第 46 卷 第 2 期
2025 年 4 月

固 体 力 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF SOLID MECHANICS

Vol. 46 No. 2
April 2025

固支扁球壳自振的几何和材料畸变缩比模型研究*

于 伟[1,2**] 王 帅[1]

([1] 桂林理工大学广西绿色建材与建筑工业化重点实验室,桂林,541004)([2] 桂林理工大学广西岩土力学与工程重点实验室,桂林,541004)

摘 要 扁球壳广泛应用于运载火箭、核电安全壳和煤气柜等大型结构,研究大型薄壁固支扁球壳自振的几何和材料畸变缩比模型具有重要意义.基于固支扁球壳的自振频率方程和固有频率解分别进行相似转换,获得结构自振的广义相似条件与固有频率缩比关系.通过固支扁球壳的自振频率理论计算结果验证了数值模拟的准确性,并利用数值模拟开展不同矢厚比固支扁球壳自振的几何和材料畸变缩比模型研究.结果表明:不同矢厚比固支扁球壳按照其相似条件设计的缩比模型,结合对应的广义相似条件振型模态关系和固有频率缩比关系能够准确预测其原型的自振特性;一般情形、矢厚比较小和矢厚比较大的固支扁球壳自振畸变相似条件,除均需满足振型相同,还需分别满足矢厚比与泊松比的缩比因子均为 1,泊松比的缩比因子为 1,及缩比模型和原型的矢厚比均大于等于 25.本文采用的方法和给出的结论可为类似壳体厚度与材料畸变缩比模型的设计及实验提供参考.

关键词 扁球壳,自振,畸变,矢厚比,相似律

DOI:10.19636/j.cnki.cjsm42-1250/o3.2024.056

0 引言

扁球壳为矢高远小于底面半径的壳体,该类薄壁扁壳被广泛应用在运载火箭、潜艇、LNG 运输船、储氢罐、核电安全壳和煤气柜等结构.在实际工程中,这些壳体结构的振动问题比较显著.由于此类结构中扁球壳体积较大,采用结构原型进行试验存在成本高、周期长和难度大等诸多问题,因此常采用缩比模型来预测原型的振动特性.大型扁球壳的壳体厚度远小于结构的其他尺寸,进行结构缩比模型设计时需考虑厚度的畸变;有时缩比模型材料不同于原型结构,会给试验带来方便和效益;因此开展几何和材料畸变缩比模型设计的研究就十分必要.

关于板壳结构振动理论分析和缩比模型研究,学者们做了许多工作.曹志远[1]系统介绍了板壳振动分析的一般方法.Reissner[2,3]采用解析法,分析了扁球壳在不同边界条件下的轴对称自由振动;并通过 Rayleigh-Ritz 方法计算了固支扁球壳最低频率的近似值.王璠和刘仁怀[4]利用解析法研究了复合材料层合开顶扁球壳在简谐荷载作用下的非线性动态屈曲问题.杨增涛和徐加初[5]采用数值方法对复合材料层合扁球壳在矩形脉冲作用下的轴对称冲击屈曲开展了研究.罗忠等[6-8]采用控制方程法和灵敏度分析研究了悬臂板、单层弹性薄板、层合板、涂层板、夹层板及圆环薄板的自振畸变相似,提出了模型畸变参数区间的确定方法,通过模拟或实验对相似关系进行了验证.罗忠团队[9-11]利用控制方程法对薄壁短圆柱壳、旋转运动的薄壁圆柱壳和考虑强度要求的薄壁圆柱壳进行了振动相似分析,并通过理论分析或实验验证了得到的相似律.罗忠等[12]采用方程分析与敏感性分析相结合的方法,研究了旋转层合薄壁短圆柱壳振动畸变相似,提出了一种畸变模型的几何尺寸区间确定方法.Rezaeepazhand 和 Simitses[13,14]使用方程分析法研究了一般层合圆柱壳和双曲层合圆柱壳自振的相似律,并研究了层数、铺层顺序、材料参数等畸变对自振相似的影响.Ungbhakorn 等[15,16]利用方程分析法对对称正交层

* 国家自然科学基金项目(51868013,52068015)资助.
2024-11-05 收到修改稿, 2024-11-13 网络首发.
** 通讯作者. E-mail:yuwei@glut.edu.cn.

合圆柱壳和反对称正交层合圆柱壳的振动进行相似分析，并采用解析法研究了完全相似模型、铺层顺序畸变模型和材料畸变模型对原型自振相似预测的准确性；结果表明，材料畸变模型预测精度不佳. Torkamani 等[17]基于方程分析法，采用数值模拟和结构实验的方法，对正交加筋圆柱壳进行了自振相似预测，并通过改变加筋肋数量、材料、截面形状以解决加筋肋厚度过小的问题. 罗忠等[18]基于 Donnell 理论和最小热力学能量原理，推导出一端固支另一端自由边界条件下带锥形齿薄壁短圆筒的频率方程，根据量纲分析法建立了该结构的动力学相似律，并设计了锥形齿数量和形状改变的结构畸变模型，采用有限元法对原型和畸变模型的固有特性进行相似分析，验证了所提出相似律的有效性. Rosa 和 Franco[19]基于密加筋理论，利用经典模态法和能量分配法对圆柱壳与纵环加筋圆柱壳进行了自振及强迫振动相似数值分析. Liu 等[20,21]基于变幂法提出了耦合畸变相似方法，对圆柱-圆锥壳组合壳和螺栓连接的圆柱-圆锥壳组合壳进行了自振畸变相似分析，讨论了长度、半径或连接螺栓对建立畸变模型的影响；并利用数值模拟和模态实验验证了新相似方法的有效性.

关于旋转壳和扁壳的振动相似预测也取得了一些进展. 罗忠团队[22,23]基于最小二乘法建立了薄壁圆锥壳和凹形薄壁锥壳的自振畸变相似律，通过数值模拟和模态实验，验证了提出的畸变相似律的正确性. 孟强强等[24]采用方程分析法和敏感性分析法建立了中大型薄壁截锥壳的自振畸变相似律，通过有限元法验证了畸变相似关系的准确性. Ungbhakorn 和 Singhatanadgid[25]通过能量法推导了层合双曲扁壳结构的自振相似律；结果表明铺层顺序畸变的模型能准确预测原型的振动特性，但材料畸变模型不能准确预测原型的振动特性. Rezaee 和 Yazdi[26]利用方程分析法对含碳纳米管的层合双曲壳体进行了非线性振动相似分析，并探讨了碳纳米管重量百分比、大挠度、长径比和铺叠顺序对模型设计的影响. 于伟和李正良[27]利用能量法建立了加筋扁球壳自由振动的相似律，并研究了加筋肋截面畸变和材料畸变对结构固有频率的影响.

关于固支扁球壳厚度和材料畸变的自振相似预测研究鲜有报道. 因此，对固支扁球壳的自振频率方程和固有频率解分别进行相似转换，结合振型表达式，并分别获得固支扁球壳自振的广义相似条件和固有频率缩比关系；并利用通过理论验证的数值模拟方法，对固支扁球壳厚度畸变、厚度和材料均畸变的自振缩比模型进行研究.

1　扁球壳的固有频率

当球壳矢跨比 $H/b<1/4$ 时可视为扁球壳，壳体中面可用极坐标表示. 固支光滑扁球壳剖面如图 1 所示.

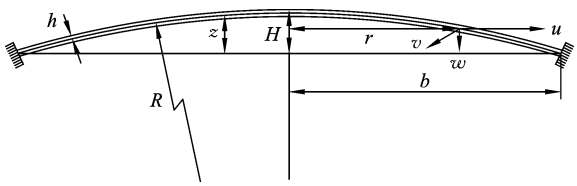

图 1　光滑扁球壳剖面图

Fig. 1　Cross-sectional view of a shallow spherical shell

扁球壳振型方程为[1]：

$$D\nabla^2\nabla^2 W+\frac{1}{R}\nabla^2 F-\rho h\omega^2 W=0 \tag{1a}$$

$$\frac{Eh}{R}\nabla^2 W-\nabla^2\nabla^2 F=0 \tag{1b}$$

式中：ρ 为壳体密度，h 为壳体厚度，E 为弹性模量，ν 为泊松比，R 为曲率半径，ω 为壳体振动圆频率，W 为 z 向位移振型函数，F 为应力振型函数，弯曲刚度 $D=Eh^3/[12(1-\nu^2)]$，球坐标拉普拉斯算子表达式 $\nabla^2=\partial^2/\partial r^2+r^{-1}\partial/\partial r+r^{-2}\partial^2/\partial\theta^2$.

引入新的函数 Φ 将振型方程式(1)化简成为一个微分方程，并采用分离变量法得到位移振型函数 Φ 的一般解为[1]：

$$\Phi(r,\theta)=[C_1 r^m+C_3 r^{m+2}+C_5 J_m(\alpha r)+C_7 I_m(\alpha r)]\cos(n\theta) \tag{2}$$

式中：C_1、C_3、C_5、C_7 为常参数，$J_m(x)$ 为第一类贝塞尔函数，$I_m(x)$ 为第一类修正贝塞尔函数，m 为壳体振型的节圆，n 为节径，$\alpha=\left[\left(\frac{\rho}{E}\omega^2-\frac{1}{R^2}\right)\frac{Eh}{D}\right]^{0.25}$.

将一般解代入固支边界条件 $r=b$，$u=v=w=\partial w/\partial r=0$，其中：$b$ 为扁球壳底面半径，u、v、w 分别为扁球壳径向、切向和 z 向的位移，可得固支扁球壳

的自振频率方程[1]：

$$\{(\alpha b)^2\left[-1+\frac{3-\nu}{1+\nu}\left(\frac{\alpha b}{\lambda}\right)^4\right]-8m(m+1)\}(\alpha b)\cdot I_m(\alpha b)J_{m-1}(\alpha b)-\left\{(\alpha b)^2\left[-1+\frac{3-\nu}{1+\nu}\left(\frac{\alpha b}{\lambda}\right)^4\right]+8m(m+1)\right\}(\alpha b)I_{m-1}(\alpha b)J_m(\alpha b)+16m^2(m+1)J_m(\alpha b)I_m(\alpha b)+4(m+1)(\alpha b)^2J_{m-1}(\alpha b)I_{m-1}(\alpha b)=0 \tag{3}$$

式中[1]：

$$\begin{cases}\lambda^4=\dfrac{12(1-\nu^2)b^4}{R^2h^2}\\ (\alpha b)^4=12(1-\nu^2)\left(\dfrac{b}{h}\right)^2\left[\Omega^2-\left(\dfrac{b}{R}\right)^2)\right]\\ \Omega^2=\dfrac{\rho b^2}{E}\omega^2\end{cases} \tag{4}$$

在扁球壳中存在如下几何关系[2]：

$$R=\frac{b^2}{2H} \tag{5}$$

其中：H 为扁球壳矢高.

将式(5)代入式(4)中的第一式可得[2]：

$$\lambda^4=48(1-\nu^2)\left(\frac{H}{h}\right)^2 \tag{6}$$

求解频率方程式(3)可得(αb)的值，将(αb)值和式(4)中的第三式代入式(4)中的第二式，可得固支扁球壳自振的圆频率表达式：

$$\omega=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\sqrt{\frac{(\alpha b)^4}{48(1-\nu^2)}\frac{1}{\left(\frac{H}{h}\right)^2}+1} \tag{7}$$

2 固支扁球壳的固有频率相似关系

2.1 一般情形下固支扁球壳的固有频率相似关系

将式(6)代入式(3)，并令$(\alpha b)=x$，固支扁球壳的自振频率方程可简化为：

$$\left[\frac{3-\nu}{48(1-\nu^2)(1+\nu)}\frac{x^5}{\left(\frac{H}{h}\right)^2}-x^3-8m(m+1)x\right]\cdot I_m(x)J_{m-1}(x)-\left[\frac{3-\nu}{48(1-\nu^2)(1+\nu)}\frac{x^5}{\left(\frac{H}{h}\right)^2}-x^3+8m(m+1)x\right]I_{m-1}(x)J_m(x)+16m^2(m+1)\cdot J_m(x)I_m(x)+4(m+1)x^2J_{m-1}(x)I_{m-1}(x)=0 \tag{8}$$

缩比模型和原型的频率方程分别为：

$$\left[\frac{3-\nu_{\mathrm{mo}}}{48(1-\nu_{\mathrm{mo}}^2)(1+\nu_{\mathrm{mo}})}\frac{x_{\mathrm{mo}}^5}{\left(\frac{H_{\mathrm{mo}}}{h_{\mathrm{mo}}}\right)^2}-x_{\mathrm{mo}}^3-8m_{\mathrm{mo}}(m_{\mathrm{mo}}+1)\cdot x_{\mathrm{mo}}\right]I_m(x_{\mathrm{mo}})J_{m-1}(x_{\mathrm{mo}})-\left[\frac{3-\nu_{\mathrm{mo}}}{48(1-\nu_{\mathrm{mo}}^2)(1+\nu_{\mathrm{mo}})}\frac{x_{\mathrm{mo}}^5}{\left(\frac{H_{\mathrm{mo}}}{h_{\mathrm{mo}}}\right)^2}-x_{\mathrm{mo}}^3+8m_{\mathrm{mo}}(m_{\mathrm{mo}}+1)x_{\mathrm{mo}}\right]I_{m-1}(x_{\mathrm{mo}})\cdot J_m(x_{\mathrm{mo}})+16m_{\mathrm{mo}}^2(m_{\mathrm{mo}}+1)J_m(x_{\mathrm{mo}})I_m(x_{\mathrm{mo}})+4(m_{\mathrm{mo}}+1)x_{\mathrm{mo}}^2J_{m-1}(x_{\mathrm{mo}})I_{m-1}(x_{\mathrm{mo}})=0 \tag{9}$$

$$\left[\frac{3-\nu_{\mathrm{p}}}{48(1-\nu_{\mathrm{p}}^2)(1+\nu_{\mathrm{p}})}\frac{x_{\mathrm{p}}^5}{\left(\frac{H_{\mathrm{p}}}{h_{\mathrm{p}}}\right)^2}-x_{\mathrm{p}}^3-8m_{\mathrm{p}}(m_{\mathrm{p}}+1)x_{\mathrm{p}}\right]\cdot I_{\mathrm{p}}(x_{\mathrm{p}})J_{m-1}(x_{\mathrm{p}})-\left[\frac{3-\nu_{\mathrm{p}}}{48(1-\nu_{\mathrm{p}}^2)(1+\nu_{\mathrm{p}})}\frac{x_{\mathrm{p}}^5}{\left(\frac{H_{\mathrm{p}}}{h_{\mathrm{p}}}\right)^2}-x_{\mathrm{p}}^3+8m_{\mathrm{p}}(m_{\mathrm{p}}+1)x_{\mathrm{p}}\right]I_{m-1}(x_{\mathrm{p}})J_m(x_{\mathrm{p}})+16m_{\mathrm{p}}^2(m_{\mathrm{p}}+1)J_m(x_{\mathrm{p}})I_m(x_{\mathrm{p}})+4(m_{\mathrm{p}}+1)\cdot x_{\mathrm{p}}^2J_{m-1}(x_{\mathrm{p}})I_{m-1}(x_{\mathrm{p}})=0 \tag{10}$$

其中下标 mo 表示缩比模型的参数，下标 p 表示原型的参数.

假设相似因子：

$$C_e=\frac{e_{\mathrm{p}}}{e_{\mathrm{mo}}},\left(e=\nu,x,\frac{H}{h},m,I_m(x),I_{m-1}(x),J_m(x),J_{m-1}(x)\right) \tag{11}$$

将相似因子式(11)代入原型的频率方程式(10)，可得：

$$\left[\frac{C_x^5}{C_{H/h}^2}\frac{3-C_\nu\nu_{\mathrm{mo}}}{48(1-C_\nu^2\nu_{\mathrm{mo}}^2)(1+C_\nu\nu_{\mathrm{mo}})}\frac{x_{\mathrm{mo}}^5}{\left(\frac{H_{\mathrm{mo}}}{h_{\mathrm{mo}}}\right)^2}-C_x^3x_{\mathrm{mo}}^3-8C_xC_mm_{\mathrm{mo}}(C_mm_{\mathrm{mo}}+1)x_{\mathrm{mo}}\right]C_{I_m}C_{J_{m-1}}I_m(x_{\mathrm{mo}})\cdot J_{m-1}(x_{\mathrm{mo}})-\left[\frac{C_x^5}{C_{H/h}^2}\frac{3-C_\nu\nu_{\mathrm{mo}}}{48(1-C_\nu^2\nu_{\mathrm{mo}}^2)(1+C_\nu\nu_{\mathrm{mo}})}\cdot\frac{x_{\mathrm{mo}}^5}{\left(\frac{H_{\mathrm{mo}}}{h_{\mathrm{mo}}}\right)^2}-C_x^3x_{\mathrm{mo}}^3+8C_xC_mm_{\mathrm{mo}}(C_mm_{\mathrm{mo}}+1)x_{\mathrm{mo}}\right]\cdot C_{I_{m-1}}C_{J_m}I_{m-1}(x_{\mathrm{mo}})J_m(x_{\mathrm{mo}})+16C_m^2C_{J_m}C_{I_m}m_{\mathrm{mo}}^2\cdot(C_mm_{\mathrm{mo}}+1)J_m(x_{\mathrm{mo}})I_m(x_{\mathrm{mo}})+4C_x^2C_{J_{m-1}}C_{I_{m-1}}\cdot(C_mm_{\mathrm{mo}}+1)x_{\mathrm{mo}}^2J_{m-1}(x_{\mathrm{mo}})I_{m-1}(x_{\mathrm{mo}})=0 \tag{12}$$

首先研究贝塞尔函数的广义相似条件，m 为正

整数或零时第一类贝塞尔函数 $J_m(x)$ 表达式为：

$$J_m(x)=\frac{x^m}{m!\ 2^m}-\frac{x^{m+2}}{1!\ (m+1)!\ 2^{m+2}}+\frac{x^{m+4}}{2!\ (m+2)!\ 2^{m+4}}+\cdots+(-1)^k\frac{x^{m+2k}}{k!\ (m+k)!\ 2^{m+2k}} \tag{13}$$

缩比模型和原型的第一类贝塞尔函数表达式分别为：

$$J_m(x_{\mathrm{mo}})=\frac{x_{\mathrm{mo}}^m}{m!\ 2^m}-\frac{x_{\mathrm{mo}}^{m+2}}{1!\ (m+1)!\ 2^{m+2}}+\frac{x_{\mathrm{mo}}^{m+4}}{2!\ (m+2)!\ 2^{m+4}}+\cdots+(-1)^k\frac{x_{\mathrm{mo}}^{m+2k}}{k!\ (m+k)!\ 2^{m+2k}} \tag{14}$$

$$J_m(x_{\mathrm{p}})=\frac{x_{\mathrm{p}}^m}{m!\ 2^m}-\frac{x_{\mathrm{p}}^{m+2}}{1!\ (m+1)!\ 2^{m+2}}+\frac{x_{\mathrm{p}}^{m+4}}{2!\ (m+2)!\ 2^{m+4}}+\cdots+(-1)^k\frac{x_{\mathrm{p}}^{m+2k}}{k!\ (m+k)!\ 2^{m+2k}} \tag{15}$$

将相似因子 $C_x=x_{\mathrm{p}}/x_{\mathrm{mo}}$ 代入原型的第一类贝塞尔函数式(15)可得：

$$J_m(x_{\mathrm{p}})=C_x^m\left[\frac{x_{\mathrm{mo}}^m}{m!\ 2^m}-\frac{C_x^2x_{\mathrm{mo}}^{m+2}}{1!\ (m+1)!\ 2^{m+2}}+\frac{C_x^4x_{\mathrm{mo}}^{m+4}}{2!\ (m+2)!\ 2^{m+4}}+\cdots+(-1)^k\frac{C_x^{2k}x_{\mathrm{mo}}^{m+2k}}{k!\ (m+k)!\ 2^{m+2k}}\right] \tag{16}$$

根据相似理论，原型和缩比模型的第一类贝塞尔方程中的系数对应成比例，则存在相似条件：

$$C_x^m=C_x^2=C_x^4=\cdots=C_x^{2k}=1 \tag{17}$$

第一类修正贝塞尔函数 $I_m(x)$ 表达式为：

$$I_m(x)=\frac{x^m}{m!\ 2^m}+\frac{x^{m+2}}{1!\ (m+1)!\ 2^{m+2}}+\frac{x^{m+4}}{2!\ (m+2)!\ 2^{m+4}}+\cdots+\frac{x^{m+2k}}{k!\ (m+k)!\ 2^{m+2k}}$$
$$(m=0,1,2,\cdots) \tag{18}$$

同理可得与式(17)相同的相似条件.

由缩比模型频率方程式(9)和原型的频率方程式(12)中的系数对应成比例，以及式(2)和式(17)，可得一般情形下固支扁球壳自振的广义相似条件为：

$$C_m=C_n=1,\quad C_H=C_h,\quad C_\nu=1 \tag{19}$$

对式(7)进行相似转换，并结合式(19)和工程频率 $f=\omega/(2\pi)$，可得一般情形下固支扁球壳固有频率的缩比关系：

$$C_f=\frac{1}{C_R}\sqrt{\frac{C_E}{C_\rho}} \tag{20}$$

2.2　矢厚比较小时固支扁球壳的固有频率相似关系

当球壳形状越来越扁时，b/R 越来越小，则 λ 趋于零，$1/\lambda$ 趋于无穷，此时式(3)中仅保留含 $1/\lambda$ 的项，固支扁球壳的自振频率方程化简为：

$$J_m(\alpha b)I_{m-1}(\alpha b)-I_m(\alpha b)J_{m-1}(\alpha b)=0 \tag{21}$$

由式(21)可知，(αb) 值由 m 值决定，并且可以求 (αb) 的值.

由式(4)中的第二、第三式解出固支扁球壳的圆频率表达式为：

$$\omega=\sqrt{\frac{(\alpha b)^4h^2}{12(1-\nu^2)b^4}+\frac{1}{R^2}}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{22}$$

如果满足条件：$\lambda-2(n+m)\leqslant 0$，其中：$m$ 为径向模态波数，n 为环向模态波数，λ 由式(6)确定；则式(21)就具有足够的精度.

对式(21)进行相似转换并结合位移振型式(2)，得到矢厚比较小时固支扁球壳自振的广义相似条件为：

$$C_m=C_n=1,\quad C_\nu=1 \tag{23}$$

对式(22)进行相似转换，并结合 $f=\omega/(2\pi)$，得到矢厚比较小时固支扁球壳的固有频率缩比关系为：

$$C_f=\frac{C_h}{C_b^2}\sqrt{\frac{C_E}{C_\rho}} \tag{24}$$

2.3　矢厚比较大时固支扁球壳固有频率相似关系

将式(5)代入式(7)可得固支扁球壳的圆频率表达式：

$$\omega=\sqrt{\frac{E}{\rho}}\frac{h}{b^2}\sqrt{\frac{(\alpha b)^4}{12(1-\nu^2)}+4\frac{H^2}{h^2}} \tag{25}$$

当 H/h 大于 25 时[2]，可忽略式(25)右侧根号中首项，该式简化为：

$$\omega=2\sqrt{\frac{E}{\rho}}\frac{H}{b^2} \tag{26}$$

因忽略了式(25)中的 (αb) 项，也就忽略了频率方程式(3)对相似条件的影响，根据位移振型式(2)，可得矢厚比较大时固支扁球壳自振的广义相似条件为：

$$C_m=C_n=1 \tag{27}$$

对式(26)进行相似转换,并结合 $f=\omega/(2\pi)$,可得矢厚比较大时固支扁球壳的固有频率缩比关系为:

$$C_f=\frac{C_H}{C_b^2}\sqrt{\frac{C_E}{C_\rho}} \tag{28}$$

3 固支扁球壳自振的有限元算例验证与相似预测

3.1 一般情形下固支扁球壳自振数值模拟验证与相似预测

对固支边界扁球壳自振进行数值模拟验证,结构具体参数见表 1. 通过查表[1]获得(αb)值,并结合式(4)中第二、第三式及 $f=\omega/(2\pi)$求出扁球壳的工程频率. 采用 ANSYS 软件对固支扁球壳进行模态分析,使用 shell181 单元,网格采用四边形映射网格. 选取固支扁球壳前六阶模态进行模拟值与理论值的对比,结果列于表 2. 其中,相对误差为:(数值模拟结果-理论结果)/理论结果×100%. 由表 2 可知,固支扁球壳的模拟结果和理论结果吻合较好,说明固支扁球壳的自振数值模拟是准确和可靠的.

表 1 一般光滑扁球壳的几何和材料参数

Table 1 Geometrical and material parameters of the shallow spherical shell

几何参数 λ	底面半径 b (m)	矢高 H (m)	厚度 h (m)	弹性模量 E (Pa)	密度 ρ (kg·m^{-3})	泊松比 ν
7.5	1	0.1	0.0118	2.1×10^{11}	7850	0.3

表 2 $\lambda=7.5$ 时固支扁球壳前六阶模态分析的模拟与理论结果对比

Table 2 Comparison of simulated and theoretical results for the first six order modals of the clamped shallow spherical shell with $\lambda=7.5$

自振模态波数 (m,n)	αb	模拟值 (Hz)	理论值 (Hz)	误差 (%)	模拟振型图
(0,1)	5.555	184.956	187.969	−1.60	
(0,2)	6.346	200.041	202.776	−1.35	
(0,3)	7.364	226.28	229.159	−1.26	
(1,1)	7.956	244.74	248.443	−1.49	
(0,4)	8.468	264.163	267.456	−1.23	
(1,2)	9.279	297.702	301.923	−1.40	

以 $\lambda=7.5$ 的扁球壳为原型进行自振相似关系的验证,原型和缩比模型的几何与材料参数见表 3,令矢高和厚度的缩比因子相同,单独选取底面半径缩比因子,缩比模型和原型的材料相同. 选取的缩比因子分别为:缩比模型 1 与原型的底面半径相同,矢高与厚度的缩比因子均为 1/5;缩比模型 2 的底面半径缩比因子为 1/10,矢高与厚度的缩比因子均为 1/8. 采用 ANSYS 得到原型和缩比模型的工程频率,利用式(20)求得固有频率的缩比系数,利用缩比模型的自振频率得到其原型的自振频率预测结果,

并与原型的固有频率结果进行对比，详见表 4 和表 5. 其中，百分比误差为：(原型预测固有频率-原型固有频率)/原型固有频率×100%. 由表 4 和表 5 可知，在一般情形下固支扁球壳厚度畸变的情况下，根据广义相似条件式(19)设计的缩比模型，结合固有频率缩比关系式(20)，能够准确预测原型的固有频率，且缩比模型和其原型的振型相同.

表 3　扁球壳原型与缩比模型的几何和材料参数

Table 3　Geometric and material parameters of the shallow spherical shell prototype and scaled models

	底面半径 b (m)	矢高 H (m)	厚度 h (m)	弹性模量 E (Pa)	密度 ρ (kg·m^{-3})	泊松比 ν
原型	1	0.1	0.0118	2.1×10^{11}	7850	0.3
缩比模型 1	1	0.02	0.00236	2.1×10^{11}	7850	0.3
缩比模型 2	0.1	0.0125	0.001475	2.1×10^{11}	7850	0.3

表 4　缩比模型 1 对固支扁球壳原型的自振相似预测

Table 4　Similarity prediction for free vibration of the clamped shallow spherical shell prototype by the scaled model 1

自振模态波数 (m,n)	原型频率 (Hz)	模型频率 (Hz)	预测原型频率 (Hz)	误差 (%)	原型振型图	缩比模型 1 振型图
(0,1)	184.956	37.5686	187.843	1.56		
(0,2)	200.041	40.539	202.695	1.33		
(0,3)	226.28	45.8354	229.177	1.28		
(1,1)	244.74	49.694	248.47	1.52		
(0,4)	264.163	53.5054	267.527	1.27		
(1,2)	297.702	60.4158	302.079	1.47		

表 5　缩比模型 2 对固支扁球壳原型的自振相似预测

Table 5　Similarity prediction for free vibration of the clamped shallow spherical shell prototype by the scaled model 2

自振模态波数 (m,n)	原型频率 (Hz)	模型频率 (Hz)	预测原型频率 (Hz)	误差 (%)	原型振型图	缩比模型 2 振型图
(0,1)	184.956	2291.1	183.288	0.9		
(0,2)	200.041	2481.44	198.515	0.76		
(0,3)	226.28	2807.69	224.615	0.74		

续表

自振模态波数 (m,n)	原型频率 (Hz)	模型频率 (Hz)	预测原型频率 (Hz)	误差 (%)	原型振型图	缩比模型 2 振型图
(1,1)	244.74	3032.44	242.595	0.88		
(0,4)	264.163	3277.9	262.232	0.73		
(1,2)	297.702	3689.91	295.1928	0.84		

3.2 矢厚比较小时固支扁球壳自振相似预测

扁球壳原型和缩比模型的几何与材料参数见表 6. 扁球壳原型的矢厚比取值为 0.9456，原型和缩比模型的材料相同，底面半径和矢高的缩比因子均为 1/10，厚度缩比因子为 1/5. 采用 ANSYS 模拟得到原型和模型的工程频率，用式(24)求得固有频率的缩比系数，由缩比模型的自振频率预测得到其原型的自振频率预测结果，并与原型的固有频率结果进行比较，详见表 7. 由表 7 可知，当矢厚比较小且固支扁球壳厚度发生畸变时，依据广义相似条件式(23)设计的缩比模型，结合固有频率缩比关系式(24)，能够准确预测原型的固有频率，且缩比模型与其原型的振型一致.

表 6 矢厚比较小时扁球壳原型及缩比模型的材料和几何参数

Table 6 Geometric and material parameters of the shallow spherical shell prototype and the scaled model with a small rise-to-thickness ratio

	底面半径 b (m)	矢高 H (m)	厚度 h (m)	弹性模量 E (Pa)	密度 ρ (kg · m^{-3})	泊松比 ν
原型	1	0.01	0.01058	2.1×10^{11}	7850	0.3
缩比模型	0.1	0.001	0.002116	2.1×10^{11}	7850	0.3

表 7 矢厚比较小缩比模型对固支扁球壳原型的自振相似预测

Table 7 Similarity prediction for free vibration of the clamped shallow spherical shell prototype by the scaled model with a small rise-to-thickness ratio

自振模态波数 (m,n)	原型频率 (Hz)	模型频率 (Hz)	预测原型频率 (Hz)	误差 (%)	原型振型图	缩比模型振型图
(0,1)	58.784	1132.23	56.612	3.69		
(0,2)	93.514	1840.1	92.005	1.61		
(1,1)	161.179	3194.99	159.750	0.89		
(1,2)	223.383	4429.77	221.489	0.85		
(2,1)	316.847	6275.7	313.785	0.97		
(2,2)	405.337	8013.89	400.695	1.15		

3.3　矢厚比较大时固支扁球壳自振相似预测

大型煤气柜顶为径环加筋扁球壳，现不考虑加筋肋，取光滑扁球壳为例进行验证. 扁球壳原型和缩比模型的几何及材料参数见表 8，扁球壳缩比模型的几何参数相同，底边半径和矢高的缩比因子均为 1/40，厚度缩比因子为 1/3.5，四种缩比模型的材料分别为铁、铝、铜和 PVC. 采用 ANSYS 得到原型和缩比模型的工程频率，用式(28)求得固有频率的缩比系数，根据缩比模型的自振频率得到其原型的自振频率预测结果，并与原型的固有频率结果进行对比，详见表 9. 由表 9 可知，固支扁球壳矢厚比较大时，厚度和材料均畸变的缩比模型能够准确预测原型的固有频率，且缩比模型与其原型的振型相同，表明固有频率的缩比关系式(28)是正确的.

表 8　矢厚比较大时扁球壳原型和缩比模型的材料与几何参数

Table 8　Geometric and material parameters of the shallow spherical shell prototype and scaled models with a large rise-to-thickness ratio

	底面半径 b (m)	矢高 H (m)	厚度 h (m)	弹性模量 E (Pa)	密度 ρ (kg·m^{-3})	泊松比 ν
原型	32.3	6.16	0.0075	2.1×10^{11}	7850	0.3
Fe 制缩比模型	0.8075	0.154	0.00214	2.1×10^{11}	7850	0.3
Al 制缩比模型	0.8075	0.154	0.00214	6.875×10^{10}	2762	0.3
Cu 制缩比模型	0.8075	0.154	0.00214	1.24×10^{11}	8918	0.33
PVC 制缩比模型	0.8075	0.154	0.00214	3.79×10^{9}	1500	0.4

表 9　矢厚比较大时缩比模型对固支扁球壳原型的自振相似预测

Table 9　Similarity prediction for free vibration of the clamped shallow spherical shell prototype by scaled models with a large rise-to-thickness ratio

	自振模态波数(m,n)	原型频率 (Hz)	缩比模型频率 (Hz)	频率缩比系数	预测原型频率 (Hz)	误差 (%)	原型振型图	缩比模型振型图
Fe 制缩比模型	(1,0)	9.255	372.060	0.025	9.302	0.50		
	(1,1)	9.311	374.817	0.025	9.370	0.64		
	(1,2)	9.337	377.302	0.025	9.433	1.02		
Al 制缩比模型	(1,0)	9.255	358.891	0.0259	9.301	0.50		
	(1,1)	9.311	361.551	0.0259	9.364	0.57		
	(1,2)	9.337	363.948	0.0259	9.426	0.96		
Cu 制缩比模型	(1,0)	9.255	268.143	0.0347	9.298	0.46		
	(1,1)	9.311	270.19	0.0347	9.376	0.69		
	(1,2)	9.337	272.03	0.0347	9.439	1.10		

PVC 制缩比模型	(1,0)	9.255	114.215	0.0813	9.286	0.33		
	(1,1)	9.311	115.150	0.0813	9.362	0.54		
	(1,2)	9.337	115.989	0.0813	9.430	1.00		

4 结论

对固支扁球壳的自振频率方程和固有频率解分别进行相似转换，结合振型表达式，建立了不同矢厚比固支扁球壳自振的广义相似条件和缩比关系式. 采用理论分析验证了数值模拟的准确性和可靠性. 根据建立的相似关系设计了固支扁球壳的缩比模型，进而采用数值模拟对固支扁球壳进行厚度畸变、厚度和材料均畸变的自振相似预测，得到如下结论：

(1) 一般情形的固支扁球壳自振相似条件要求较多，缩比模型与原型需保持矢高和厚度的缩比因子相同，泊松比缩比因子为 1，以及振型相同($C_m=C_n=1$)，在这三个条件下缩比模型的固有频率能准确预测其原型的固有频率.

(2) 矢厚比较小时固支扁球壳自振相似条件要求较少，缩比模型与原型需满足泊松比缩比因子为 1，振型相同($C_m=C_n=1$)，在这两个条件下缩比模型的固有频率能准确预测其原型的固有频率.

(3) 矢厚比较大时固支扁球壳自振相似条件要求也较少，但要求缩比模型和原型的矢厚比均大于等于 25，振型相同($C_m=C_n=1$)，在这两个条件下缩比模型的固有频率能准确预测其原型的固有频率.

(4) 基于固支扁球壳的自振频率方程并结合振型表达式进行相似转换，提出了结构自振的缩比模型设计方法；根据固支扁球壳自振圆频率解的相似转换建立了结构的自振相似关系；这些为设计厚度和材料均畸变的固支扁球壳自振缩比模型奠定了基础.

参考文献

[1] 曹志远. 板壳振动理论[M]. 北京：中国铁道出版社，1983. (Cao Z Y. Vibration Theory of Plates and Shells[M]. Beijing：China Railway Press，1983. (in Chinese))

[2] Reissner E. On axi-symmetrical vibrations of shallow spherical shells[J]. Quarterly of Applied Mathematics，1955，XⅢ(3)：279-290.

[3] Reissner E. On vibrations of shallow spherical shells[J]. Journal of Applied Physics，1946，17：1038-1042.

[4] 王璠，刘人怀. 复合材料层合开顶扁球壳的非线性动态屈曲[J]. 固体力学学报，2001，22(3)：309-314. (Wang F，Liu R H. Nonlinear dynamic buckling of symmetrically laminated truncated spherical shell[J]. Guti Lixue Xuebao/Acta Mechanica Solida Sinica，2001，22(3)：309-314. (in Chinese))

[5] 杨增涛，徐加初. 矩形脉冲作用下复合材料层合扁球壳的冲击屈曲分析[J]. 固体力学学报，2006，27(3)：315-318. (Yang Z T，Xu J C. Analysis of impact buckling of laminated composite shallow spherical shells subjected to rectangular pulse[J]. Guti Lixue Xuebao/Acta Mechanica Solida Sinica，2006，27(3)：315-318. (in Chinese))

[6] Luo Z，Zhu Y P，Zhao X Y，Wang D Y. Determining dynamic scaling laws of geometrically distorted scaled models of a cantilever plate[J]. Journal of Engineering Mechanics，2016，142(4)：04015108-1-12.

[7] 罗忠，朱云鹏，韩清凯，王德友，刘永泉. 薄板结构畸变模型的动力学相似设计及几何区间确定[J]. 航空发动机，2015，41(3)：18-23. (Luo Z，Zhu Y P，Han Q K，Wang D Y，Liu Y Q. Detemination method of dynamic similitude and applicable structure size interval of distorted models for elastic thin plates[J]. Hangkong Fadongji/Aeroengine，2015，41(3)：18-23. (in Chinese))

[8] 罗忠，王有，韩清凯，江志农. 圆环薄板类构件畸变相似关系的确定方法[J]. 机械工程学报，2017，53(23)：14-19. (Luo Z，Wang Y，Han Q K，Jiang Z

N. Determining method of distorted scaling laws of the thin walled annular plates′ structures[J]. Jixie Gongcheng Xuebao/Journal of Mechanical Engineering, 2017, 53(23): 14-19.(in Chinese))

[9] Luo Z, Zhu Y P, Zhao X Y, Wang D Y. High-order vibrations dynamic scaling laws of distorted scaled models of thin-walled short cylindrical shells[J]. Mechanics Based Design of Structures and Machines: An International Journal, 2015, 43(4): 514-534.

[10] Han Q B, Guo J, Sun N, Luo Z. Inherent characteristic similarity analysis on short thin-walled cylindrical shell[J]. Applied Mechanics and Materials, 2014, 607: 386-392.

[11] Zhu Y P, Luo Z, Zhao X Y, Wang D Y. The dynamic similitude design of a thin-walled cylindrical shell by considering the strength requirement[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering, 2016, 230(2): 234-243.

[12] 罗忠，朱云鹏，韩清凯，王德友. 复合材料层合薄壁短圆柱壳动力学相似模型几何适用区间确定方法[J]. 机械工程学报，2015，51(17)：43-51.(Luo Z, Zhu Y P, Han Q K, Wang D Y. Structure size interval of similar test model of the laminated composite thin-wall short cylinder shell[J]. Jixie Gongcheng Xuebao/Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(17): 43-51.(in Chinese))

[13] Rezaeepazhand J, Simitses G J. Design of scaled down models for predicting shell vibration response[J]. Journal of Sound and Vibration, 1996, 195(2): 301-311.

[14] Rezaeepazhand J, Simitses G J. Structural similitude for vibration response of laminated cylindrical shells with double curvature[J]. Composites Part B: Engineering, 1997, 28B: 195-200.

[15] Ungbhakorn V, Singhatanadgid P. Similitude and physical modeling for buckling and vibration of symmetric cross-ply laminated circular cylindrical shells[J]. Journal of Composite Materials, 2003, 37(19): 1697-1712.

[16] Ungbhakorn V, Wattanasakulpong N. Structural similitude and scaling laws of anti-symmetric cross-ply laminated cylindrical shells for buckling and vibration experiments[J]. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 2007, 7(4): 609-627.

[17] Torkamani S, Navazi H M, Jafari A A, Bagheri M. Structural similitude in free vibration of orthogonally stiffened cylindrical shells[J]. Thin-Walled Structures, 2009, 47: 1316-1330.

[18] 罗忠，张凯，韩清凯，王德友. 带齿薄壁短圆筒振动试验模型的相似设计方法[J]. 机械工程学报，2013，49(21)：132-139.(Luo Z, Zhang K, Han Q K, Wang D Y. Similarity design method of test model of thin-walled short cylindrical shell with complex annular labyrinth[J]. Jixie Gongcheng Xuebao/Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(21): 132-139.(in Chinese))

[19] De Rosa S, Franco F. Analytical similitudes applied to thin cylindrical shells[J]. Advances in Aircraft and Spacecraft Science, 2015, 2(4): 403-425.

[20] Liu P T, Wang X P, Wang Y Q, Mao F R. Research on coupling distorted similitude method of coupled cylindrical-conical shells[J]. Thin-Walled Structures, 2022, 179: 109734-1-12.

[21] Liu P T, Wang X P, Wang Y Q, Sun J, Li X. Research on the distorted similitude of bolt-connected coupled cylindrical-conical shells[J]. Structures, 2024, 68: 107068-1-15.

[22] 罗忠，张永强，朱云鹏，李朝帅. 薄壁圆锥壳畸变相似模型设计及几何区间确定方法[J]. 东北大学学报(自然科学版)，2019，40(11)：1600-1605.(Luo Z, Zhang Y Q, Zhu Y P, Li C S. Design of distortion similar model for thin-walled conical shell and method for determining geometric interval[J]. Dongbei Daxue Xuebao/Journal of Northeastern University(Natural Science), 2019, 40(11): 1600-1605.(in Chinese))

[23] He F X, Luo Z, Li L, Zhang Y Q, Guo S W. Structural similitudes for the vibration characteristics of concave thin-walled conical shell[J]. Thin-Walled Structures, 2021, 159: 107218-1-12.

[24] 孟强强，李昊，王宇，杨志宏，夏鑫，于晓光. 薄壁截锥壳畸变相似关系的确定方法[J]. 辽宁科技大学学报，2021，44(5)：386-392.(Meng Q Q, Li H, Wang Y, Yang Z H, Xia X, Yu X G. Determining method of distortion similarity relation of thin-walled truncated conical shells[J]. Liaoning Keji Daxue Xue-

bao/Journal of University of Science and Technology Liaoning, 2021, 44(5): 386-392. (in Chinese))

[25] Ungbhakorn V, Singhatanadgid P. A scaling law for vibration response of laminated doubly curved shallow shells by energy approach[J]. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2009, 16: 333-344.

[26] Rezaee S, Yazdi A A. Similarity conditions for predicting the effect of carbon nano-tubes on the non-linear frequency of laminated doubly curved shells[J]. Structures, 2022, 46: 1618-1625.

[27] 于伟,李正良. 基于能量法的加筋扁球壳轴对称自振缩尺模型研究[J]. 工程力学, 2016, 33(11): 155-162. (Yu W, Li Z L. Structural similitude for axi-aymmetric free vibration of stiffened shallow spherical shells by energy method[J]. Gongcheng Lixue/Engineering Mechanics, 2016, 33(11): 155-162. (in Chinese))

A Scaled Model of Geometric and Material Distortion in the Free Vibration of Clamped Shallow Spherical Shells

Wei Yu[1,2] Shuai Wang[1]

([1]*Guangxi Key Laboratory of Green Building Materials and Construction Industrialization, Guilin University of Technology, Guilin*, 541004)

([2]*Guangxi Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Guilin University of Technology, Guilin*, 541004)

Abstract Shallow spherical shells are widely used in large structures, such as launch vehicles, nuclear containments, and gasholders. Studying scaled models of geometric and material distortion in the free vibration of large, thin-walled clamped shallow spherical shells is essential. First, frequency equations and natural frequency solutions for clamped shallow spherical shells are utilized to apply similarity transformation, leading to the derivation of generalized similarity conditions and scaling laws for the free vibration of these shells. The numerical approach is then validated by comparing the theoretical natural frequencies of clamped shallow spherical shells. Finally, geometric and material distortion similarity predictions for the free vibration of clamped shallow spherical shells with different rise-to-thickness ratios are investigated by numerical simulations. Results indicate that scaled models for clamped shallow spherical shells with different rise-to-thickness ratios, designed according to similarity conditions and incorporating the corresponding generalized similarity condition of mode shape and the natural frequency scaling relationship, can accurately predict the free vibration characteristics of the prototypes. For the free vibration of clamped shallow spherical shells with medium, small, and large rise-to-thickness ratios, in addition to meet the same mode shape, the distorted scaling laws also need to ensure that the scaling factors of rise-to-thickness ratio and Poisson's ratio equal 1, the scaling factor of Poisson's ratio is 1, and the rise-to-thickness ratios of scaled models and the prototype are no less than 25. The method and results of this study offer valuable insights for the design and experiments of scaled models for similar shells with thickness and material distortion.

Key words shallow spherical shells, free vibration, distortion, rise-to-thickness ratio, scaling law