第 46 卷 第 3 期
2025 年 6 月

固体力学学报
CHINESE JOURNAL OF SOLID MECHANICS

Vol. 46 No. 3
June 2025

分数阶广义热弹性问题研究进展*

张　凯　田晓耕**

(西安交通大学复杂服役环境重大装备结构强度与寿命全国重点实验室,航天航空学院,西安,710049)

摘　要　本文总结了近年来分数阶广义热弹性问题的研究进展,涵盖分数阶广义热弹性理论的研究进展,磁-电多场耦合效应、扩散效应、黏弹性效应等因素对分数阶广义热弹性问题响应的影响,以及生物组织中的分数阶热传导等问题.通过总结,使读者对分数阶广义热弹性问题的研究现状及发展趋势有较全面的认识,帮助研究人员进一步开展分数阶广义热弹性问题更高层次的研究.

关键词　分数阶微积分,广义热弹理论,有限元,扩散效应,电磁热弹耦合

DOI:10.19636/j.cnki.cjsm42-1250/o3.2025.002

0　引言

经典热弹性理论基于 Fourier 热传导定律,热流 q_i 与温度梯度 $\theta_{,i}$ 之间的关系为[1]:

$$q_i=-k\theta_{,i} \tag{1}$$

式中 k 为热传导系数,θ 为温度增量.结合能量守恒可得经典热弹理论温度控制方程[1](各向同性,不计内热源)为:

$$k\theta_{,ii}=\rho C\dot{\theta}-(3\lambda+2\mu)\alpha\theta_0\dot{e}_{kk} \tag{2}$$

式中,ρ 为密度,C 为比热容,λ 和 μ 为拉梅常数,α 为热膨胀系数,θ_0 为参考温度,e_{ij} 为应变.式(2)为扩散型方程,从方程形式可知,Fourier 定律所描述的热是以无限大的速度进行传播.然而,1944 年 Peshkov 在超流液态氦(1.4 K)中测得热以有限速度(1.9 m/s)传播[2],发现热的传播表现出了波动性.随着科学技术的进步,特别是超短脉冲激光的出现和制冷水平的提高,热传播的波动现象更为突出,1987 年,Brorson 等[3]在飞秒级超短脉冲强激光的打靶试验中,证实了高温下热波的存在.1990 年,Kaminski[4]在试验中发现沙子、玻璃球、$NaHCO_3$ 等非均质材料的热传导也呈现出波的性质,且非均质材料的松弛时间较长(20s-50s).1995 年,Mitra 等[5]在生物组织的热传导试验中也发现了热传导的波动性质.这些发现表明,Fourier 定律在某些条件,如极低温度、极大热流等极端条件下不能准确描述热传导.为克服 Fourier 定律的局限性,准确描述热传播的波动性,Cattaneo[6]和 Vernotte[7]在 Fourier 定律中引入了一个松弛时间因子 τ_0 用以描述热流变化率对热传导的影响,修正后的热传导方程为:

$$q_i+\tau_0\dot{q}_i=-k\theta_{,i} \tag{3}$$

其温度控制方程为:

$$k\theta_{,ii}=\rho C(\dot{\theta}+\tau_0\ddot{\theta}) \tag{4}$$

该式为双曲型方程,描述热在介质中以有限的速度进行传播.式(3)被称为 Cattaneo-Vernotte(C-V)方程,为区别于 Fourier 热传导,热以有限的速度进行传播的现象被称为非 Fourier 热传导或广义热传导.

随着人们对非 Fourier 热传导关注度的提高,描述热以有限速度传播的热力耦合理论相继出现.Lord 与 Shulman[8]基于 C-V 热传导定律,针对各向同性物体提出了具有一个松弛时间的广义热弹性理论,建立了双曲传热方程.Green 和 Lindsay[9]在基于 Fourier 热传导定律,在熵的本构方程和应力-应变的本构方程中各引入一个松弛时间,改进了热弹性理论,建立了 Green-Lindsay(G-L)广义热弹性理

* 国家自然科学基金项目(12372209)资助.
2025-01-23 收到修改稿,　2025-02-06 网络首发.
** 通讯作者.　　E-mail:tiansu@xjtu.edu.cn.

论. Green 和 Naghdi[10, 11]通过引入与力学中机械位移概念相对应的热位移，修正了 Fourier 定律，提出了三种热传导理论，统称为 G-N 理论，其统一形式为：

$$q_i = -k\theta_{,i} + k^* v_{,i} \tag{5}$$

$$\dot{v} = \theta \tag{6}$$

式中 k^* 为 G-N 模型中的材料特征常数，v 为热位移.

为了区别于经典热弹性理论，描述热以有限速度传播的热弹性理论称之为广义热弹性理论，广义热弹性问题研究的总结性文章可参阅相关文献[12-16].

分数阶微积分(Fractional calculus)是研究任意阶实数的微分和积分理论，以及解决含有任意阶实数导数微分方程的各种求解方法. 分数阶微积分采用卷积积分定义，其中的积分项可以描述系统记忆依赖效应. 近年来，分数阶微积分成功应用于各个领域，并修改了许多现有的物理模型，如化学、生物学、建模和参数识别、电子学、波传播和黏弹性等，具体应用可以参考 Podlubny[17]的相关工作. 分数阶微积分的第一个应用由 Abel 提出，他将其用于求解一个出现在等时问题中的积分方程. 常见的分数阶微积分主要有两种，Riemann-Liouville(R-L)型与 Caputo 型，前者是一个给定函数与幂次函数的卷积的导数，后者是一个给定函数与幂次函数的局部导数的卷积. Caputo 型分数阶微积分克服了 R-L 型存在的强奇异性，通常可以用积分形式表示. Caputo 分数阶微积分的积分形式为：

$$^{C}D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-p)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(p)\,\mathrm{d}p \tag{7}$$

式中 $\Gamma(*)$ 为 Gamma 函数，m 为整数，$f^{(m)}$ 表示对函数 f 求 m 阶微分，α 为分数阶参数，$m-1<\alpha\leqslant m$. 在这些年的发展中，已有几种方法能将导数和积分的概念推广到非整数阶，并出现了一些不同的分数阶导数定义[18-20]. 例如，由于 Caputo 形式的分数阶微积分的核函数具有奇点，Caputo 与 Fabrizio[18]通过将其替换为指数函数，定义了具有光滑核的分数阶微积分(C-F 型)，其形式为：

$$^{CF}D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{1-\alpha} \int_0^t \exp\left[-\frac{\alpha(t-p)}{1-\alpha}\right] f^{(1)}(p)\,\mathrm{d}p \tag{8}$$

研究表明，物质中存在着具有记忆和路径依赖特性的反常扩散和异常热传导过程[21, 22]，但传统的广义热弹理论中的热传导方程中对时间的整数阶微分是根据局部极限定义的，无法体现记忆依赖特性，而分数阶微积分的卷积积分定义可以描述系统的记忆依赖过程. Caputo 和 Mainardi[23,24]、Caputo[25]发现用分数阶导数描述黏弹性材料与实验结果吻合良好，从而建立了分数阶导数与线性黏弹性理论的联系. 根据分数阶微积分不同的定义形式既可以表现出时间分数阶也可以表现空间分数阶，由于瞬态的热弹耦合过程和时间密切相关，许多人将时间分数阶微积分与 C-V 热传导理论相结合，建立了相关的分数阶广义热弹性理论，其统一形式为：

$$F_q q_i = -F_T k\theta_{,ii} \tag{9}$$

其中，F_q 与 F_T 根据定义不同具有不同的形式：

(a) Sherief 型[26]：$F_q = 1 + \tau^{C}D^{\alpha}$，$F_T = 1$，$0<\alpha\leqslant 1$；

(b) Ezzat 型[27-29]：$F_q = 1 + \frac{\tau^{\alpha}}{\alpha!}{}^{C}D^{\alpha}$，$F_T = 1$，$0<\alpha\leqslant 1$；

(c) Youssef 型[30]：$F_q = 1 + \tau\frac{\partial}{\partial t}$，$F_T = I^{\alpha-1}$，$0<\alpha\leqslant 2$；

其中 $I^{\alpha-1}$ 为 Riemann-Liovile(R-L)分数阶微积分，其形式为：

$$^{RL}I^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-p)^{\alpha-1} f(p)\,\mathrm{d}p \tag{10}$$

已有研究详细探讨了以上几种不同分数阶广义热弹性理论的差异和联系，并揭示了不同分数阶导数和松弛时间的影响[31]，但并没有对基于分数阶微积分和广义热弹理论而发展的诸多理论进行探讨. 因此，本文主要介绍了分数阶广义热弹性基本问题的研究进展，磁-电-热多场耦合效应、扩散效应、黏弹性效应等因素对分数阶广义热弹性响应的影响，以及生物组织的热传导问题. 同时，展望了分数阶广义热弹性问题的未来研究方向，为从事相关研究的人员提供参考.

1　广义热弹耦合问题

随着科学技术的进步,特别是超短脉冲激光的出现和制冷水平的提高,以及诸如多孔结构等复杂结构的运用,热传播的波动现象和时空微尺度效应在研究热弹耦合问题时无法被忽视.因此为了更加准确地描述与历史状态有关(或称时间非局部效应)的广义热弹耦合问题,学者们基于不同的分数阶微积分理论和广义热弹性理论发展了分数阶广义热弹理论.

Sherief 等基于 C-V 热传导理论与 Caputo 型分数阶微积分,建立了分数阶广义热弹理论,证明了该模型解的唯一性定理,导出了其变分原理和互易定理[26];基于 Laplace 积分变换研究了由具有可变导热系数的半空间问题,并与广义热弹性理论的预测结果进行了比较[32],图 1 是分数阶参数对温度场分布的影响,发现当 $\alpha=0.5$ 时,从温度解的表达式发现,温度会随着距离 x 的增加而逐渐趋于零但不会为零,因此认为此时热波的传播速度是无限的;基于 C-F 型分数阶微分算子,利用 Laplace 积分变换和 Hankel 变换得到了无限弹性空间在连续线热源作用下的解[33].基于 Sherief 建立的分数阶广义热弹理论,Kothari 等[34]利用状态空间方法和 Laplace 积分变换得到了各向同性均匀弹性介质中的热弹性相互作用问题的通解,并解决了边界分别受到三种不同热载荷作用下的热弹响应. Hussein[35]利用 Laplace 积分变换得到了半空间受到移动热源问题的解,发现弹性波的波速是有限的,并取决于分数阶参数的值.

Ezzat 等[27-29]基于分数阶泰勒展开与单相滞后热传导模型,建立了新的分数阶广义热弹理论;利用 Laplace 积分变换求解了弹性半空间问题[36],将分数阶广义热弹理论与热弹性耦合理论和广义热弹性理论的预测结果进行了比较,发现温度的分布是光滑的连续函数,分数阶参数值的变化对位移和应变的影响较小,并且分数阶理论中所考虑的任何函数的解都被限制在有界区域内,在这个区域之外,这些分布就不会发生变化.这意味着根据分数阶广义热弹性理论的解表现出有限传播速度的波动行为.基于 Ezzat 分数阶广义热弹性理论,Abbas[37]建立了具有一个松弛时间的分数阶广义热弹性控制方程,并利用特征值法得到了功能梯度材料的分数阶热弹性问题的解析解. Mashat 等[38]利用 Laplace 积分变换和 Hankel 变换研究了弹性半空间问题,得到了任意一组边界条件的通解,并利用所得通解研究了受到轴对称温度作用下无牵引力半空间的问题.

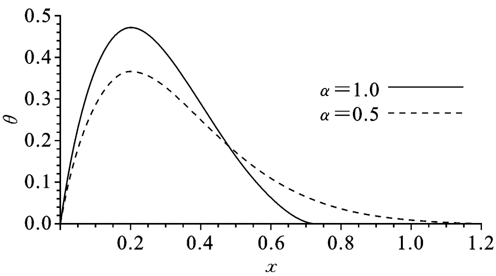

图 1　$t=0.1, k=-0.25$ 时的温度分布[32]

Fig. 1　Temperature distribution at $t=0.1$, $k=-0.25$[32]

Youssef 基于 Riemann-Liouville(R-L)分数阶积分与 C-V 热传导理论,建立了分数阶广义热弹性理论[30],基于 Laplace 积分变换研究了具有恒定参数的弹性材料填充半空间受到斜坡式加热作用下的热弹响应;并在之后的研究中给出了均质各向同性体广义热弹性模型的变分定理[39].基于 Youssef 分数阶广义热弹性理论,Abouelregal 等[40]研究了均匀各向同性弹性半空间固体表面具有 I 型裂纹时固体的旋转对其一般模型的影响问题,利用正则模态分析方法得到了位移、应力和温度的解析解. Bachher 等[41]利用 R-L 分数阶微积分,建立了含孔洞结构的平面区域在瞬时热源作用下的分数阶广义热弹性模型,利用 Laplace 积分变换与特征值逼近方法得到了无限弹性介质中各种物理量场的分布. Abbas 等[42]利用正则模态分析和特征值方法,研究了弹性多孔材料的二维半平面受到热载荷作用下的热弹响应. Wang 等[43]利用解析方法和 Laplace 积分变换方法求出了瞬态热冲击引起的热响应的渐近解,研究了具有圆柱形空腔的无限大固体内边界受到热冲击的问题,得到了热波和弹性波的传播规律以及位移、温度和应力的分布规律.发现随着分数阶参数值的减小,各种物理场开始建立的时间越早,两

次跳变间隔越短，应力峰值越大，说明分数阶参数值较小时的热传导更接近 Fourier 热导热.

Yu 与 Zhao[31] 通过研究已有的分数阶广义热弹性模型之间的联系，简化了理论框架，建立了统一的分数阶广义热弹性模型，并研究了不同分数阶导数和松弛时间对受到热冲击的双层结构的热弹响应. 图 2 为相同分数阶参数下，三种模型的温度分布，$\alpha=1$ 时相当于 C-V 热传导模型. Xue 等[44] 基于统一的分数阶热传导模型，研究了含绝缘 Griffith 裂纹的弹性半空间带材的热断裂问题；并采用权函数法研究了边缘和中心裂纹的热断裂问题[45].

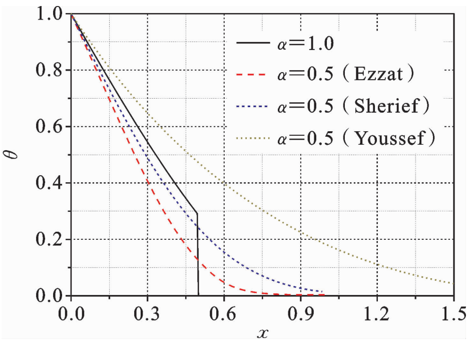

图 2　不同模型对温度分布的影响[31]

Fig. 2　The influence of different models on temperature distribution[31]

除了基于以上三种模型外，基于 C-V 热传导模型与分数阶微积分理论，Atanackovic 等[46] 利用包含实部和复部分数阶微积分的本构方程的一般形式研究热传导问题，导出了本构方程的系数满足热力学第二定律的充分条件. 同时，利用所提出的本构方程给出了半无限长棒温度分布问题的解. Bachher 等[47] 基于 Eringen 非局部弹性理论和 Caputo 分数导数理论，建立了含孔洞广义热弹性材料的非局部理论，研究了无限大热弹性材料中瞬态波的传播. Abouelregal 等[48] 建立了非局部各向同性固体介质在脉冲热流作用下的分数阶热弹性振动分析模型，参数化研究了激光脉冲持续时间的增加以及分数阶系数和非局部阶系数对介质热弹性波的影响.

还有学者将分数阶微积分与其他的广义热弹性模型结合建立了分数阶广义热弹理论，如基于 G-N 型热弹性理论，Povstenko[49] 建立了分数阶 G-N 理论，并得到了柯西问题在分数阶热传导方程一维和二维情况下的基本解. El-Karamany 等[50] 利用 Caputo 分数阶导数给出了分数阶 Maxwell-Cattaneo 热传导定律的本构方程，证明了其唯一性定理，推导了互易关系，给出了解的变分表征. Ezzat 等[51] 基于分数阶微积分、双相滞后、G-N 模型以及双温度模型，建立了基于分数阶双相滞后的 G-N 热弹性双温理论，研究了受任意加热的半空间问题，发现该模型比起 Biot 热弹耦合理论与 L-S 理论，热波的传播速度更慢. Abouelregal[52] 在 C-F 分数阶导数的意义上，通过引入 Moore-Gibson-Thompson (MGT) 方程提出了该模型的修正传热方程，研究了温度相关的热导率对含有圆柱形腔的无限大体的影响，发现随着分数阶参数值的增加，温度会更快的趋于稳态值且应力绝对值的峰值随着分数阶参数值的增加而增大，位移绝对值的峰值则呈现相反的趋势.

基于依赖于传导温度和热力学温度的双温度热传导模型，El-Karamany 等[53] 基于 EL-sayed 等[54] 提出的分数阶微积分理论，建立了分数阶双温热传导模型，证明了其解的唯一性定理和互易定理，并建立了卷积变分原理. 发现在静止的初始状态下，互易关系与微分积分的阶数无关；基于分数阶温度模型研究了任意加热条件下半空间的一维热冲击问题[51]. Youssef 等[55] 建立了具有恒定弹性参数弹性半空间的双温度分数阶广义热弹性模型，并研究了热冲击和匀速移动热源作用下的半空间问题. Zenkour 等[56] 基于 Caputo 分数阶微积分，利用状态空间法与 Fourier 展开方法研究了具有恒定弹性参数的球腔无限弹性体空腔边界面受到热载荷的热弹响应，发现随着分数阶参数值的增加，位移、传导温度和热力学温度降低，而应变和应力增加. Mittal 等[57] 基于 R-L 分数阶微积分与双温度理论推导了相应的热传导方程，利用 Laplace 积分变换研究了球面的热弹响应并讨论了该问题的有界变分和稳定性的库兹涅佐夫收敛准则. Mozafarifard 等[58] 研究了飞秒激光脉冲下非均质系统中的电子-声子耦合热输运，提出了基于 Caputo 分数阶导数的双温时间分数模型，并用实验数据和双温玻尔兹曼输运方程结果对该模型进行了验证. 结果表明分数阶导数的双温时间分数模型比基于 Fourier 定律的扩散双温

模型更精确,复杂性更低,并证明了该模型可以可靠地预测金属-金属和金属-非金属界面的电子-声子耦合热输运以及超快激光照射后顶层金属层的电子冷却.

Ezzat 等[59]在分数阶微积分和三相滞后热传导定律的基础上,建立了热弹性线性理论,并证明了其解的唯一性和互易定理.利用 Laplace 积分变换和状态空间方法解决了有热源存在的半空间弹性材料的一维问题;并基于该理论研究了各向同性材料受到周期性变化热源载荷下的热弹响应[60]. Abbas[61]基于分数阶三相滞后热传导模型,利用特征值法得到了功能梯度材料分数阶广义热弹性三相滞后模型控制方程的解. Abouelregal 等[62]基于分数阶微积分建立了高阶时间分数阶三相滞后热弹性热传导模型,该模型包括热流矢量、温度梯度和热位移梯度中三相滞后的高阶时间分数导数近似.研究了无限非均匀正交各向异性功能梯度介质的热弹响应,讨论了高阶时间分数阶导数参数和非均匀性指标对各种响应的影响,发现以往的各种模型可视为该模型的特殊形式;进而建立了包含两个分数阶参数和多相滞后的广义热弹性模型[63],利用 Laplace 积分变换得到了半无限介质在体力和衰减热源作用下的解析解. Han 等[64]基于 Atangana-Baleanu 分数阶微积分与双相滞后热传导模型,研究了多孔微板一端受到热应力冲击、另一端自由,其余边界固定时的热弹性瞬态响应,并讨论了分数阶参数对无量纲温度、体积分数场、位移和应力分布的影响,发现分数阶参数值越小,温度曲线越平滑,热扰动面积越大,使得热波传播越远,传播速度越快;体积分数场的峰值随分数阶参数的增加而减小.

以上总结可见,学者们对各类分数阶微积分与广义热弹的结合进行了深入研究,但在研究分数阶广义热弹理论的解析解时,一般会做各种简化,如:无体力、无内热源和各向同性等;或是研究的维度一般局限在一维或二维,对三维或复杂条件下会利用一些数值方法来进行处理,这会不可避免的造成误差,如离散和截断误差等.此外,由于考虑的时间非常短,导致相关实验很难进行,研究相关的实验方法,如:利用松弛时间较长的非均质材料研究热力耦合响应中的力学响应[4,5]或通过光学的(反射)方法来研究热传导的波动性[65,66],以及利用金属薄膜中电子温度变化会引起反射率变化[3]等,可能对进行相关实验有很大帮助.

2　广义电磁热弹耦合问题

热弹性固体中磁场与应力应变之间的相互作用的研究在地球物理、压电材料和相关领域中有着重要的应用.研究电磁热弹耦合问题时,一般将 Maxwell 方程组与热弹性理论相耦合.但随着高性能、高密度集成芯片的出现以及核能工程和超短脉冲激光加热等新兴技术的发展特别是微电子机械系统(MEMS)这一新兴技术的崛起,使得在研究电磁热弹耦合必须考虑时空微尺度效应.因此,基于分数阶广义热弹性理论的电磁-热弹性耦合问题的研究受到了学者的广泛关注.

基于 C-V 热传导模型与分数阶微积分,Ezzat 建立了具有分数阶导数和热电性质的传热方程数学模型,利用 Laplace 与状态空间法研究了热电弹性材料在磁场存在下受到热冲击的导电半空间的一维问题[27];利用相同的方法研究了弹性材料的完美导电半空间在磁场存在下的热冲击的一维问题[28].图 3 为不同分数阶参数时感应磁场的分布,可以看出,随着分数阶参数值的减小,感应磁场的绝对值随之减小;利用状态空间方法得到了存在磁场作用和热源时的半空间均匀热电介质热冲击问题的解[67].之后,Ezzat 还给出了热导率随温度变化的理想导电各向同性热弹性介质广义磁热弹性方程的分数阶模型,并求解了轴向均匀磁场作用下的无限长空心圆柱体问题[68];研究了均匀磁场作用下受任意外边界热载荷作用的热电球壳的一维问题[69];建立了理想导电各向同性热弹性介质广义磁热弹性方程的分数阶模型.应用该模型求解了轴向均匀磁场作用下带圆柱腔的无限大体在腔体边界受到热和机械冲击共同作用下有限时间内的热弹响应问题[70].

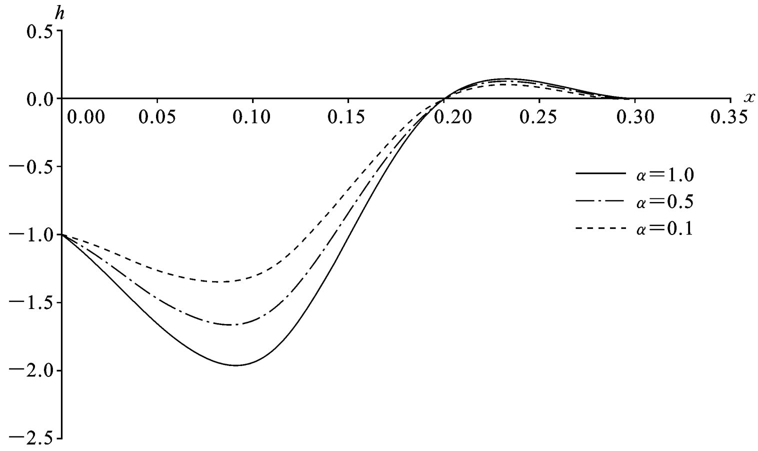

图 3 分数阶参数对感应磁场分布的影响[28]

Fig. 3 The influence of fractional parameters on the distribution of the induced magnetic field[28]

Sarkar 等[71]基于 R-L 分数阶微积分和 Sherief 分数阶广义热弹模型,利用特征值逼近方法得到了均匀各向同性完美导电热弹性半空间的二维电磁-热弹性耦合问题的解,研究了半空间边界受到时间相关压缩的热隔离表面和与时间相关的热冲击问题. Abbas[72]基于 Ezzat 分数阶广义热弹模型,利用特征值方法研究了磁场中受到一个移动热源的热弹响应问题. 分析了分数阶参数对各物理量场的影响,发现温度、位移和应力的绝对值都先随着分数阶值的增大而增大,之后随着分数阶值的增加而减小. Ma 等基于 Sherief 提出的分数阶热弹性理论研究了功能梯度压电棒在运动热源作用下的热弹响应[73];利用正则模态分析方法研究了二维广义热冲击问题的动力响应,得到了其无因次温度、位移和应力的分布[74]. Guo 等[75]建立了一种改进的变导热分数阶广义压电热弹性模型,并利用 Kirchhoff 和 Laplace 积分变换研究了变导热材料构成的瞬态加热压电薄板的热力学响应. Abouelregal[76]引入了一种新的修正的光热弹性模型,利用正则模态分析方法研究了磁场作用下以匀速角速度旋转的各向同性半导体半空间问题,得到了位移分量、温度、载流子密度、热应力和洛伦兹力分布的解析表达式.

基于 G-N 热传导模型和分数阶微积分理论,Ezzat 等建立了分数阶 G-N 热弹性理论的统一数学表达,并求解了具有圆柱腔的完美导电无界体在轴向均匀磁场作用下受正弦脉冲加热的一维问题[77];基于 Caputo 分数阶微积分,建立了电-热弹性的统一数学模型,并对该理论的预测与动力学经典耦合理论、L-S 热弹性理论进行了比较分析[78],发现该理论的温度预测低于 L-S 理论并高于动力学经典耦合理论. Hendy 等[79]基于无能量耗散的分数阶 G-N 热传导定律与 Ezzat 分数阶广义热弹性模型,建立了分数阶电磁热弹性数学模型,并求解了均匀磁场下完美导电球腔受任意热冲击的一维问题.

Zakaria 等[80]基于双相滞后热传导模型与分数阶泰勒展开,建立了一个改进的广义分数阶光热塑性模型,并利用该模型研究了磁场作用下旋转半导体半空间中的光热弹性相互作用. Said 等[81]基于 Youssef 分数阶广义热弹模型,提出了一种分数阶导数多相滞后模型,研究了处于磁场中外表面受谐波变热、内表面隔热状态下厚空心圆筒的电磁热弹响应. Hassaballa 等[82]基于 G-N II 理论与 R-L 分数阶微积分,建立了分数阶 G-N 理论,并利用矩阵指数法求解置于均匀的磁场和恒速移动热源的半空间问题,发现温度随分数阶参数值的增加而降低,并且在一定范围内,分数阶参数的增大引起了位移的增大和应力的减小.

以上总结可见,学者们所进行的这些研究极大发展了分数阶广义热弹理论的在多场耦合问题中的应用. 但这些研究所施加的电磁场一般是均匀或简单变化的,对于高频变化、高梯度电磁场对其热弹响应的影响研究很少. 若将电磁场类比于温度场,考虑电磁场的时空非局部效应,或许会对研究电磁热弹耦合问题有所帮助.

3　广义热弹性扩散问题

扩散指物质分子从高浓度区域向低浓度区域转移的现象，在地球物理和工业生产中广泛存在. 在地质学中，扩散原理已被应用于测量地壳中矿物质各种阳离子的扩散系数. 在扩散焊接中，结合层原子间在高温高压作用下相互扩散形成可靠的连接. 在金属的热处理中，通过扩散渗碳可以提高金属的表面特性，如提高其耐磨损、耐腐蚀、硬度等. 扩散现象由 Fick 定律描述，但 Fick 定律只考虑了扩散过程中传质通量与浓度梯度间的关系，对于某些极端传热传质过程，例如：极短时间、极高温度梯度、时间空间皆属微尺度的问题，Fick 定律则不再适用. 基于此类问题学者将广义热弹理论与分数阶微积分理论引入 Fick 定律发展了分数阶广义热弹性扩散理论.

Ezzat 等[83]基于 Ezzat 分数阶广义热弹模型和热扩散理论，推导了分数阶弹性固体热扩散理论，同时得到了该理论控制方程的变分定理，导出了控制方程解的唯一性定理和互易定理. Abbas[84]基于新理论，利用特征值法研究了具有球形腔的无限介质受到斜坡型加热时的热弹性扩散问题，图 4 为分数阶参数对径向应力分布的影响，可以发现径向应力绝对值从 0 增大到最大值，然后随着半径的增加迅速减小，然后减小到零，这符合理论边界条件；Peng 等[85]基于 Ezzat 分数阶广义热弹扩散模型，利用 Laplace 积分变换研究了含球腔的无限大热弹性介质涉及扩散的动力学响应，并得到了相关物理量场的分布. Li 等[86]基于 Fick 质量扩散定律与分数阶微积分，提出了一种适用于具有可变导热系数和扩散系数的完美热各向同性传导介质的广义热弹性扩散模型，该模型可用于研究球壳在外表面受到瞬时热冲击和化学冲击载荷时的瞬态响应. Abouelregal 等[87]基于分数阶泰勒展开，提出了具有四相滞后和高阶分数阶导数的广义热弹性扩散模型，利用该模型研究了暴露于热冲击和化学冲击下的半空间与半表面接触的可渗透材料的热弹性扩散问题.

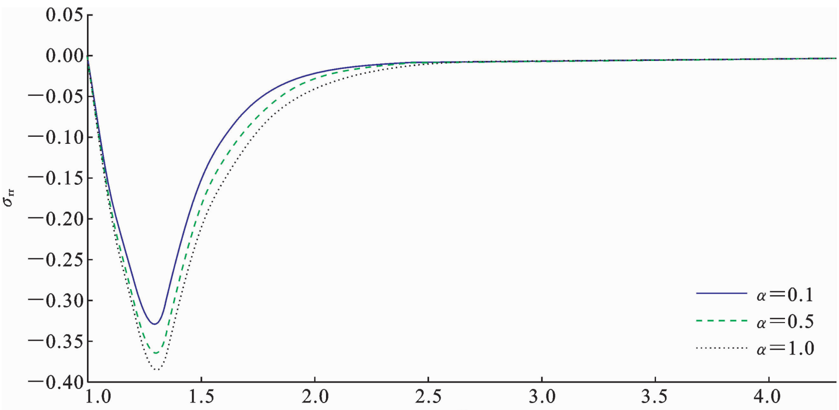

图 4　分数阶参数对径向应力分布的影响[84]

Fig. 4　The influence of fractional parameters on the distribution of radial stress[84]

Shaw 等[88]基于分数阶质量守恒、分数阶泰勒展开和分数阶散度定理，发展了分数阶运动方程，强调了连续介质的重要假设并对广义热弹性扩散方程进行时空分数阶导数修正. 基于 Goychuk[89]提出的分数阶 Boltzmann 输运方程(BTE)，该模型在动力学方程中引入了分数阶碰撞项，研究了超扩散和弹道热传导. Li 等证明了这一分数阶推广可以有效预测扩散的有效导热系数，并将扩散的有效导热系数与均方位移联系起来[90]；同时，研究了分数阶热传导模型与 Boltzmann 输运方程之间的关系，给出了广义 Cattaneo 方程的基本微观状态，建立了散度与均方位移之间的联系，其符合线性响应理论. 观察到热通量和熵通量之间的分数阶关系，建立了初始效应对熵产生率的影响表达式[91]. Mozafarifard 等提

出了基于 Caputo 分数阶导数的分数阶扩散模型来研究纳米尺度金属薄膜中的反常扩散过程[92]，采用基于隐式格式的有限差分法，证明了分数阶模型捕捉短脉冲激光加热金属薄膜热弹响应的准确性和适用性.研究了分数阶参数对金属薄膜温度响应的影响，发现随着分数阶参数值的减小，金薄膜的热响应符合反常扩散过程，且参数值越小这种现象越明显；同时，研究了多孔介质中热流的快速瞬态过程[93]，发现在多孔介质的短期热扰动过程中，可以用分数阶微积分方法模拟微尺度流固相互作用、固体-玻璃球与空气之间的能量交换、局部非平衡态以及快速瞬态过程.

以上总结可见，学者们对该基于分数阶广义热弹性理论研究热弹性扩散问题有了深入的认识.但许多研究停留在描述物理现象，缺乏对其物理本质的研究，例如：只是描述了传热对传质过程影响显著，传质对传热过程影响甚微的相关现象，但并为对其所反映出的物理本质进行深入研究.或许可以进行相关研究，进一步发展分数阶广义热弹理论在热弹扩散问题中的应用.

4　广义热黏弹性问题

黏弹性材料因其固有的优异流变性能而日益成为工程领域关注的热点，在生物、医药、石油、化工、土木工程等领域，橡胶、弹性体、树脂、混凝土、骨架等黏弹性材料是常用的材料.由于其优异的内在流变特性，已成为新型多功能材料的潜在选择之一[94,95].由于黏弹性材料应力-应变关系具有与载荷历史相关的特点，从宏观上唯象地描述黏弹行为的方法是将弹簧和黏壶组合成不同的网络结构并建立相应的本构方程，这些方程具有整数阶微积分的形式，无法表述应力-应变关系的载荷历史相关性，而分数阶微积分则能够正确反映黏弹材料的力学性能对载荷历史的依赖性[96]，基于此许多学者基于分数阶微积分的方法研究了广义热黏弹性问题.

Ezzat 等[97]基于 Ezzat 分数阶广义热弹模型与热黏弹性理论，建立了具有变导热系数和分数阶传热的各向同性介质的广义热黏弹性方程，利用 Laplace 积分变换研究了受任意加热的无牵引力半空间的热弹响应.发现热波的传播速度是有限的，并随着距离的增加，温度分布达到稳态值.Hendy 等[98]基于分数阶泰勒级数和分数阶微积分理论，建立了含分数阶传热的热黏弹性方程统一模型，并利用 Laplace 积分变换研究了热冲击作用下黏弹性半空间的热弹响应，比较了几种不同理论对结果的影响.图 5 是热弹耦合理论、L-S 理论、G-L 理论与统一分数阶广义热黏弹理论对温度分布的影响.发现温度的峰值随着分数阶参数值的减小而增加；统一分数阶广义热黏弹模型中的温度分布被限制在一个有界区域内，在这个区域之外，温度的分布就不会发生变化.Yang 等[99]基于 Ezzat 分数阶广义热弹模型与

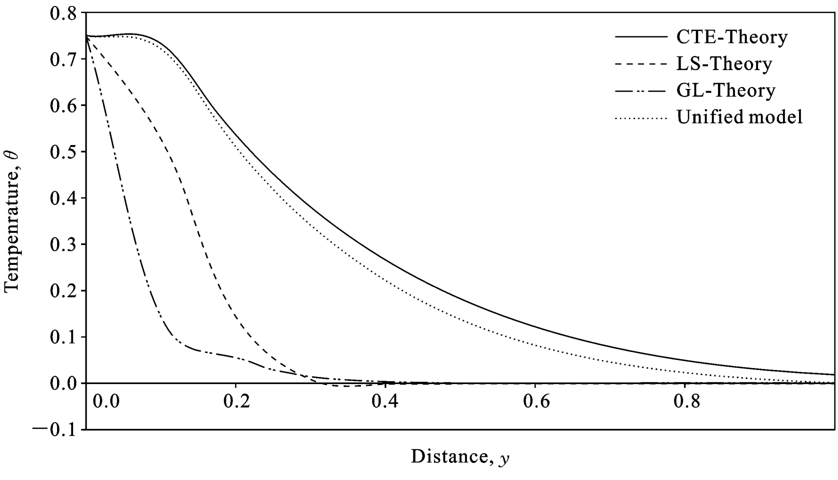

图 5　不同理论对温度分布的影响[98]

Fig. 5　The influence of different theories on temperature distribution[98]

Caputo 分数阶微积分，建立了单相滞后的分数阶广义热黏弹性模型，研究了具有裂纹的黏弹性材料在热冲击作用下的瞬态热力学行为．发现随时间的增加，温度跳变(裂纹上下表面的温差)先增大后减小；同时，随着时间的增加，不同分数阶参数所导致的温度分布的差异逐渐减小．Li 等[100]基于具有时间分数阶应变的广义热黏弹性理论，建立了考虑非理想界面条件的各均匀层的控制方程，并研究了多层黏弹性复合材料结构在随时间变化的热载荷作用下的瞬态热力学响应．Peng 等[101]在微观尺度上建立了一个改进的分数阶热黏弹性耦合模型，利用 Laplace 积分变换研究了移动热源加热聚合物微棒的动态响应研究．

基于双相滞后热传导模型，Yang[102]等对非局部双相滞后模型进行了扩展，将空间非局部效应引入到模型中，研究了有限厚度黏弹性板在受到热冲击作用下的一维热弹响应．Ezzat 等[103]基于 Yang 等提出的模型与 Ezzat 分数阶广义热弹模型，建立了包含尺寸相关的分数阶压电热黏弹性耦合的统一模型，并比较了 Biot 耦合理论、L-S 广义热弹理论与引入分数阶参数对该统一模型的影响，发现热流会随着分数阶参数值的增加而增加；温度会先随着分数阶参数值的增大而增大，之后便随着参数值的增加而降低．Khalil 等[104]基于 C-F 分数阶理论，提出了分数阶双相滞后热黏弹性模型来描述黏弹性现象的模型，并利用该模型研究了黏弹性材料制成的无边界球腔体在随时间变化的热冲击作用下的热弹响应．

Chakravorty 等[105]基于二阶分数阶三相滞后热弹性模型，给出了广义热黏弹性的热传导方程，并利用正则模态分析方法研究了表面受到时间相关热载荷且无牵引力的均匀各向同性三维介质中的热弹响应．

以上总结可以见，近年来分数阶广义热弹理论在热黏弹性领域的应用越来越广泛，但缺乏考虑黏弹性材料的力学特性会受到温度变化的影响[106]的相关研究，或许学者们可以就此开展相关的研究工作．

5　生物组织中的热弹耦合问题

生物材料的热研究可以辅助临床热治疗设备的设计、皮肤烧伤的评估以及各种目的的热防护的建立[107]等．生物组织的热传导是一个包含血液循环、发汗、自身新陈代谢以及通过毛发耗散部分热量的复杂物理过程，不同位置的生物组织结构特性、热特性都不同，且各种生理过程以及材料热特性会受到很多因素的影响：比如温度、损伤、压力和年龄等．为了描述这一复杂的过程，Pennes[108]在求解人体上臂与外界环境的传热问题中基于 Fourier 热传导定律提出了生物热传导方程(Pennes 模型)．随着光、微波、超声波等技术在热疗法以及低温外科等临床医学中的广泛应用，经典的 Fourier 定律可能失效，Liu 等[109]研究了在短时间内高热流脉冲照射在皮肤表面的生物传热问题分别计算了基于 Pennes 模型和 TWMBT 模型(Thermal wave model of bio-heat transfer，将 C-V 模型引入到生物传热模型)下皮肤暴露于恒定热流的一级和二级烧伤时间，也指出了考虑热波效应的重要性和必要性．而提到的 TW 模型或其它广义热弹理论都不能准确描述高速、高强度的激光加热过程，因此学者们基于广义生物传热模型引入分数阶微积分，以解决该问题．

Ezzat 等基于 Ezzat 分数阶广义热弹模型和 Pennes 方程，建立了分数阶 Pennes 生物热方程，研究了皮肤组织在瞬时表面加热下血液灌注率和分数阶参数对温度分布的影响[110]．

图 6 为血液灌注率对瞬时表面加热下皮肤温度分布的影响，发现由于皮肤温度超过动脉温度，血液灌注起冷却作用，导致了随着血液灌注率的提高，温度逐渐降低．图 7 为分数阶参数对瞬时表面加热下皮肤温度分布的影响．发现在接近皮肤表面的位置，分数阶参数值的减小会引起温度的降低，在较深的位置，分数阶参数值的减小则会引起温度的增加；并基于所提出的分数阶 Pennes 生物热方程，Ezzat 等建立了具有可变的热导率和体积的热黏弹性理论的分数阶模型，利用 Kirchhoff 变换和 Laplace 积分变换研究了任意厚度癌组织的边界面受到两种不同类型的热负荷(非高斯激光束和谐波加热)的问题[110]．Hobiny 等[111]基于 Ezzat 提出的分数阶 Pennes 生物热方程，利用 Laplace 积分变换和 Arrhenius 方程研究了分数阶参数对皮肤组织温度和热损伤的影响，发现温度与热损伤程度总是随着分

数阶参数值的增加而增加. Zhan 等[112]基于分数阶微积分和具有单相滞后的 Pennes 生物热传导方程，建立了新的分数阶生物传热模型，并利用 Laplace 积分变换研究了皮肤组织受到热载荷冲击下的热弹响应.

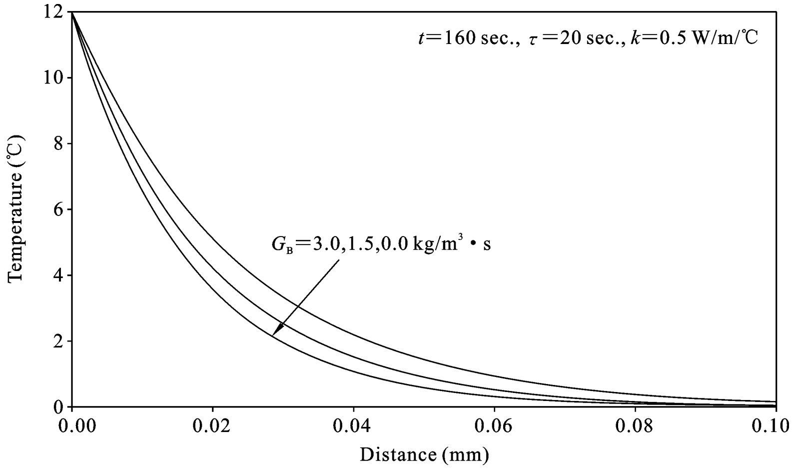

图 6　血液灌注率对温度分布的影响[110]

Fig. 6　The influence of blood perfusion rate on temperature distribution[110]

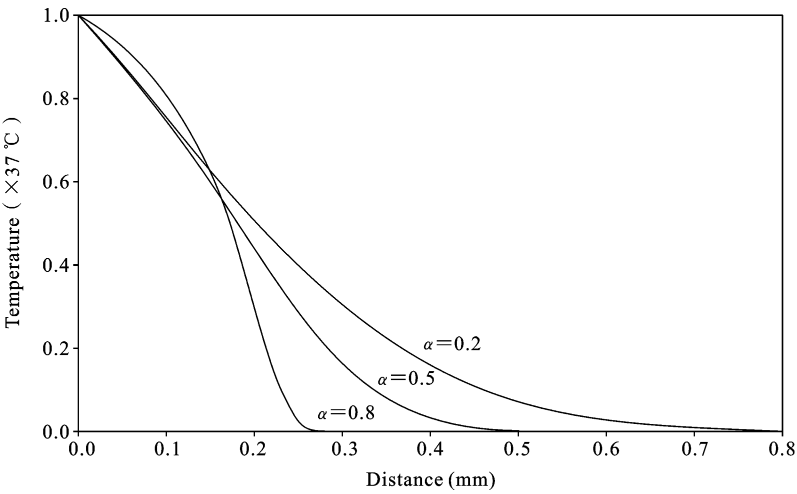

图 7　分数阶参数对温度分布的影响[110]

Fig. 7　The influence of fractional parameter on temperature distribution[110]

Fahmy[113]提出了一种新的边界元算法，可用于求解电磁辐射过程中非线性时空分数双相滞后生物换热问题. 发现随着时间分数阶参数值的减小，温度的峰值出现在更靠近皮肤表面的地方，且峰值温度升高. Li 等基于 R-L 分数阶微积分与 G-N Ⅱ 型广义热传导模型，提出了一种具有可变热材料性能的修正分数阶广义生物热弹性理论[114]，解决了分数阶热传导理论的量纲不一致问题，并研究了具有变热性能的单层皮肤组织受到热冲击作用下的热弹响应，发现温度、位移和应力绝对值的峰值随分数阶参数值的减小而减小，说明分数阶参数会降低热传播的影响；又基于 Caputo 分数阶微积分与双相滞后热传导模型，建立了分数阶线性热黏弹理论[115]，并利用 Laplace 积分变换研究了生物组织的热黏弹响应，发现温度、位移和应力的峰值随热流密度项的分数阶参数值的减小而减小，随温度梯度项的分数阶

参数值的增大而减小. Hu 等[116]基于 Caputo 分数阶微积分,提出了分数阶双相滞后生物热传导模型,并利用 Laplace 积分变换研究了单层有限厚度皮肤组织在皮肤表面受到热冲击作用下的瞬态响应.

以上总结可以见,学者们对生物组织的分数阶广义热弹耦合问题已经有了较为全面的认识.但是,由于生物组织的复杂结构,学者们在研究此类问题时往往会忽视多层生物组织结构中各层组织的差异,如:人体皮肤组织中真皮和皮下组织中含有丰富的血管、毛囊、汗腺、油脂腺及感觉神经纤维等,角质层与表皮组织则与之不同.除此以外,在研究血液灌注率的影响时会将其简单看成一个内热源,这显然与实际生物组织(同时存在动脉和毛细血管的影响)之间有较大差异.或许学者们可以对这些问题进行深入的研究.

6　展望

已有研究可以发现,尽管近年来分数阶广义热弹性问题在理论和工程应用方面都取得了全面发展,但结合工程与科学发展的需要,分数阶广义热弹性问题还需在以下方面继续开展研究:

(1) 考虑工程材料的黏弹性属性以及充满液体的多孔生物材料的特别属性对瞬态热冲击响应的影响.

(2) 进一步探讨分数阶广义热弹性理论与其他物理场(如电磁场、磁场、化学扩散等)的耦合效应.这将有助于更深入理解复杂环境下材料的热弹行为,提高模型的预测能力.

(3) 由于广义热传导所考虑的时间非常短,通过实验直接研究热力耦合中力学响应有很大困难.因此在实验中,可以利用松弛时间较长的非均质材料研究热力耦合响应中的力学响应[4,5]或通过光学的(反射)方法来研究热传导的波动性[65,66],以及利用金属薄膜中电子温度变化会引起反射率变化[3]等,从材料中其他与温度和力学量相关的物理量入手研究热力耦合中的热弹响应将有助于实验方法的发展.

参考文献

[1] 王洪刚著. 热弹性力学概论[M]. 北京:清华大学出版社, 1989.

[2] Peshkov V P. Second sound in helium II[J]. Comptes Rendus De L Academie Des Sciences De L Urss, 1944, 45: 365-366.

[3] Brorson S D, Fujimoto J G, Ippen E P. Femtosecond electronic heat-transport dynamics in thin gold films[J]. Physical Review Letters, 1987, 59(17): 1962-1965.

[4] Kaminski W. Hyperbolic heat conduction equation for materials with a nonhomogeneous inner structure[J]. Journal of Heat Transfer-Transactions of the ASME, 1990, 112(3): 555-560.

[5] Mitra K, Kumar S, Vedevarz A, et al. Experimental evidence of hyperbolic heat conduction in processed meat[J]. Journal of Heat Transfer-transactions of The Asme, 1995, 117: 568-573.

[6] Cattaneo C. Sulla Conduzione Del Calore[J]. Atti Sem Mat Fis Univ Modena, 2011, 3.

[7] Vernotte P. Les paradoxes de la theorie continue de l 'equation de la chaleur[J]. Compt Rendu, 1958, 246: 3154-3155.

[8] Lord H W, Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1967, 15(5): 299-309.

[9] Green A E, Lindsay K A. Thermoelasticity[J]. Elasticity, 1972, 2: 1-7.

[10] Green A E, Naghdi P M. On undamped heat waves in an elastic solid[J]. Therm Stresses, 1992, 15: 253-264.

[11] Green A E, Naghdi P M. Thermoelasticity without energy dissipation[J]. Elasticity, 1993, 31: 189-208.

[12] Chandrasekharaiah D S. Hyperbolic thermoelasticity: a review of recent literature[J]. Appl Mech Rev, 1998, 51(12): 705-729.

[13] Hetnarski R B, Ignaczak J. Generalized thermoelasticity[J]. Thermal Stresses, 1999, 22: 451-476.

[14] Hetnarski R B, IGNACZAK J. Nonclassical dynamical thermoelasticity[J]. International Journal of Solids and Structures, 2000, 37(1): 215-224.

[15] Tian X G, Shen Y P. Research progress in general-

ized thermoelastic problems[J]. Advances in Mechanics, 2012, 42(1): 18-28.

[16] Shakeriaski F, Ghodrat M, Escobedo-diaz J, et al. Recent advances in generalized thermoelasticity theory and the modified models: a review[J]. Journal of Computational Design and Engineering, 2021, 8(1): 15-35.

[17] Podlubny I. Fractional Differential Equations[M]. New York: Academic Press, 1999.

[18] Caputo M, Fabrizio M. A new definition of fractional derivative without singular Kernel[J]. Prog Fract Differ Appl, 2015, 1: 73-85.

[19] Atangana A, Baleanu D. New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: Theory and application to heat transfer model[J]. Thermal Science, 2016, 20(2): 763-769.

[20] Li C, Deng W H, Zhao L J. Well-posedness and numerical algorithm for the tempered fractional differential equations[J]. Discrete & Continuous Dynamical Systems - B, 2019, 24(4): 1989-2015.

[21] Scher H, Montroll E W. Anomalous transit-time dispersion in amorphous solids[J]. Physical Review B, 1975, 12(6): 2455-2477.

[22] Koch D L, Brady J F. Anomalous diffusion in heterogeneous porous-media[J]. Physics of Fluids, 1988, 31(5): 965-973.

[23] Caputo M, Mainardi F. A new dissipation model based on memory mechanism[J]. Pure and Applied Geophysics, 1971, 91: 134-147.

[24] Caputo M, Mainardi F. Linear Models of Dissipation in Anelastic Solids[J]. La Rivista del Nuovo Cimento, 1971, 1: 161-198.

[25] Caputo M. Vibrations of an infinite viscoelastic layer with a dissipative memory[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1974, 56(3): 897-904.

[26] Sherief H H, El-sayed A M A, Abd El-latief A M. Fractional order theory of thermoelasticity[J]. International Journal of Solids and Structures, 2010, 47(2): 269-275.

[27] Ezzat M A. Magneto-thermoelasticity with thermoelectric properties and fractional derivative heat transfer[J]. Physica B: Condensed Matter, 2011, 406(1): 30-35.

[28] Ezzat M A, El-karamany A S. Fractional order theory of a perfect conducting thermoelastic medium[J]. Canadian Journal of Physics, 2011, 89(3): 311-318.

[29] Ezzat M, El-karamany A. Theory of fractional order in electro-thermoelasticity[J]. European Journal of Mechanics - A/Solids, 2011, 30: 491-500.

[30] Youssef H M, Al-lehaibi E A. Fractional order generalized thermoelastic half-space subjected to ramp-type heating[J]. Mechanics Research Communications, 2010, 37(5): 448-452.

[31] Yu Y J, Zhao L J. Fractional thermoelasticity revisited with new definitions of fractional derivative[J]. European Journal of Mechanics - A/Solids, 2020, 84: 104043.

[32] Sherief H, Abd El-latief A M. Effect of variable thermal conductivity on a half-space under the fractional order theory of thermoelasticity[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2013, 74: 185-189.

[33] Sherief H H, Raslan W E. Fundamental solution for a line source of heat in the fractional order theory of thermoelasticity using the new Caputo definition[J]. Journal of Thermal Stresses, 2019, 42(1): 18-28.

[34] Kothari S, Mukhopadhyay S. A Problem on Elastic Half Space Under Fractional Order Theory of Thermoelasticity[J]. Journal of Thermal Stresses, 2011, 34(7): 724-739.

[35] Hussein E M. Effect of fractional parameter on thermoelastic half-space subjected to a moving heat source[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2019, 141: 855-860.

[36] Ezzat M A, El-karamany A S, El-bary A A. Application of fractional order theory of thermoelasticity to. D time-dependent thermal shock problem for a half-space[J]. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2017, 24(1): 27-35.

[37] Abbas I A. A problem on functional graded material under fractional order theory of 0 thermoelasticity[J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2014, 74: 18-22.

[38] Mashat D S, Zenkour A M, Abouelregal A E. Fractional order thermoelasticity theory for a Half-Space subjected to an axisymmetric heat distribution[J]. Mechanics of Advanced Materials and Structures,

2015, 22(11): 925-932.

[39] Youssef H M, Al-lehaibi E A. Variational principle of fractional order generalized thermoelasticity[J]. Applied Mathematics Letters, 2010, 23(10): 1183-1187.

[40] Abouelregal A E, Zenkour A M. The effect of fractional thermoelasticity on a two-dimensional problem of a mode I crack in a rotating fiber-reinforced thermoelastic medium[J]. Chinese Physics B, 2013, 22(10): 108102.

[41] Bachher M, Sarkar N, Lahiri A. Generalized thermoelastic infinite medium with voids subjected to a instantaneous heat sources with fractional derivative heat transfer[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2014, 89: 84-91.

[42] Abbas I A, Youssef H M. Two-dimensional fractional order generalized thermoelastic porous material[J]. Latin American Journal of Solids and Structures, 2015, 12(7): 1415-1431.

[43] Wang Y Z, Liu D, Wang Q. Effect of fractional order parameter on thermoelastic behaviors in infinite elastic medium with a cylindrical cavity[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2015, 28(3): 285-293.

[44] Xue Z N, Liu J L, Tian X G, et al. Thermal shock fracture associated with a unified fractional heat conduction[J]. European Journal of Mechanics A-Solids, 2021, 85: 104129.

[45] Xue Z N, Zhang H T, Liu J L. Memory effects on the thermal fracture behavior of cracked plates via fractional heat conduction models[J]. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2024, 31(26): 7645-7654.

[46] Atanackovic T M, Pilipovic S. On a constitutive equation of heat conduction with fractional derivatives of complex order[J]. Acta Mechanica, 2018, 229(3): 1111-1121.

[47] Bachher M, Sarkar N. Nonlocal theory of thermoelastic materials with voids and fractional derivative heat transfer[J]. Waves in Random and Complex Media, 2018, 29(4): 595-613.

[48] Abouelregal A E, Akgöz B, Civalek Ö. Nonlocal thermoelastic vibration of a solid medium subjected to a pulsed heat flux via Caputo-Fabrizio fractional derivative heat conduction[J]. Applied Physics A, 2022, 128(8): 660.

[49] Povstenko Y Z. Fractional heat conduction equation and associated thermal stress[J]. Journal of Thermal Stresses, 2005, 28(1): 83-102.

[50] El-karamany A S, Ezzat M A. Fractional phase-lag Green-Naghdi thermoelasticity theories[J]. Journal of Thermal Stresses, 2017, 40(9): 1063-1078.

[51] Ezzat M A, El-karamany A S, El-bary A A. Two-temperature theory in Green-Naghdi thermoelasticity with fractional phase-lag heat transfer[J]. Microsystem Technologies, 2017, 24(2): 951-961.

[52] Abouelregal A E, Fahmy M A. Generalized Moore-Gibson-Thompson thermoelastic fractional derivative model without singular kernels for an infinite orthotropic thermoelastic body with temperature-dependent properties[J]. ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 2022, 102(7): e202100533.

[53] El-karamany A S, Ezzat M A. Convolutional Variational Principle, Reciprocal and Uniqueness Theorems in Linear Fractional Two-Temperature Thermoelasticity[J]. Journal of Thermal Stresses, 2011, 34(3): 264-284.

[54] El-sayed A M A, Abd El-salam S A. On the stability of a fractional-order differential equation with nonlocal initial condition[J]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2008, (29): 1-8.

[55] Youssef H M. State-Space Approach to Fractional Order Two-Temperature Generalized Thermoelastic Medium Subjected to Moving Heat Source[J]. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2013, 20(1): 47-60.

[56] Zenkour A M, Abouelregal A E. State-space approach for an infinite medium with a spherical cavity based upon two-temperature generalized thermoelasticity theory and fractional heat conduction[J]. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 2013, 65(1): 149-164.

[57] Mittal G, Kulkarni V S. Two temperature fractional order thermoelasticity theory in a spherical domain[J]. Journal of Thermal Stresses, 2019, 42(9): 1136-1152.

[58] Mozafarifard M, Liao Y, Nian Q, et al. Two-temperature time-fractional model for electron-phonon coupled interfacial thermal transport[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2023, 202: 123759.

[59] Ezzat M A, El-karamany A S, Fayik M A. Fractional order theory in thermoelastic solid with three-phase lag heat transfer[J]. Archive of Applied Mechanics, 2011, 82(4): 557-572.

[60] Ezzat M A, El-bary A A, Fayik M A. Fractional fourier law with three-phase lag of thermoelasticity [J]. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2013, 20(8): 593-602.

[61] Abbas I A. Generalized thermoelastic interaction in functional graded material with fractional order three-phase lag heat transfer[J]. Journal of Central South University, 2015, 22(5): 1606-1613.

[62] Abouelregal A E. Three-phase-lag thermoelastic heat conduction model with higher-order time-fractional derivatives[J]. Indian Journal of Physics, 2020, 94 (12): 1949-1963.

[63] Abouelregal A E, Soleiman A, Sedighi H M, et al. Advanced thermoelastic heat conduction model with two fractional parameters and phase-lags[J]. Physica Scripta, 2021, 96(12): 124048.

[64] Han Y M, Tian L C, He T H. Investigation on the thermoelastic response of a porous microplate in a modified fractional-order heat conduction model incorporating the nonlocal effect [J]. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2024, 31 (25): 6817-6828.

[65] Jeon P, Lee K, Yoo J, et al. Measurement of thermal diffusivity using deformation gradient and phase in the photothermal displacement technique[J]. Ksme International Journal, 2003, 17(12): 2078-2086.

[66] Jeon P, lee K, Yoo J, et al. The theoretical study of the measuring thermal diffusivity of semi-infinite solid using the photothermal displacement[J]. Ksme International Journal, 2004, 18(10): 1712-1721.

[67] Ezzat M A. State space approach to thermoelectric fluid with fractional order heat transfer[J]. Heat and Mass Transfer, 2011, 48(1): 71-82.

[68] Ezzat M A, El-bary A A. Effects of variable thermal conductivity and fractional order of heat transfer on a perfect conducting infinitely long hollow cylinder[J]. International Journal of Thermal Sciences, 2016, 108: 62-69.

[69] Ezzat M A, El-bary A A. Thermoelectric spherical shell with fractional order heat transfer [J]. Microsystem Technologies, 2017, 24(2): 891-899.

[70] Ezzat M A, El-bary A A. Application of fractional order theory of magneto-thermoelasticity to an infinite perfect conducting body with a cylindrical cavity[J]. Microsystem Technologies-Micro-and Nanosystems-Information Storage and Processing Systems, 2017, 23(7): 2447-2458.

[71] Sarkar N, Lahiri A. The effect of fractional parameter on a perfect conducting elastic half-space in generalized magneto-thermoelasticity[J]. Meccanica, 2012, 48 (1): 231-245.

[72] Abbas I A. Eigenvalue approach to fractional order generalized magneto-thermoelastic medium subjected to moving heat source[J]. Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 2015, 377: 452-459.

[73] Ma Y B, He T H. The transient response of a functionally graded piezoelectric rod subjected to a moving heat source under fractional order theory of thermoelasticity [J]. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2017, 24(9): 789-796.

[74] Ma Y B, Liu Z Q, He T H. Two-dimensional electromagneto-thermoelastic coupled problem under fractional order theory of thermoelasticity[J]. Journal of Thermal Stresses, 2018, 41(5): 645-657.

[75] Guo H L, Li C L, Tian X G. A modified fractional-order generalized piezoelectric thermoelasticity model with variable thermal conductivity [J]. Journal of Thermal Stresses, 2018, 41(10-12): 1538-1557.

[76] Abouelregal A E. Modified fractional photo-thermoelastic model for a rotating semiconductor half-space subjected to a magnetic field[J]. Silicon, 2020, 12(12): 2837-2850.

[77] Ezzat M A, EL-BARY A A. Electro-magneto interaction in fractional Green-Naghdi thermoelastic solid with a cylindrical cavity[J]. Waves in Random and Complex Media, 2017, 28(1): 150-168.

[78] Ezzat M A, El-bary A A. Unified GN model of elec-

tro-thermoelasticity theories with fractional order of heat transfer[J]. Microsystem Technologies-Micro- and Nanosystems-Information Storage and Processing Systems, 2018, 24(12): 4965-4979.

[79] Hendy M H, Amin M M, Ezzat M A. Magneto-electric interactions without energy dissipation for a fractional thermoelastic spherical cavity[J]. Microsystem Technologies, 2017, 24(7): 2895-2903.

[80] Zakaria K, Sirwah M A, Abouelregal A E, et al. Photo-thermoelastic model with time-fractional of higher order and phase lags for a semiconductor rotating materials[J]. Silicon, 2021, 13(2): 573-585.

[81] Said S M, Abd-Elaziz E M, Othman M I A. A two-temperature model and fractional order derivative in a rotating thick hollow cylinder with the magnetic field [J]. Indian Journal of Physics, 2023, 97(10): 3057-3064.

[82] Hassaballa A A, Hendy M H, Ezzat M A. A modified Green-Naghdi fractional-order model for analyzing thermoelectric semispace heated by a moving heat source [J]. Mechanics of Time-Dependent Materials, 2024, 28 (3): 1815-1837.

[83] Ezzat M A, Fayik M A. Fractional order theory of thermoelastic diffusion[J]. Journal of Thermal Stresses, 2011, 34(8): 851-872.

[84] Abbas I A. Eigenvalue approach on fractional order theory of thermoelastic diffusion problem for an infinite elastic medium with a spherical cavity[J]. Applied Mathematical Modelling, 2015, 39(20): 6196-6206.

[85] Peng W, Ma Y B, Li C L, et al. Dynamic analysis to the fractional order thermoelastic diffusion problem of an infinite body with a spherical cavity and variable material properties[J]. Journal of Thermal Stresses, 2020, 43(1): 38-54.

[86] Li C L, Tian X G, He T H. Analytical study of transient thermo-mechanical responses in a fractional order generalized thermoelastic diffusion spherical shell with variable thermal conductivity and diffusivity[J]. Waves in Random and Complex Media, 2019, 31(6): 1083-1106.

[87] Abouelregal A E, Elhagary M A, Soleiman A, et al. Generalized thermoelastic-diffusion model with higher-order fractional time-derivatives and four-phase-lags[J]. Mechanics Based Design of Structures and Machines, 2020, 50(3): 897-914.

[88] Shaw S, Mukhopadhyay B. Theory of fractional-ordered thermoelastic diffusion[J]. European Physical Journal Plus, 2016, 131(6): 183.

[89] Goychuk I. Fractional Bhatnagar-Gross-Krook kinetic equation[J]. European Physical Journal B, 2017, 90 (11): 208.

[90] Li S N, Cao B Y. Fractional Boltzmann transport equation for anomalous heat transport and divergent thermal conductivity [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2019, 137: 84-89.

[91] Li S N, Cao B Y. Fractional-order heat conduction models from generalized Boltzmann transport equation [J]. Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical Physical and Engineering Sciences, 2020, 378(2172): 20190280.

[92] Mozafarifard M, Toghraie D. Time-fractional subdiffusion model for thin metal films under femtosecond laser pulses based on Caputo fractional derivative to examine anomalous diffusion process[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2020, 153: 119592.

[93] Mozafarifard M, Toghraie D, Sobhani H. Numerical study of fast transient non-diffusive heat conduction in a porous medium composed of solid-glass spheres and air using fractional Cattaneo subdiffusion model [J]. International Communications in Heat and Mass Transfer, 2021, 122: 105192.

[94] Li C L, Guo H L, Tian X G, et al. Generalized thermoviscoelastic analysis with fractional order strain in a thick viscoelastic plate of infinite extent[J]. Journal of Thermal Stresses, 2019, 42(8): 1051-1070.

[95] Wineman A. Nonlinear viscoelastic solids-A review [J]. Mathematics and Mechanics of Solids, 2009, 14 (3): 300-366.

[96] Adolfsson K. Nonlinear fractional order viscoelasticity at large strains[J]. Nonlinear Dynamics, 2004, 38 (1-4): 233-246.

[97] Ezzat M A, El-karamany A S, El-bary A A. On thermo-viscoelasticity with variable thermal conductivity and fractional-order heat transfer[J]. International Journal of Thermophysics, 2015, 36(7): 1684-1697.

[98] Hendy M H, Amin M M, Ezzat M A. Two-dimensional problem for thermoviscoelastic materials with fractional order heat transfer[J]. Journal of Thermal Stresses, 2019, 42(10): 1298-1315.

[99] Yang W Z, Chen Z T. Fractional single-phase lag heat conduction and transient thermal fracture in cracked viscoelastic materials[J]. Acta Mechanica, 2019, 230(10): 3723-3740.

[100] Li C L, Tian X G, He T H. Transient thermomechanical responses of multilayered viscoelastic composite structure with non-idealized interfacial conditions in the context of generalized thermoviscoelasticity theory with time-fractional order strain[J]. Journal of Thermal Stresses, 2020, 43(7): 895-928.

[101] Peng W, Chen L K, He T H. A modified fractional-order thermo-viscoelastic model and its application to a polymer micro-rod heated by a moving heat source [J]. Applied Mathematics and Mechanics-English Edition, 2022, 43(4): 507-522.

[102] Yang W Z, Chen Z T. Nonlocal dual-phase-lag heat conduction and the associated nonlocal thermal-viscoelastic analysis[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2020, 156.

[103] Ezzat M A, Ezzat S M, Alkharraz M Y. State-space approach to nonlocal thermo-viscoelastic piezoelectric materials with fractional dual-phase lag heat transfer [J]. International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, 2022, 32(12): 3726-3750.

[104] Khalil K M, Abouelregal A E, Atta D. A new fractional viscoelastic model for an infinitely thermoelastic body with a spherical cavity including Caputo-Fabrizio operator without singular kernel[J]. Chinese Journal of Physics, 2022, 77: 1450-1464.

[105] Chakravorty S, Ghosh S, Sur A. Thermo-viscoelastic Interaction in a Three-dimensional Problem Subjected to Fractional Heat Conduction[J]. Procedia Engineering, 2017, 173: 851-858.

[106] Williams M L, Landel R F, Ferry J D. Mechanical properties of substances of high molecular weight. 19. The temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass-forming liquids[J]. Journal of the American Chemical Society, 1955, 77(14): 3701-3707.

[107] Zhao J J, Zhang J, Kang N, et al. A two level finite difference scheme for one dimensional Pennes' bioheat equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 171(1): 320-331.

[108] Pennes H H. Analysis of tissue and arterial blood temperatures in the resting human forearm (Reprinted from Journal of Applied Physiology, vol 1, pg 93-122, 1948) [J]. Journal of Applied Physiology, 1998, 85(1): 5-34.

[109] Liu J, Chen X, Xu L X. New thermal wave aspects on burn evaluation of skin subjected to instantaneous heating[J]. Ieee Transactions on Biomedical Engineering, 1999, 46(4): 420-428.

[110] Ezzat M A, Alsowayan N S, Al-muhiameed Z I A, et al. Fractional modelling of Pennes' bioheat transfer equation[J]. Heat and Mass Transfer, 2014, 50(7): 907-914.

[111] Hobiny A, Alzahrani F, Abbas I, et al. The effect of fractional time derivative of bioheat model in skin tissue induced to laser irradiation[J/OL]. Symmetry, 2020, 12(4): 10.3390/sym12040602.

[112] Zhang Q, Sun Y X, Yang J L. Bio-heat transfer analysis based on fractional derivative and memory-dependent derivative heat conduction models[J]. Case Studies in Thermal Engineering, 2021, 27: 101211.

[113] Fahmy M A. A new boundary element algorithm for a general solution of nonlinear space-time fractional dual-phase-lag bio-heat transfer problems during electromagnetic radiation[J]. Case Studies in Thermal Engineering, 2021, 25: 100918.

[114] Li X Y, Xue Z N, Tian X G. A modified fractional order generalized bio-thermoelastic theory with temperature-dependent thermal material properties[J]. International Journal of Thermal Sciences, 2018, 132: 249-256.

[115] Li X Y, Tian X G. Fractional order thermo-viscoelastic theory of biological tissue with dual phase lag heat conduction model[J]. Applied Mathematical Modelling, 2021, 95: 612-622.

[116] Hu Y, Zhang X Y, Li X F. Thermoelastic response of skin using time-fractional dual-phase-lag bioheat transfer equation[J]. Journal of Thermal Stresses, 2022, 45(7): 597-615.

Research Progress in Fractional-order Generalized Thermoelastic Problems

Kai Zhang　　Xiaogeng Tian

(*The State Key Laboratory of Strength and Vibration, School of Aerospace Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an*, 710049)

Abstract　Advancements in science and technology, particularly in ultrashort-pulse lasers and refrigeration, have highlighted the wave-like behavior of heat propagation. Consequently, the generalized theory of thermoelasticity, which addresses finite-speed heat conduction, has gained widespread attention. Research indicates that materials with memory and path-dependent characteristics exhibit abnormal diffusion and anomalous heat conduction. However, the traditional generalized theory of thermoelasticity relies on integer-order differential terms in the heat conduction equation. These terms are based on the definition of local limits and only consider the current state of a material point, failing to account for memory-dependent characteristics. In contrast, fractional calculus uses convolution integrals to define its concepts, analyzing differentiation and integration of any real order, as well as methods for solving differential equations containing derivatives of any real order. The integral terms in fractional calculus can describe memory-dependent processes of a system. This paper introduces the development of fractional-order generalized theory of thermoelasticity and fractional calculus, summarizing recent research in this area, including the effects of magneto-electric multi-field coupling, diffusion, and viscoelasticity on the response of fractional-order generalized thermoelastic problems, as well as fractional-order heat conduction in biological tissues. It also identifies limitations in current studies, such as the challenges of short time scales in experimental research and the lack of exploration into high-frequency and high-gradient electromagnetic fields on thermoelastic responses. By addressing these topics, the paper provides a comprehensive overview of the current state and emerging trends in fractional-order generalized thermoelastic problems, aiding researchers in advancing their investigations in this field.

Key words　fractional calculus, generalized theory of thermoelasticity, finite element method, diffusion effects, magneto-electro-thermoelastic coupling