z_1, \bar{Z}_1) 内的波场为:

$$W^{(1)}(Z_1, \bar{Z}_1) = W_0 \exp \left\{ \frac{ik}{2} [(-Z_1 e^{i\beta} + Z^1) e^{-i\alpha_0} + (-\bar{Z}_1 e^{-i\beta} + \bar{Z}^1) e^{i\alpha_0}] \right\} = W_0 \exp[ik \operatorname{Re}(-Z_1 e^{i\beta} + Z^1) e^{-i\alpha_0}]$$

对于第 4 号椭圆孔,复平面 (Z_4', \bar{Z}_4') 与复平面 (Z_1, \bar{Z}_1) 之间的关系为:

$$Z_4' = -\bar{Z}_1 e^{-i\beta} + 2d \quad (9)$$

在复平面 (Z_1, \bar{Z}_1) 内的波场为:

$$W^{(1)}(Z_1, \bar{Z}_1) = W_0 \exp \left\{ \frac{ik}{2} [(-\bar{Z}_1 e^{-i\beta} + 2d) e^{-i\alpha_0} + (-Z_1 e^{i\beta} + 2d) e^{i\alpha_0}] \right\} = W_0 \exp[ik \operatorname{Re}(-Z_1 e^{i\beta} + 2d) e^{i\alpha_0}]$$

入射波的径向应力和切向应力:

对于第 1 号椭圆孔,应力为:

$$\tau_{Z_\varphi}^{(1)}(Z_1, Z_1) = ikGW_0 \exp[ik \operatorname{Re}(Z_1 e^{i\beta} e^{-i\alpha_0})] \cdot \operatorname{Re}(e^{i\beta} e^{-i\alpha_0} e^{i\varphi})$$

$$\tau_{Z_\varphi}^{(1)}(Z_1, Z_1) = -ikGW_0 \exp[ik \operatorname{Re}(Z_1 e^{i\beta} e^{-i\alpha_0})] \cdot \operatorname{Im}(e^{i\beta} e^{-i\alpha_0} e^{i\varphi})$$

对于第 2 号椭圆孔,应力为:

$$\tau_{Z_\varphi}^{(1)}(Z_1, Z_1) = ikGW_0 \exp[ik \operatorname{Re}(Z_1 e^{i\beta} - 2hi) e^{i\alpha_0}] \cdot \operatorname{Re}(e^{i\beta} e^{i\alpha_0} e^{i\varphi})$$

$$\tau_{Z_\varphi}^{(1)}(Z_1, Z_1) = -ikGW_0 \exp[ik \operatorname{Re}(Z_1 e^{i\beta} - 2hi) e^{i\alpha_0}] \cdot \operatorname{Im}(e^{i\beta} e^{i\alpha_0} e^{i\varphi})$$

对于第 3 号椭圆孔,应力为:

$$\tau_{Z_\varphi}^{(1)}(Z_1, Z_1) = ikGW_0 \exp[ik \operatorname{Re}(-Z_1 e^{i\beta} + Z^1) e^{-i\alpha_0}] \cdot \operatorname{Re}(e^{i\beta} e^{-i\alpha_0} e^{i\varphi})$$

$$\tau_{Z_\varphi}^{(1)}(Z_1, Z_1) = -ikGW_0 \exp[ik \operatorname{Re}(-Z_1 e^{i\beta} + Z^1) e^{-i\alpha_0}] \cdot \operatorname{Im}(e^{i\beta} e^{-i\alpha_0} e^{i\varphi})$$

对于第 4 号椭圆孔,应力为:

$$\tau_{Z_\varphi}^{(1)}(Z_1, Z_1) = ikGW_0 \exp[ik \operatorname{Re}(-Z_1 e^{i\beta} + 2d) e^{i\alpha_0}] \cdot \operatorname{Re}(e^{i\beta} e^{i\alpha_0} e^{i\varphi})$$

$$\tau_{Z_\varphi}^{(1)}(Z_1, Z_1) = -ikGW_0 \exp[ik \operatorname{Re}(-Z_1 e^{i\beta} + 2d) e^{i\alpha_0}] \cdot \operatorname{Im}(e^{i\beta} e^{i\alpha_0} e^{i\varphi})$$

其中: $\tau_{Z_\varphi}^{(1)}$ 表示入射波的径向应力; $\tau_{Z_\varphi}^{(1)}$ 表示入射波的切向应力; (Z_1, Z_1) 表示应力发生所在的平面; k 为无量纲波数; W_0 为入射波幅值。

1.3 散射波波场及应力

对于第 1 号椭圆孔,在复平面 (Z_1, \bar{Z}_1) 内的波场为:

$$W^{(s)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n H_n \left[k |Z_1| \left(\frac{Z_1}{|Z_1|} \right)^n \right]$$

对于第 2 号椭圆孔,在复平面 (Z_1, \bar{Z}_1) 内的波场为:

$$W^{(s)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n H_n \left\{ [k |Z_1 e^{i\beta} - 2hi|] \left[\frac{(Z_1 e^{i\beta} - 2hi)}{|Z_1 e^{i\beta} - 2hi|} \right]^{-n} e^{-in\beta} \right\}$$

对于第 3 号椭圆孔,在复平面 (Z_1, \bar{Z}_1) 内的波场为:

$$W^{(s)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n H_n \left\{ [k |-(Z_1 e^{i\beta} - Z^1)|] \left[\frac{-(Z_1 e^{i\beta} - Z^1)}{|-(Z_1 e^{i\beta} - Z^1)|} \right]^n e^{-in\beta} \right\}$$

对于第 4 号椭圆孔,在复平面 (Z_1, \bar{Z}_1) 内的波场为:

$$W^{(s)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n H_n \left\{ [k |-(Z_1 e^{i\beta} - 2d)|] \left[\frac{-(Z_1 e^{i\beta} - 2d)}{|-(Z_1 e^{i\beta} - 2d)|} \right]^n e^{-in\beta} \right\}$$

其中: $W^{(s)}$ 表示的是椭圆孔的散射波波场。

散射波径向应力和切向应力:

对于第 1 号椭圆孔,应力为:

$$\tau_{1,Z_\varphi}^{(s)}(Z_1, Z_1) = \frac{kG}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n \left[H_{n-1}(k|Z_1|) \left(\frac{Z_1}{|Z_1|} \right)^{n-1} e^{i\varphi} - H_{n+1}(k|Z_1|) \left(\frac{Z_1}{|Z_1|} \right)^{n+1} e^{-i\varphi} \right]$$

$$\tau_{1,Z_\varphi}^{(s)}(Z_1, Z_1) = \frac{ikG}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n \left[H_{n-1}(k|Z_1|) \left(\frac{Z_1}{|Z_1|} \right)^{n-1} e^{i\varphi} + H_{n+1}(k|Z_1|) \left(\frac{Z_1}{|Z_1|} \right)^{n+1} e^{-i\varphi} \right]$$

对于第 2 号椭圆孔,应力为:

$$\tau_{2,Z\varphi}^{(s)}(Z_1, Z_1) = \frac{kG}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n \left[H_{n-1}(k | Z_1 e^{i\beta} - 2hi |) \cdot \left(\frac{Z_1 e^{i\beta} - 2hi}{|Z_1 e^{i\beta} - 2hi|} \right)^{-n+1} e^{i\beta} e^{-i\varphi} e^{-in\beta} - H_{n+1}(k | Z_1 e^{i\beta} - 2hi |) \left(\frac{Z_1 e^{i\beta} - 2hi}{|Z_1 e^{i\beta} - 2hi|} \right)^{-n-1} e^{i\beta} e^{i\varphi} e^{-in\beta} \right]$$

$$\tau_{2,Z\varphi}^{(s)}(Z_1, Z_1) = -\frac{ikG}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n \left[H_{n-1}(k | Z_1 e^{i\beta} - 2hi |) \cdot \left(\frac{Z_1 e^{i\beta} - 2hi}{|Z_1 e^{i\beta} - 2hi|} \right)^{-n+1} e^{-i\beta} e^{-in\beta} e^{-i\varphi} + H_{n+1}(k | Z_1 e^{i\beta} - 2hi |) \left(\frac{Z_1 e^{i\beta} - 2hi}{|Z_1 e^{i\beta} - 2hi|} \right)^{-n-1} e^{i\beta} e^{in\beta} e^{-i\varphi} \right]$$

对于第 3 号椭圆孔, 应力为:

$$\tau_{3,Z\varphi}^{(s)}(Z_1, Z_1) = \frac{kG}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n \left[H_{n-1}(k | -(Z_1 e^{i\beta} - Z^1) |) \cdot \left(\frac{-(Z_1 e^{i\beta} - Z^1)}{|-(Z_1 e^{i\beta} - Z^1)|} \right)^{n-1} - e^{-in\beta} e^{i\beta} e^{i\varphi} - H_{n+1}(k | -(Z_1 e^{i\beta} - Z^1) |) \left(\frac{-(Z_1 e^{i\beta} - Z^1)}{|-(Z_1 e^{i\beta} - Z^1)|} \right)^{n+1} - e^{-in\beta} e^{-i\beta} e^{-i\varphi} \right]$$

$$\tau_{3,Z\varphi}^{(s)}(Z_1, Z_1) = \frac{ikG}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n \left[H_{n-1}(k | -(Z_1 e^{i\beta} - Z^1) |) \cdot \left(\frac{-(Z_1 e^{i\beta} - Z^1)}{|-(Z_1 e^{i\beta} - Z^1)|} \right)^{n-1} - e^{-in\beta} e^{i\beta} e^{i\varphi} + H_{n+1}(k | -(Z_1 e^{i\beta} - Z^1) |) \left(\frac{-(Z_1 e^{i\beta} - Z^1)}{|-(Z_1 e^{i\beta} - Z^1)|} \right)^{n+1} - e^{-in\beta} e^{-i\beta} e^{-i\varphi} \right]$$

对于第 4 号椭圆孔, 应力为:

$$\tau_{4,Z\varphi}^{(s)}(Z_1, Z_1) = \frac{kG}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n \left[H_{n-1}(k | -(Z_1 e^{i\beta} - 2d) |) \cdot \left(\frac{-(Z_1 e^{i\beta} - 2d)}{|-(Z_1 e^{i\beta} - 2d)|} \right)^{-n+1} - e^{-in\beta} e^{-i\beta} e^{-i\varphi} - H_{n+1}(k | -(Z_1 e^{i\beta} - 2d) |) \left(\frac{-(Z_1 e^{i\beta} - 2d)}{|-(Z_1 e^{i\beta} - 2d)|} \right)^{-n+1} - e^{-in\beta} e^{i\beta} e^{i\varphi} \right]$$

$$\tau_{4,Z\varphi}^{(s)}(Z_1, Z_1) = -\frac{ikG}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n \left[H_{n-1}(k | -(Z_1 e^{i\beta} - 2d) |) \cdot \left(\frac{-(Z_1 e^{i\beta} - 2d)}{|-(Z_1 e^{i\beta} - 2d)|} \right)^{-n+1} - e^{-in\beta} e^{-i\beta} e^{-i\varphi} + H_{n+1}(k | -(Z_1 e^{i\beta} - 2d) |) \left(\frac{-(Z_1 e^{i\beta} - 2d)}{|-(Z_1 e^{i\beta} - 2d)|} \right)^{-n+1} - e^{-in\beta} e^{i\beta} e^{i\varphi} \right]$$

$$(Z_1 e^{i\beta} - 2d) |) \left(\frac{-(Z_1 e^{i\beta} - 2d)}{|-(Z_1 e^{i\beta} - 2d)|} \right)^{-n-1} - e^{-in\beta} e^{i\beta} e^{i\varphi} \right]$$

其中: 其中: $\tau_{Z\varphi}^{(s)}$ 表示散射波的径向应力; $\tau_{Z\varphi}^{(s)}$ 表示散射波的切向应力; (Z_1, Z_1) 表示应力发生所在的平面; k 表示无量纲波数; $H^{(1)}$ 表示第一类汉克尔函数, 阶数为一阶。

1.4 椭圆孔方程

如图 3 所示, 通过建立椭圆孔边的先任意一点的辐角与该点的垂线和坐标轴之间的夹角的关系, 避免使用保角变换, 可以直接对原始椭圆孔进行分析, 提高计算精度。

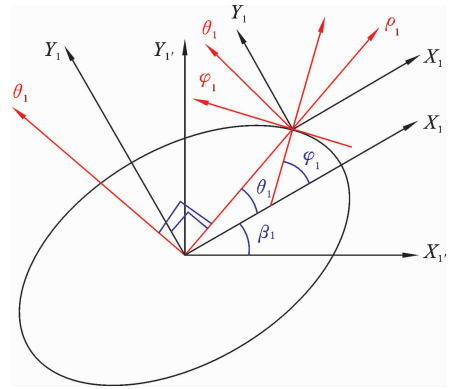


图 3 椭圆孔方程示意图

Fig. 3 Schematic diagram of the elliptical hole equation

直角域中第 1 号椭圆形孔洞, 其椭圆方程为:

$$\frac{X_1^2}{a_1^2} + \frac{Y_1^2}{b_1^2} = 1 \tag{10}$$

其中: 人为规定, X_1 轴为长轴, Y_1 轴为短轴, 则 $a_1 > b_1$.

在局部坐标系 $O_1 - X_1 - Y_1$ 中极坐标方程为:

$$\begin{cases} X_1 = \rho_1 \cos\theta_1 \\ Y_1 = \rho_1 \sin\theta_1 \end{cases} \tag{11}$$

最终建立新的辐角为:

$$\varphi_1 = \arctan \frac{a_1^2 \sin\theta_1}{b_1^2 \cos\theta_1} \tag{12}$$

1.5 连接条件

对于带形域中原始椭圆孔边的任意一点的径向应力为零, 得:

$$\tau_{1,Z\varphi}(Z_1, \bar{Z}_1) = 0 \tag{13}$$

即:

$$\begin{aligned} &\tau_{1,Z\varphi}^{(D)}(Z_1, \bar{Z}_1) + \tau_{2,Z\varphi}^{(D)}(Z_1, \bar{Z}_1) + \tau_{3,Z\varphi}^{(D)}(Z_1, \bar{Z}_1) + \\ &\tau_{4,Z\varphi}^{(D)}(Z_1, \bar{Z}_1) + \tau_{1,Z\varphi}^{(S)}(Z_1, \bar{Z}_1) + \tau_{2,Z\varphi}^{(S)}(Z_1, \bar{Z}_1) + \\ &\tau_{3,Z\varphi}^{(S)}(Z_1, \bar{Z}_1) + \tau_{4,Z\varphi}^{(S)}(Z_1, \bar{Z}_1) = 0 \end{aligned}$$

将入射波应力移到等式右边并建立新的方程为:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \zeta_{1 \times 1} \mathbf{A}_{1 \times 1} = \boldsymbol{\eta}_{1 \times 1} \quad (14)$$

即:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} [\zeta_{1,1}^n] [A_{1,1}^n] = [\eta_{1,1}^n] \quad (15)$$

其中: $\eta_{1 \times 1} = -\tau_{Z\varphi}^{(D)}(Z_1, \bar{Z}_1)$; $\zeta_{1,1} = \tau_{Z\varphi}^{(S)}(Z_1, \bar{Z}_1)$

对公式(14)两边同时乘以 $\exp(-im\theta)$, 并在 $(-\pi, \pi)$ 上积分得:

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \Phi_{1 \times 1} A_{1 \times 1} = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \Psi_{1 \times 1} \quad (16)$$

其中:

$$\Psi_{1,1}^m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \eta_{1,1} \exp(-im\theta) d\theta$$

$$\Phi_{1,1}^{n,m} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \zeta_{1,1} \exp(-im\theta) d\theta$$

1.6 动应力集中系数

对于全空间椭圆孔在复平面 (Z_1, \bar{Z}_1) 中的孔边动应力集中系数为:

$$\begin{aligned} \tau_{1,Z\varphi}^* &= |[\tau_{1,Z\varphi}^{(D)}(Z_1, \bar{Z}_1) + \tau_{2,Z\varphi}^{(D)}(Z_1, \bar{Z}_1) + \tau_{3,Z\varphi}^{(D)}(Z_1, \bar{Z}_1) + \\ &\tau_{4,Z\varphi}^{(D)}(Z_1, \bar{Z}_1) + \tau_{1,Z\varphi}^{(S)}(Z_1, \bar{Z}_1) + \tau_{2,Z\varphi}^{(S)}(Z_1, \bar{Z}_1) + \tau_{3,Z\varphi}^{(S)}(Z_1, \bar{Z}_1) + \\ &\tau_{4,Z\varphi}^{(S)}(Z_1, \bar{Z}_1)] / iGk W_0 | \end{aligned}$$

其中: $\theta_1 \in (-\pi, \pi)$; $\tau_{1,Z\varphi}^*$ 表示孔边的动应力集中系数.

2 算例分析

2.1 理论验证

如图 4 所示为了验证该方法的可行性, 将参数

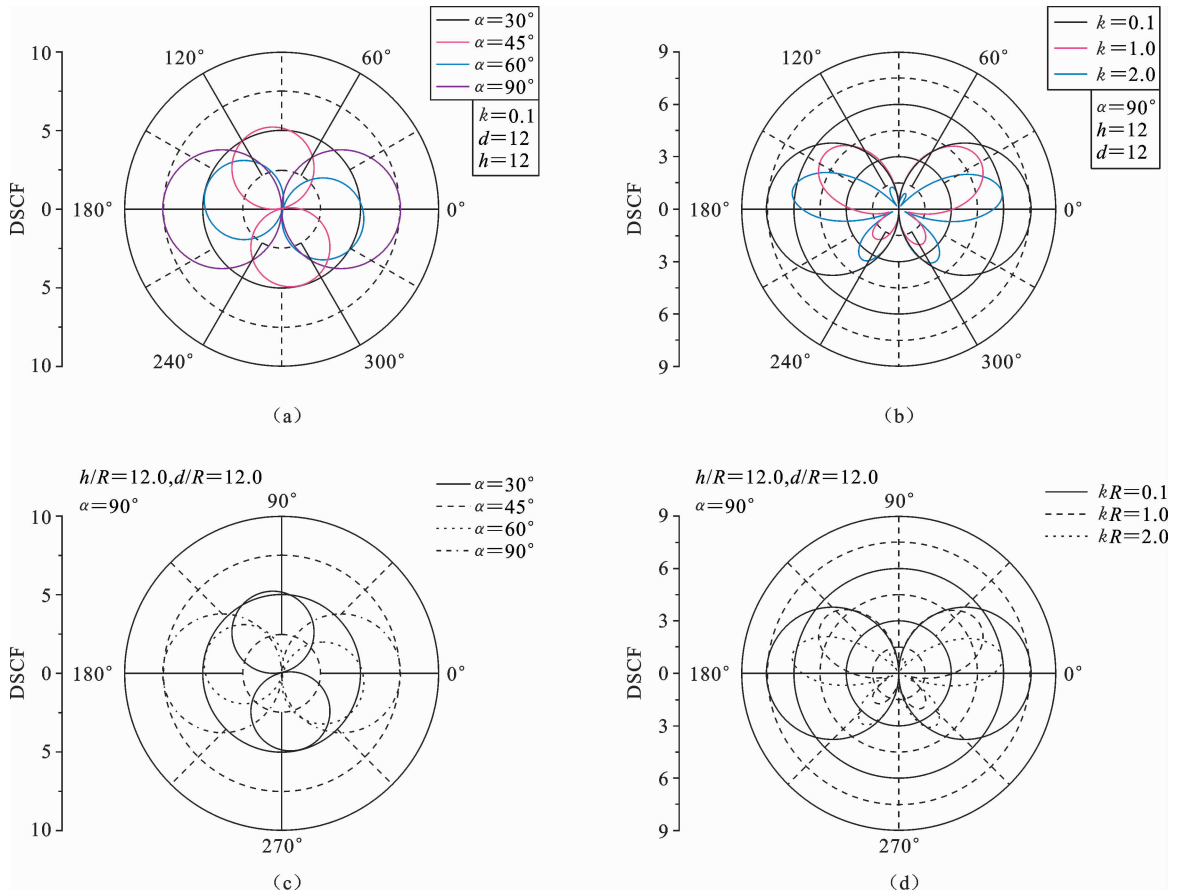


图 4 验证方法可行性示意图

Fig. 4 Schematic diagram of the feasibility of the verification method

设置成与文献[16]相同的参数, $d=12; h=12; \alpha_0=90^\circ; a=1; b=1; \beta=0^\circ$, 图 4(a)、(b)是本次研究所计算出的结论; 图(c)、(d)为文献[16]复现出的结果, 此时得到的图形与文献[16]相同, 说明该方法是可行的。

2.2 参数对 DSCF 的影响讨论

如图 5 所示, 此时的参数入射波的偏转角 $\alpha=90^\circ$; 椭圆孔的偏转角 $\beta=0^\circ$; 椭圆孔距离上平面的距离 $h=5$. 随着的椭圆孔距右平面距离变化对孔边动应力集中系数的影响. 如图 5(a)所示, 图形在 $d < 4$

左右时, 呈减小的趋势, 但是当 $d > 4$ 时, 减小的趋势变得很平缓, 图形趋于稳定. 如图 5(b)所示, 相较于(a), 此时的图形数值变化不大, 但是其没有了(a)的变化规律, 而是变得波动起来. 如图 5(c)所示, 此时图形相较于(a)、(b)来说, 变得更加不规则, 波动频率变得更大, 数值变小. 说明, 随着椭圆孔距离右平面的距离的增大, 在入射波低频入射时, 有明显的减小趋势然后变得平缓, 在入射波中高频入射时, 孔边的 MAXDSCF 变得波动起来, 没有明显的减小趋势.

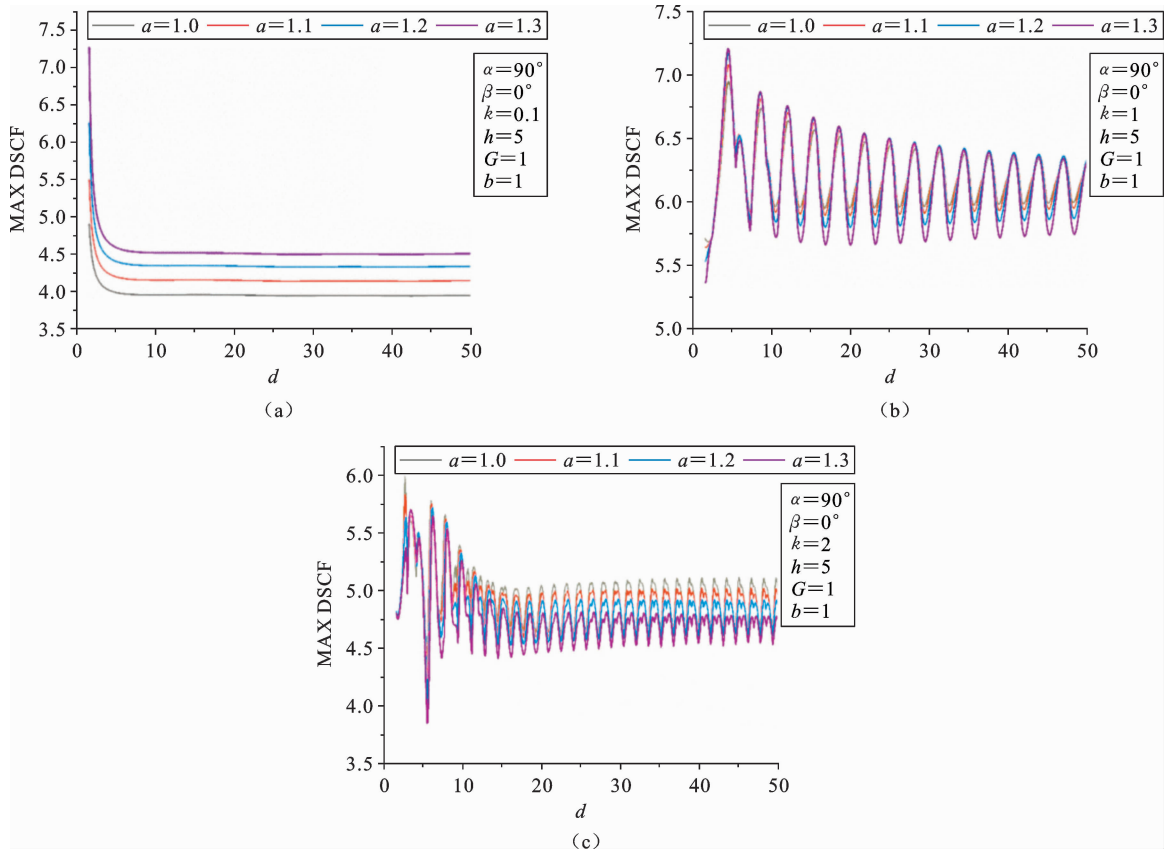


图 5 椭圆孔距右平面距离对 MAXDSCF 的影响

Fig. 5 Effect of the distance between the elliptical hole and the right plane on MAXDSCF

如图 6 所示, 此时的参数 $\alpha=90^\circ; h=5; d=5$. 随着入射波波数的不断增加, 孔边的最大动应力集中系数(MAXDSCF)的变化情况. 如图 6(a)所示, 此时的椭圆孔的偏转角 $\beta=0^\circ$, 在 $k < 1$ 时, 椭圆孔边的 MAXDSCF 波动比较大, 但是到了 $k > 1$ 时, 其变化波动减小, 且呈稳定的趋势. 如图 6(b)所示, 此时的椭圆孔的偏转角 $\beta=90^\circ$, 跟(a)有相同的变化规

律, 但是其数值在减小. 在随着入射波波数的不断增加, 椭圆孔的偏转角变大会使得孔边的 MAXDSCF 变小, 但是还用于相同的变化规律.

如图 7 所示, 此时的参数 $\alpha=90^\circ; \beta=0^\circ; d=5$. 随着椭圆孔距离上平面的距离不断增加(椭圆孔的深度). 孔边的最大动应力集中系数(MAXDSCF)的变化情况. 如图 7(a)所示, 此时入射波波数 $k=0.1$,

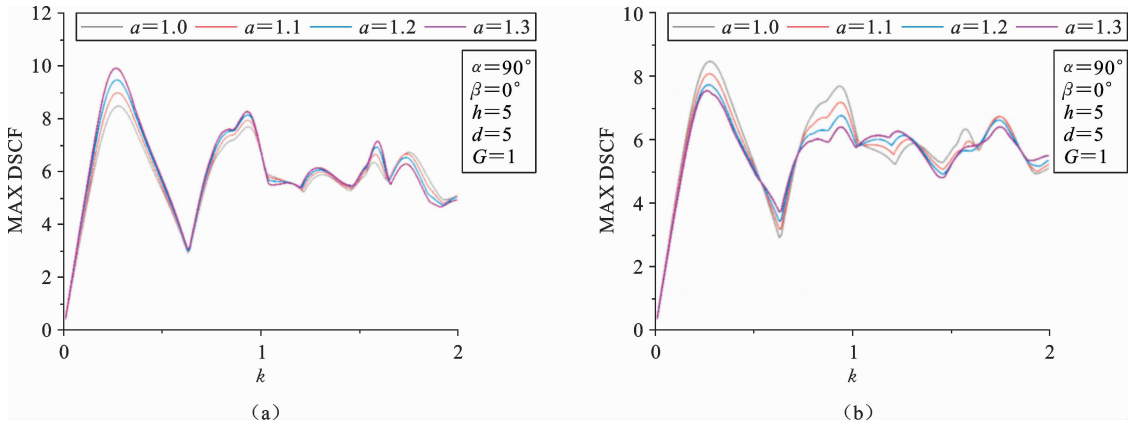


图 6 入射波波数对孔边的 MAXDSCF 的影响

Fig. 6 Effect of incident wavenumber on MAXDSCF at hole edge

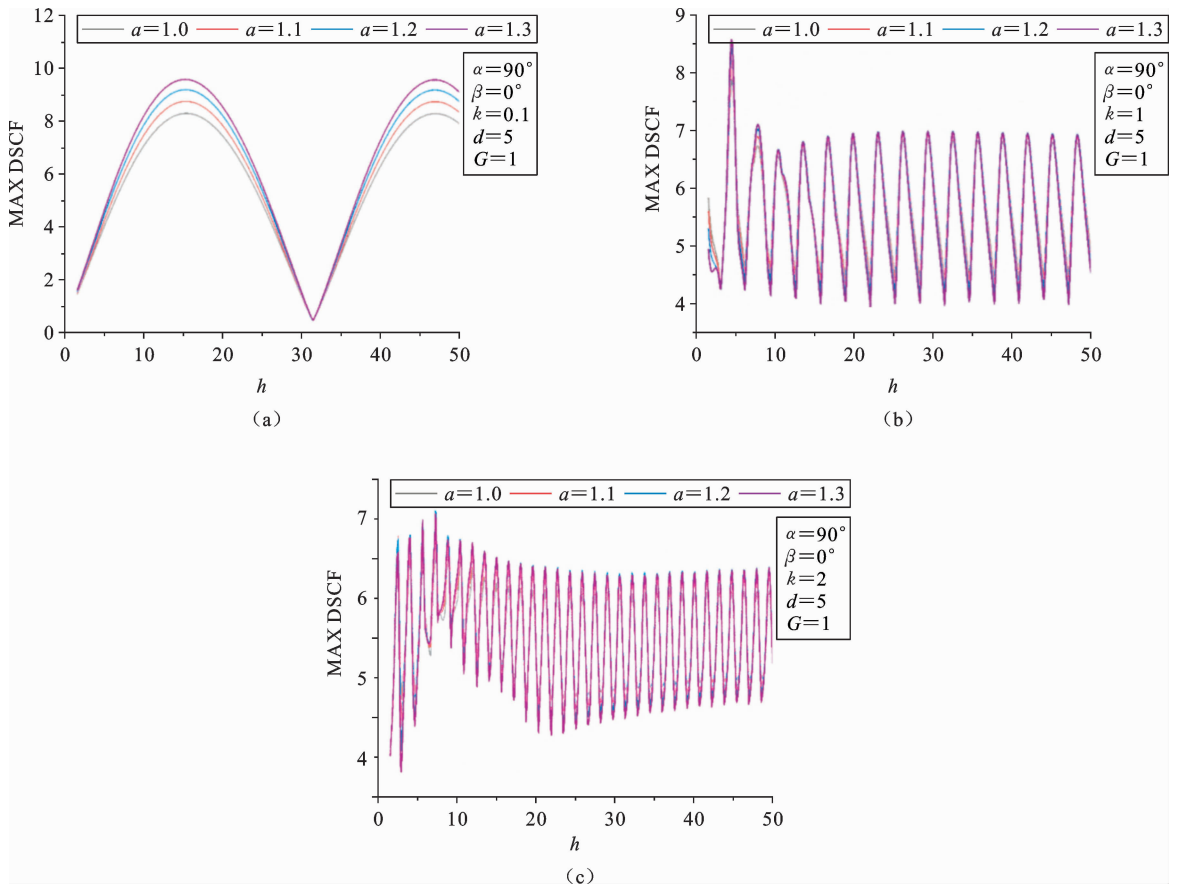


图 7 椭圆孔深度对孔边 MAXDSCF 的影响

Fig. 7 Effect of elliptical hole depth on MAXDSCF at hole edge

此图形上下波动,但是其波频较小.如图 7(b)所示,此时入射波波数 $k=1$,相较于(a)波动频率变大,其 MAXDSCF 的值在变小.如图 7(c)所示,此时入射波波数 $k=2$,相较于(a)、(b)来说,其波动的频率更大,数值进一步减小.如 7 说明,在随着椭圆孔距离

上平面的距离不断增加,其孔边的最大集中应力系数在不断变化,在入射波波数的增加,数值结果在不断的减小.

如图 8 所示,此时的参数 $\alpha=90^\circ; h=5; d=5$.椭圆孔自身的偏转角对孔边的最大集中应力系数

(MAXDSCF)的影响,在参数 $a=1$ 时,此时常州与短轴相等,椭圆孔变为圆形孔,不论自身的偏转角怎么变化,其最大动应力集中系数都是不变的.如图 8(a)所示,此时入射波波数 $k=0.1$,随着椭圆孔偏转角的不增大,图形呈对称状,在中间位置时出现最大值.如图 8(b)所示,此时入射波波数 $k=1$,此时的

图形相较于(a)来讲,变得更加复杂,其数值变大.如图 8(c)所示,此时入射波波数 $k=2$,此时的图形相较于(b)来讲,数值有变小,图形的最大值出现时的角度发生变化.椭圆孔偏转角对孔边的最大动应力集中系数的影响是没有规律的,但是在 $k=1$ 时数值最大.

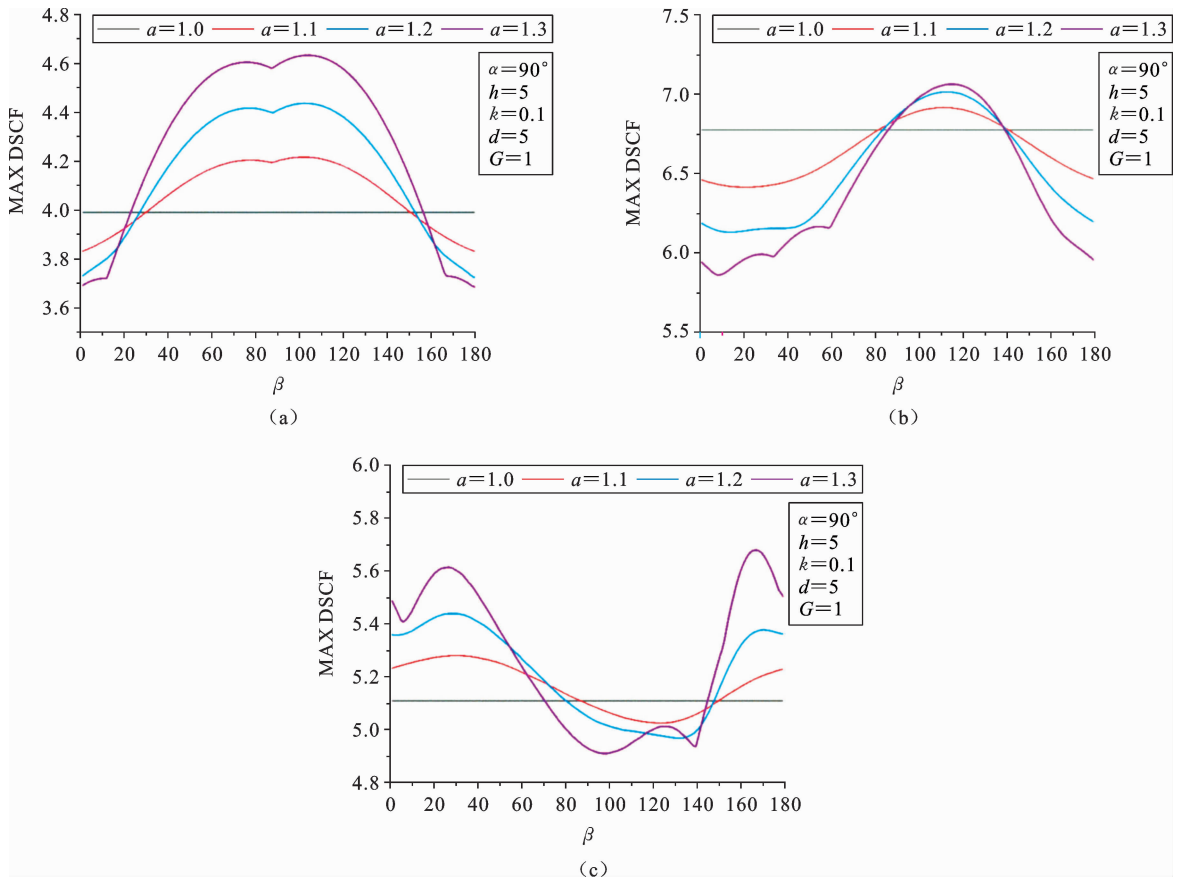


图 8 椭圆孔的偏转角对孔边 MAXDSCF 的影响

Fig. 8 Effect of deflection angle of elliptical hole on MAXDSCF at hole edge

如图 9 所示,此时的参数 $\beta=0^\circ; h=5; d=5$.随着入射波波数的不断变化对孔边 MAXDSCF 的影响.如图 9(a)所示,此时入射波波数 $k=0.1$,图形关于中心对称.如图 9(b),此时入射波波数 $k=1$,相较于(a)来讲,此时图形波动频率变大,数值变大.如图 9(c)所示,此时入射波波数 $k=2$,相较于(a)、(b)来讲,波动频率变得更大,相较于(b)来说,数值变小.孔边的最大集中应力系数(MAXDSCF)在入射波角度的变化和入射波波数的改变下,变得不断波动,其数值在入射波波数 $k=1$ 时最大.

3 结论

本文采用一种新型的方法,即建立椭圆孔边任意一点的辐角与该点和坐标轴之间的夹角的关系,避免了保角变换的使用,通过验证,该方法时可行的.本文通过对直角域中椭圆孔对上平面的距离(h)、距离右平面的距离(d)、入射波波数、椭圆孔的偏转角以及入射波角度的变化对孔边最大动应力集中系数的影响进行研究,得:

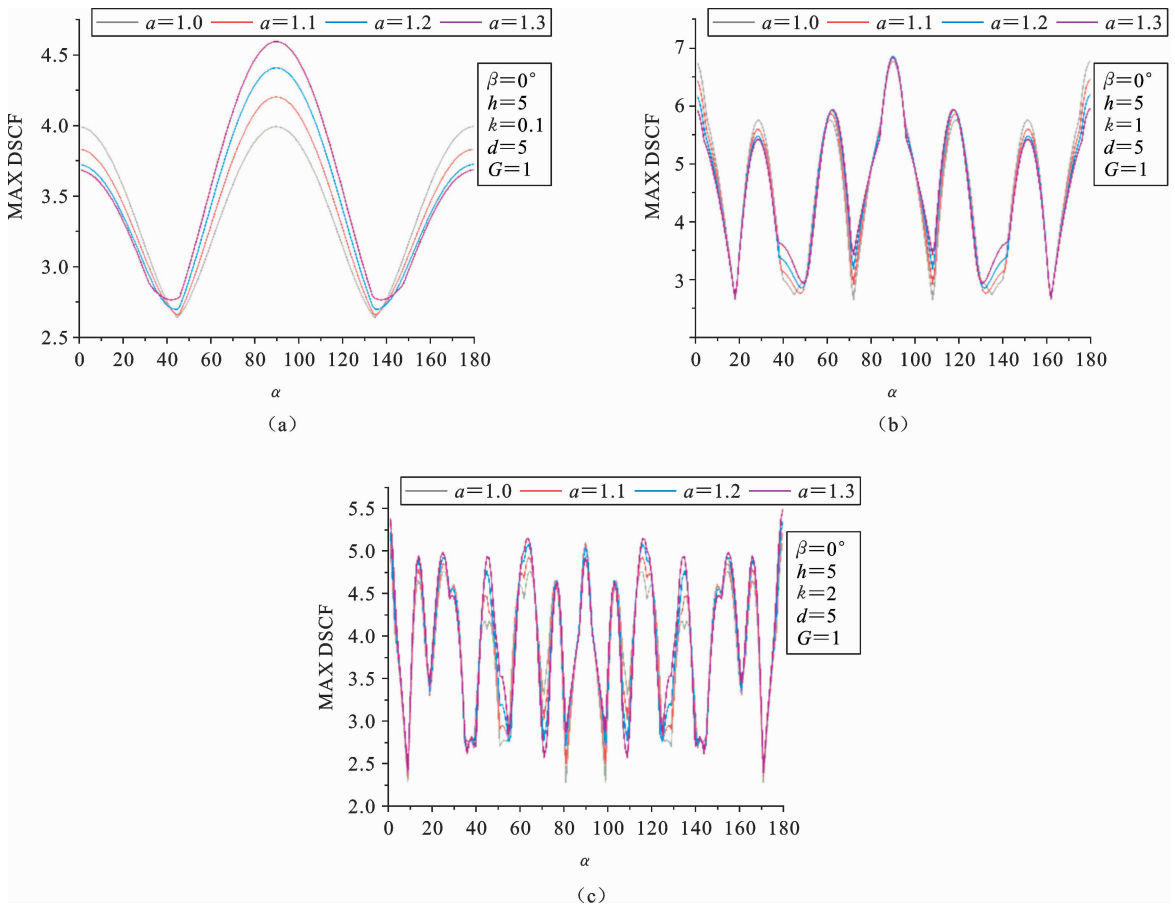


图 9 入射波的角度对 MAXDSCF 的影响

Fig. 9 Effect of the angle of the incident wave on MAXDSCF

(1) d 对动应力集中系数的影响在入射波低频入射时有明显的规律,在中高频是呈波动状,说明,在中高频时,做大动应力集中系数更加敏感,反应更加强烈。

(2) h 在不断增加时,MAXDSCF 呈波动状,但是在中高频时,波动频率明显变大,说明在中高频时 h 使孔边的 MAXDSCF 更加敏感。

(3) 入射角度的不断增加时,MAXDSCF 图形呈对称形状,且会随着入射波频率的更加而波频变大。

说明在直角域中椭圆孔对 SH 波散射问题研究上,入射波中高频入射时,对孔边的 MAXDSCF 的影响更加明显,使得孔边的 MAXDSCF 波动变大,但是其数值在某些参数中会变小。

参考文献

[1] Zhang M X, Qi H. Dynamic analysis for V-notch in a

piezomagnetic bi-material strip under SH guided wave [J]. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2024, 31(27): 9534-9549.

[2] Zhao M, Barbosa O D M J, Metrikine V A, et al. Response of an elastic half-plane with an embedded circular cavity subject to a harmonic anti-plane shear wave; A comparison of methods[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2025, 190109162-109162.

[3] Lu H, Zhang N, Pan J, et al. Dynamic interaction between an asymmetric V-shaped canyon and a nearby structure under oblique incident SH waves[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2025, 190109178-109178.

[4] 陈玉梅, 杨未. 初应力下压电半导体板中 SH 波的传播特性[J]. *固体力学学报*, 2022, 43(04): 467-476. (Chen Y M, Yang L. Propagation characteristics of SH waves in piezoelectric semiconductor plates under initial stress[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*,

- 2022, 43(04): 467-476. (in Chinese))
- [5] 刘中宪, 张征, 梁建文. 弹性半空间中含粘性滑移界面圆形衬砌洞室对平面 SH 波的散射[J]. 应用力学学报, 2019, 36(02): 379-385+508-509. (Liu Z X, Zhang Z, Liang J W. Scattering of SH waves on planar SH waves in a circular lining cavern with viscous slip interface in elastic half-space[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2019, 36(02): 379-385+508-509. (in Chinese))
- [6] 屈恩相, 齐辉, 郭晶, 等. “分区”与“契合”思想求解半空间含凸起地形对 SH 波散射问题的研究进展[J]. 黑龙江工业学院学报(综合版), 2022, 22(04): 74-82. (Qu E X, Qi H, Guo J, et al. Research progress on solving SH wave scattering problem of half-space convex topography with convex topography under the idea of partition and “fit”[J]. Journal of Heilongjiang Institute of Technology(Comprehensive Edition), 2022, 22(04): 74-82. (in Chinese))
- [7] 齐辉, 杨润杰, 郭晶, 等. 弹性带形域中多个半圆柱形凹陷对 SH 波的散射[J]. 爆炸与冲击, 2020, 40(10): 29-41. (Qi H, Yang R J, Guo J, et al. Scattering of SH waves by multiple semicylindrical depressions in elastic band domain[J]. Explosion and Shock, 2020, 40(10): 29-41. (in Chinese))
- [8] 齐辉, 张根昌, 郭晶. SH 波入射半空间双相介质界面附近圆形衬砌的动力分析[J]. 固体力学学报, 2013, 34(04): 426-432. (Qi H, Zhang G H, Guo J. Dynamic analysis of circular lining near the interface of duplex medium in half-space incident with SH wave[J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2013, 34(04): 426-432. (in Chinese))
- [9] 杨杰, 齐辉. 半空间中双相介质界面一侧多个圆形弹性孔洞对 SH 波的散射[J]. 地震工程与工程振动, 2019, 39(06): 128-137. (Yang J, Qi H. Scattering of SH waves by multiple circular elastic holes on one side of duplex medium interface in half-space[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2019, 39(06): 128-137. (in Chinese))
- [10] 丁晓浩, 齐辉, 赵元博, 等. 双相介质半空间中椭圆形夹杂及直线裂纹对 SH 波的散射[J]. 地震工程与工程振动, 2016, 36(01): 148-156. (Ding X H, Qi H, Zhao Y B, et al. Scattering of SH waves by elliptical inclusions and linear cracks in duplex medium half-space[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2016, 36(01): 148-156. (in Chinese))
- [11] Hao H, Kui M, Ming D, et al. Scattering of SH wave by an elliptic hole: surface effect and dynamic stress concentration[J]. Acta Mechanica, 2023, 234(6): 2359-2371.
- [12] Li Q, Gu C, Lei D, et al. Scattering of Shear Horizontal (SH) waves by a circular hole in an infinite piezomagnetic material[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2024, 37(6): 1-12.
- [13] 丁晓浩, 齐辉, 赵元博. 含有直线裂纹的直角域中椭圆形孔洞对 SH 波的散射[J]. 岩石力学与工程学报, 2016, 35(S2): 3829-3836. (Ding X H, Qi H, Zhao Y B. Scattering of SH waves by elliptical holes in right-angle domain with rectilinear cracks[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2016, 35(S2): 3829-3836. (in Chinese))
- [14] 刘伸, 杨杰, 王林展. 直角域中角点凹陷与浅埋孔洞对 SH 波的散射[J]. 上海电机学院学报, 2023, 26(03): 147-152+158. (Liu S, Yang J, Wang L Z. Scattering of SH waves by corner depression and shallow buried hole in right-angle domain[J]. Journal of Shanghai Dianji University, 2023, 26(03): 147-152+158. (in Chinese))
- [15] 齐辉, 陈洪英, 张希萌, 等. 半空间内含有部分脱胶的椭圆夹杂及圆孔对 SH 波的散射[J]. 爆炸与冲击, 2018, 38(06): 1344-1352.
- [16] 折勇, 齐辉, 杨在林. SH 波对直角平面区域内圆形孔洞的散射与地震动[J]. 应用力学学报, 2008, (03): 392-397+538. (Zi Y, Qi H, Yang Z L. SH wave scattering and ground motion of circular holes in right-angled plane region[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2008, (03): 392-397+538. (in Chinese))

Dynamic Analysis of an Elliptical Hole in the Right-Angled Domain of SH Wave Incidence

Yuanbo Zhao Yuzhen Cheng Kun Han

(School of Mechanical Engineering and Science, Northeast Petroleum University, Daqing, 163318)

Abstract In response to the defects in the right-angled domain, this paper conducts a theoretical study on the variation of the concentrated stress at the edge of an elliptical hole in this domain. Firstly, the iterative mirror image method is employed to transform the right-angled domain space into the full space. By using the polar coordinate transformation method, the expressions of the mirrored elliptical hole in the original complex-plane coordinate system are derived. Secondly, the stress expressions are deduced by using the Hankel wave function combined with the complex variable function. Then, with the help of the elliptical hole equation, the relationship between the argument of a point on the elliptical edge and the angle between the perpendicular line of this point and the coordinate axis is established, thus avoiding the use of the traditional conformal transformation method. Based on the free-stress boundary conditions of the elliptical hole edge, an infinite system of linear algebraic equations is established. Finally, a finite number of terms are intercepted to solve the unknown coefficients. Through the analysis of the distance between the center of the elliptical hole and the upper and right boundaries, the incident angle, the deflection angle of the elliptical hole, and the incident wave number, the following conclusions are obtained: the larger the incident wave number, the higher the fluctuation frequency of the dynamic stress concentration factor; when the incident wave is at a low frequency, as the distance from the right boundary increases, the dynamic stress concentration factor first decreases and then tends to be stable, and the stable value of the distance is 5. This research provides numerical conclusions for the dynamic stress factor at the edge of elliptical defects in the right-angled domain and offers detailed theoretical results for the defect detection of right-angled plates in practical engineering.

Key words right-angled domain, iterative mirror image method, elliptical hole equation, dynamic stress concentration factor