

# 物理信息神经网络方法求解平面应力问题<sup>\*</sup>

杜轲<sup>1,2</sup> 林志鹏<sup>1,2</sup> 吴文贤<sup>1,2</sup> 骆欢<sup>3</sup> 王自法<sup>1,2\*\*</sup> 温瑞智<sup>1,2</sup>

(<sup>1</sup> 中国地震局工程力学研究所地震工程与工程振动重点实验室, 哈尔滨, 150080)

(<sup>2</sup> 地震灾害防治应急管理部重点实验室, 哈尔滨, 150080)(<sup>3</sup> 三峡大学土木与建筑学院, 宜昌, 443002)

**摘要** 本文采用一种物理信息神经网络(PINN)的平面应力问题求解方法,首先在求解域 $[x, y]$ 内随机生成内质点和边界质点,然后将平面应力问题中内质点的几何方程、本构方程、平衡方程以及边界质点的边界条件物理约束引入到神经网络模型的损失函数中,使模型具有物理意义,通过最小化损失函数使其逼近偏微分方程(PDEs)的解.可见,本方法没有网格划分的过程,只有优化训练内质点和边界质点损失函数的过程.因此,PINN方法从本质上是一种无网格方法,可以解决传统有限元平面应力分析中因为网格划分引起的剪切锁死问题.随后通过算例分析对比有限元方法(FEM),验证所提出方法的可行性和有效性.算例结果分析表明,PINN方法能够在不需要任何标签数据的前提下求解平面应力问题,以及解决有限元模型因为网格划分造成的虚假剪变形带来的有限元缺陷:剪切锁死.

**关键词** 平面应力问题,神经网络,机器学习,物理信息,剪切锁死

**DOI:** 10.19636/j.cnki.cjasm42-1250/o3.2024.054

## 0 引言

在工程领域,平面应力问题一直是一个备受关注的研究领域,对平面应力问题的研究不仅有助于理解材料在受力状态下的行为,还对工程结构的设计和分析具有重要意义.过去几十年来,学术界对平面应力问题进行了广泛的研究,提出了不同的理论模型和解决方法.然而,随着工程领域的不断发展和需求的增加,对于更高效、精确地求解平面应力问题的需求也日益迫切.2011年,薛俊好,邓忠林等<sup>[1]</sup>采用三角形单元对弹性薄板弯曲问题进行有限元分析,讨论了板壳平面应力状态及弯曲时候的应力状态,为后续的有限元模拟打下基础.2013年,党像梁,吕西林等<sup>[2]</sup>为了研究自复位剪力墙抗震性能进行了实体和平面单元的有限元分析,用有限元软件对自复位预应力预制剪力墙进行非线性有限元分析,并进行了低周往复荷载试验,二者对比后得到有限元模型能很好的模拟侧向承载力和卸载刚度等力

学性能,但难以体现平面外的变形和受力状态.2015年曹子龙,关玉璞等<sup>[3]</sup>为了避免有限元在工程中计算精度差,收敛慢的缺点,通过研究二维线弹性开孔板的应力求解问题,推导了适用于求解带圆孔薄板问题的极坐标系下的二应力插值矩阵,并应用到新的有限单元序列中,从而得到一种新的求解方法.但是这种方法只适用于求解二维弹性带孔薄板受拉或受弯问题,普遍性不强,并且在有限元方法网格划分时仍然需要考虑网格划分的密度问题.这些有限元分析方法都存在一定的有限元分析缺陷,为了提高计算精度,需要牺牲计算效率去提高网格划分的密度,但是追求计算效率反而需要牺牲一定的计算精度.并且在求解平面应力问题时,还会由于网格划分问题,发生剪切锁死的现象,使求解结果出现偏差.

为了避免有限元方法的弊端,无网格方法成为一种精确求解平面应力问题的新方法.无网格方法最初的理论是Nayroles等<sup>[4]</sup>发现构造无网格近似

\* 中国地震局工程力学研究所基本科研业务费专项项目(2023A01)和国家重点研发计划项目(2023YFC3805203)资助.

2024-10-30 收到修改稿, 2024-11-08 网络首发.

\*\* 通讯作者. E-mail: zifa@iem.ac.cn.

的平行路径是使用移动最小二乘近似,并且第一个在 Galerkin 方法中使用移动最小二乘近似这个过程中提出的,该方法称为漫射元法 (DEM). 随后, Belytschko 等<sup>[5]</sup>改进的该方法,并将其命名为 EFG (element-free Galerkin). 近年来,出现了大量无网格法求解平面应力问题的方法. 例如 Cho J Y 和 Atluri S N<sup>[6]</sup>提出的修正变量方法, Noguchi H 等<sup>[7]</sup>提出的提高基函数次数及扩大影响域方法. 但是根据 Kanok-Nukulchai W<sup>[8]</sup>的数值计算表明,提高无网格法的基函数次数及扩大影响域的方法依然存在部分剪切锁死的现象,没有完全根除. 而 Donning B M 和 Liu W K<sup>[9]</sup>提出的匹配近似场法对较大范围的位移和应力能精准计算, Jiun-Shyan Chen<sup>[10,11]</sup>的稳定协调节点积分方法在计算效率,稳定性和收敛性上都有不错的体现. 可以看出,使用无网格法来避免有限元方法的弊端是可行的,并且在理论和实践中优于有限元法求解平面应力问题.

近年来,有关机器学习的方法研究异常活跃,大量基于机器学习计算的理论和研究在各个领域取得了革命性的成果. 例如图像识别技术<sup>[12]</sup>, 心血管血流建模<sup>[13]</sup>等. 在工程领域,机器学习也大放光彩,例如 Zhang 等<sup>[14]</sup>为了进行结构地震响应建模,使用物理引导卷积神经网络 (PhyCNN) 数据驱动的方法. 苏国韶等<sup>[15]</sup>为了满足对边坡稳定性评价的高精度和快速性的要求,提出了一种高斯过程机器学习方法. 陈崇一<sup>[16]</sup>为了解决严寒地区对热工缺陷快速检测的需求,提出了一种基于红外图像分割和识别的热工缺陷检测系统,为建筑施工验收,节能检测中热工缺陷检测提供了一种新的思路和方法. 这些计算的成功都基于丰富的标签数据训练,但是某些复杂的物理学、工程学领域在数据获取上存在困难,这使得模型的预测遭受挑战. 而且工程领域经过多年的发展,积累了丰富的物理模型和偏微分方程,近年来同时利用机器学习方法和传统物理规律结合起来求解偏微分方程组所代表的物理模型成为了一个可能的工程领域问题突破口. 2019 年, Raissi 等<sup>[17]</sup>提出了物理信息神经网络 (PINN) 求解偏微分方程的方法,并且展示了求解过程,在摆脱了对于实验和模型数据的依赖后,缩小了允许解的空间,成功地求解了偏微分方程. Wang 等<sup>[18]</sup>通过搭建神经网络模型求

解了雷诺时均方程,并且能够良好地预测流体雷诺应力的差异. 王彪等<sup>[19]</sup>将玻尔兹曼运输方程导入到神经网络中,有效地预测了金刚石内声子的多尺度热运输问题. PINN 通过将偏微分方程和机器学习的结合,将偏微分方程纳入到神经网络的损失函数中,使神经网络同时满足偏微分方程和边界条件,并且能在较少数据或无数据的情况下,更加高效地得到偏微分方程的解. 这种神经网络模型在保证精度的情况下,还能具有更好的泛化能力,并且不需要进行离散化,从而避免了对结构的网格划分,在本质上为无网格方法,这也是使用 PINN 方法进行无网格求解平面应力问题的基础.

本文将针对求解平面应力问题,讨论有限元分析时出现的剪切锁死现象,同时提出可以消除剪切锁死的 PINN 方法及其对应的物理模型,并对该模型的基本原理,网络结果和求解思路进行介绍和分析. 随后通过与有限元方法的对比和分析,讨论该 PINN 方法的可行性和有效性. 研究结果表明, PINN 方法省略了繁琐的网格划分步骤,并且精确高效地得到平面应力问题的解,避免的剪切锁死的现象.

## 1 有限元分析中剪切锁死问题

剪切锁死的实质就是,在理论上没有剪切变形的单元中发生了剪切变形,这个剪切变形也被称为伴生剪切<sup>[20]</sup>. 该现象一般发生在受纯弯状态下,主要的现象是模型弯曲刚度变大,导致变形偏小. 如果能直接得到控制微分方程的解析解,则不会出现剪切锁死的现象,但是如果采用有限元方法,由于网格划分则会出现剪切锁死现象,得到的结果将出现误差.

如图 1(b)所示,这个模型是材料力学中的平截面假定,截面受到弯矩作用发生纯弯变形,上表面受到水平压应力作用,发生收缩变形,下表面受到水平拉应力作用,发生拉伸变形,并且竖线直线长度不变,始终与上下表面垂直. 此时没有发生剪切变形,剪应力为 0,该截面变形为理论上的纯弯变形. 如图 1(c),这个模型是有限元方法截面变形图,可以观察到该截面上表面也是压缩变形,下表面也是拉伸变形,但是竖向直线有了增大或减小,即发生了剪切变

形,消耗了部分变形能量,导致单元过硬,弯曲变形减小,与理论计算有所偏差。

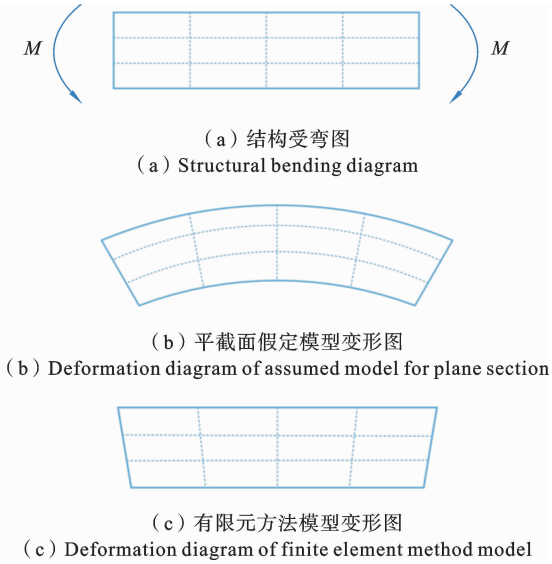


图 1 平截面假定变形与有限元网格划分方法在弯矩作用下的对比

Fig. 1 Comparison of assumed deformation of plane section and finite element mesh generation method under bending moment action

有限元方法可以通过细化网格来有效改善剪切锁死现象,通过增加模型的网格密度,特别是在潜在发生剪切锁死的区域进行网格细化,可以提高模型的准确性和稳定性,减少剪切锁死的发生.但是会导致单元节点增大,使计算的工作量大大增加.也可以通过采用缩减积分方法,减少单元的积分点,降低数值计算中的刚度,从而减轻剪切锁死现象的发生.但是如果网格的尺寸不到位,结果的误差还是会比较大,这与有限元的沙漏现象有关.采用非协调单元也是缓解剪切锁死现象的方法,但是在单元形状比较畸形时,计算结果将会出现很大误差。

本文将提出 PINN 方法求解平面应力问题,并且能有效地避免剪切锁死现象。

## 2 基于平面应力偏微分方程的 PINN 模型

### 2.1 平面应力问题偏微分方程

在二维空间中,不考虑惯性作用,平面应力问题

有两个特征:1.  $\sigma_z = \tau_{zy} = \tau_{zy} = 0$ ,且只存在  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  (由于本文为二维平面问题,因此本文中  $\tau_{xy}$  均表示为  $\sigma_{xy}$ ). 2. 应力和应变都是只有  $x, y$  的函数.由动能守恒方程(力平衡方程) $\sigma_{ij,j} + f_i = 0$ ,可以将平衡方程对  $x, y$  两个方向化简成两个方程.对  $x$  方向的平衡方程为:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \quad (1)$$

对  $y$  方向的平衡方程为:

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = 0 \quad (2)$$

$x, y$  两个方向的平衡方程共同组成平面应力问题的平衡方程.其中,  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}$  分别是在  $x, y$  方向上的正应力分量,  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$  是切应力分量,  $f_x, f_y$  分别是在  $x, y$  方向上的体力分量。

同时平面应力问题还需要考虑  $x, y$  方向的位移,因此应变张量需要针对  $x, y$  方向进行具体简化,从而得到方程.沿  $x$  方向的正应变分量:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (3)$$

沿  $y$  方向的正应变分量:

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (4)$$

沿  $x, y$  方向的剪应变分量( $\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx}$ ):

$$\epsilon_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (5)$$

这三个方程共同组成平面应力问题的几何方程.其中,  $u_x$  为  $x$  方向的位移,  $u_y$  为  $y$  方向的位移。

平面应力问题还需要满足以下本构方程:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\mu)(1-\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

其中参数  $E$  为平面应力问题的弹性模量,  $\mu$  为平面应力问题的泊松比。

由平衡方程,几何方程和本构方程共同组成了平面应力问题的控制方程,此外,计算平面应力问题时,还需要考虑单元的边界条件.边界条件需要考虑应力边界条件和位移边界条件两种.应力边界条件为:

$$\begin{cases} (l_1\sigma_{xx} + l_2\sigma_{xy})_s = \bar{f}_x \\ (l_1\sigma_{xy} + l_2\sigma_{yy})_s = \bar{f}_y \end{cases} \quad (S=S_\sigma) \quad (7)$$

位移边界条件为：

$$\begin{cases} (u)_s = \bar{u} \\ (v)_s = \bar{v} \end{cases} \quad (S=S_u) \quad (8)$$

其中  $f_x, f_y$  分别指在  $x, y$  方向上的表面力,  $u, v$  分别指在  $x, y$  方向上的位移。

这些偏微分方程将赋予神经网络模型物理意义, 约束条件将融入到损失函数中, 通过最小化损失函数来求解平面应力问题。

### 2.2 基于平面应力方程的 PINN 模型

本文采用的 PINN 神经网络模型结构如图 2 所示。

下文将对 PINN 模型建立步骤进行说明：

(1) 本文采取的神经网络包含输入层, 隐藏层和输出层。模型的神经网络采用全连接神经网络  $NN(x, y; \theta)$ , 网络的输入层有 2 个神经元, 分别为平面应力问题上的点坐标  $(x, y)$ ; 经过  $N \times M$  的隐藏层后(其中  $N$  为隐藏层层数,  $M$  为每个隐藏层包含的神经元个数); 在输出层有 5 个神经元, 输出平面应力问题解, 包含沿  $x$  方向的位移  $u_x$ 、沿  $y$  方向的位移  $u_y$ 、沿  $x$  方向的正应力  $\sigma_{xx}$ 、沿  $y$  方向的正应力  $\sigma_{yy}$  和剪切应力  $\sigma_{xy}$ 。该问题所对应的映射在数学上可以表示为

$$NN(x, y) = (W^{L+1} \alpha^{L+1} (\dots \alpha_2 (W^2 \alpha_1 (W^2 X^0 + b^1) + b^2)) + b^{L+1}) \quad (9)$$

其中, 参数  $W^i, b^i$  为每一层神经元的权重矩阵和偏置向量,  $\alpha_i$  为每一层的非线性激活函数。

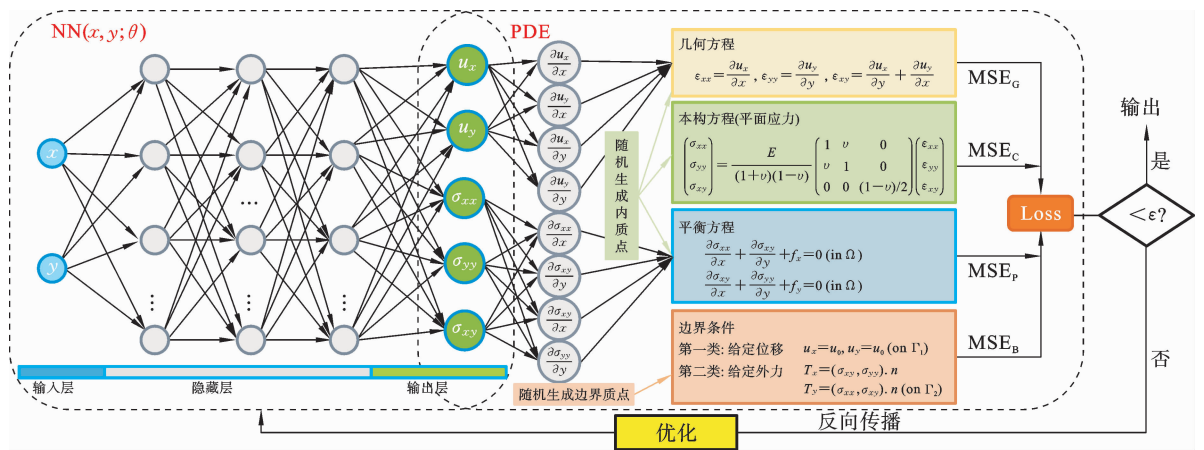


图 2 PINN 求解网络框架图

Fig. 2 PINN solving network framework diagram

(2) 在求解域  $[x, y]$  内随机生成内质点和边界质点。由全连接神经网络输出的  $NN(x, y)$ , 在模型内自动微分计算点与点之间的多阶梯度, 在区域  $[0, x] \times [0, y]$  内进行随机生成内质点和边界质点(也称为“配点”), 从而可以计算出它们的  $\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}, \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}$ ,

$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}, \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}, \frac{\partial u_x}{\partial x}, \frac{\partial u_x}{\partial y}, \frac{\partial u_y}{\partial x}$  和  $\frac{\partial u_y}{\partial y}$  并融入到模型的损失函数中。

(3) PINN 方法通过训练神经网络模型来最小化质点的损失函数, 求解平面应力问题。一般来说, PINN 方法的损失函数由三个部分组成, 分别为内

质点的偏微分方程的误差、边界质点的边界条件的误差和初始条件的误差。由于平面应力问题为静力问题, 不考虑初始条件, 因此该模型只包含了偏微分方程的误差和边界条件的误差。本文使用均方误差 (mean square error, MSE) 来衡量损失函数, 总损失函数可以表示为

$$MSE = \varphi_{PDE} MSE_{PDE} + \varphi_{BC} MSE_{BC} \quad (10)$$

$$MSE_{PDE} = MSE_P + MSE_G + MSE_C \quad (11)$$

其中,  $MSE_{PDE}$  为偏微分方程误差,  $MSE_{BC}$  为边界条件误差,  $MSE_P, MSE_G, MSE_C$  分别为平衡方程, 几何方程和本构方程的误差。  $\varphi_{PDE}$  和  $\varphi_{BC}$  分别为损失函数的权重。针对权重自适应的调整已有许多研

究<sup>[21]</sup>,为了简化训练过程,本文算例中,在神经网络训练前设置 5000 次的预训练来自动计算每一部分的权重,这些权重将参与正式训练的过程,使损失达到最佳效果. 经过以往经验和算例预训练测试,权重取  $\varphi_{PDE}=1/E, \varphi_{BC}=1$ ,此时可以提高训练精度和速度. 偏微分方程误差的具体表达式为

$$\begin{aligned}
 MSE_{PDE} = & \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \left| \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x \right|^2 + \\
 & \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \left| \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y \right|^2 + \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \left| \epsilon_{xx} - \frac{\partial u_x}{\partial x} \right|^2 + \\
 & \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \left| \epsilon_{yy} - \frac{\partial u_y}{\partial y} \right|^2 + \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \left| \epsilon_{xy} - \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|^2 + \\
 & \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \left| \sigma_{xy} - \frac{E}{2(1+\mu)} \epsilon_{xy} \right|^2 + \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \left| \sigma_{xx} - \right. \\
 & \left. \frac{E}{(1+\mu)(1-\mu)} (\epsilon_{xx} + \mu \epsilon_{yy}) \right|^2 + \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \left| \sigma_{yy} - \right. \\
 & \left. \frac{E}{(1+\mu)(1-\mu)} (\mu \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \right|^2
 \end{aligned} \quad (12)$$

其中  $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}$  和  $\epsilon_{xy}$  由公式(3)~(5)直接代入,使偏微分方程损失包含了平衡方程,几何方程以及本构方程,为神经网络训练提供了物理信息.

边界条件误差的具体表达式为

$$MSE_{BC} = \frac{1}{N_b} \sum_{i=1}^{N_b} |u_i - \bar{u}_i|^2 + \frac{1}{N_b} \sum_{i=1}^{N_b} |\sigma_i - \bar{\sigma}_i|^2 \quad (13)$$

式中,  $N_p$  为随机生成内质点的数目,  $N_b$  为随机生成边界质点的取点数目.

3、含有物理信息的损失函数在模型的训练下,损失不断下降,直到达到模型的收敛条件则训练结束,反之则反向传播更新第 1 步中的神经网络参数  $\theta$ ,通过更新神经网络的参数,使损失继续下降. 训练结束后则输出平面应力问题的位移值和应力值. 另外,该方法没有网格划分的过程,只有优化训练内质点和边界质点损失函数的过程,因此理论上这种方法属于无网格化方法,不会发生剪切锁死的现象.

### 3 数值算例分析

#### 3.1 算例一

本文算例一将通过二维平面应力纯弯曲梁问

题,来研究 PINN 方法求解平面应力问题的可行性和有效性. 结构的问题如图 3(a)所示. 一段简支梁,弹性模量  $E$  为 1000 Pa,泊松比  $\mu$  为 0.3. 梁的长度为 1 m,宽度为 0.1 m,在梁的两侧施加大小为  $M=1/12 \text{ N} \cdot \text{m}$  的弯矩,为了方便弯矩的实现,在梁的两侧施加一个线性分布力  $F(y)$ ,如图 3(b)所示.

$$F(y) = 1000y \quad (14)$$

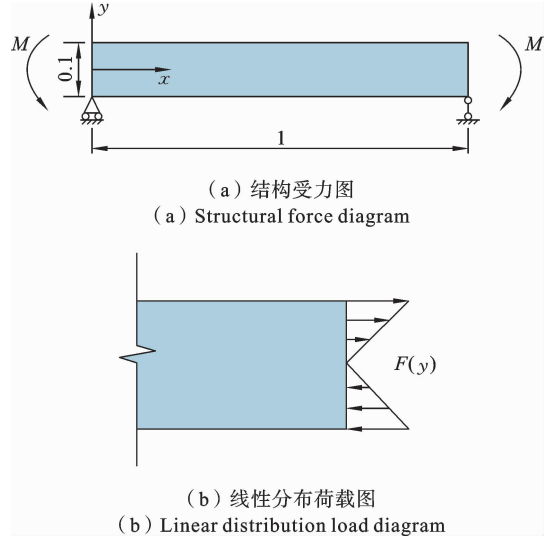


图 3 纯弯曲梁结构及等效荷载示意图

Fig. 3 Schematic diagram of pure bending beam structure and equivalent load

应力边界条件为:

$$\begin{cases} \sigma_{xx}(0, y) = F(y) \\ \sigma_{xx}(1, y) = F(y) \\ \sigma_{xy}(0, y) = 0 \\ \sigma_{xy}(1, y) = 0 \\ \sigma_{xy}(x, 0.05) = 0 \\ \sigma_{yy}(x, 0.05) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

位移边界条件为:

$$\begin{cases} u_x(0, -0.05) = 0 \\ u_y(0, -0.05) = 0 \\ u_y(1, -0.05) = 0 \end{cases} \quad (16)$$

随机采取 10000 个内质点和 2000 个边界质点来离散计算域和边界. 本文采用 4 层隐藏层,每层隐藏层的神经元数量为 60 个,采用的激活函数为 Tanh 函数.

本文提到的有限元方法均采用 Abaqus 软件进行建模模拟, 网格划分出来的单元采用全积分线性平面应力单元. 如图 3(a) 结构受力图所示, 使用 Abaqus 软件在结构左下角固定横向和竖向位移, 在结构右下角固定竖向位移, 作为结构的边界条件. 同时, 如图 3(b) 所示, 施加分布荷载用来等效两端弯矩, 模拟结构受力. 最后输出有限元结果, 进行对比.

如图 4 所示, 有限元方法进行的是网格的划分, 采样点的数值结果等于该采样点所在网格的应力位移结果. 而 PINN 方法进行的是无网格法, 不需要进行网格的划分, 随机采样平面内的质点, 进行离散计算域和边界, 从而在神经网络中进行更良好的训练过程. 图 5 所示为有限元方法划分 4 个单元的结果, 可以看到有限元模型产生的虚假剪应变带来了剪切锁死的缺陷, 线性单元在中间没有节点的情况下无法模拟纯弯, 直边不能承受弯曲荷载作用, 弯曲刚度太大导致单元水平线和垂直线之间出现了夹角变化. 将 Abaqus 有限元结果导入到 python 中, 并与 PINN 方法在相同图例下进行对比, 如图 6 所示, PINN 方

法模拟的纯弯变形较有限元方法相比更加优秀, 随机质点的选取也使应力上也不会出现网格无法捕捉应力集中的区域的情况.

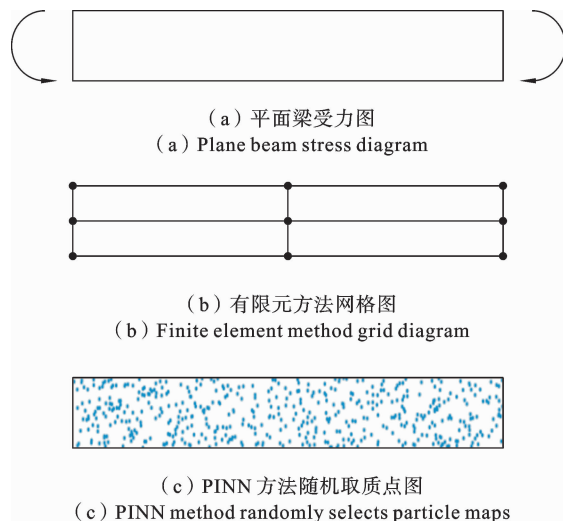


图 4 有限元方法和 PINN 方法采样分析对比  
Fig. 4 Comparison of sampling analysis between finite element method and PINN method

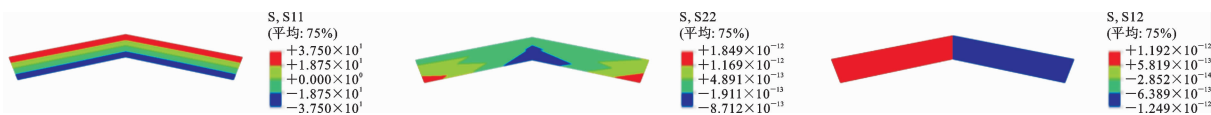


图 5 Abaqus 有限元结果应力图

Fig. 5 Abaqus finite element results stress diagram

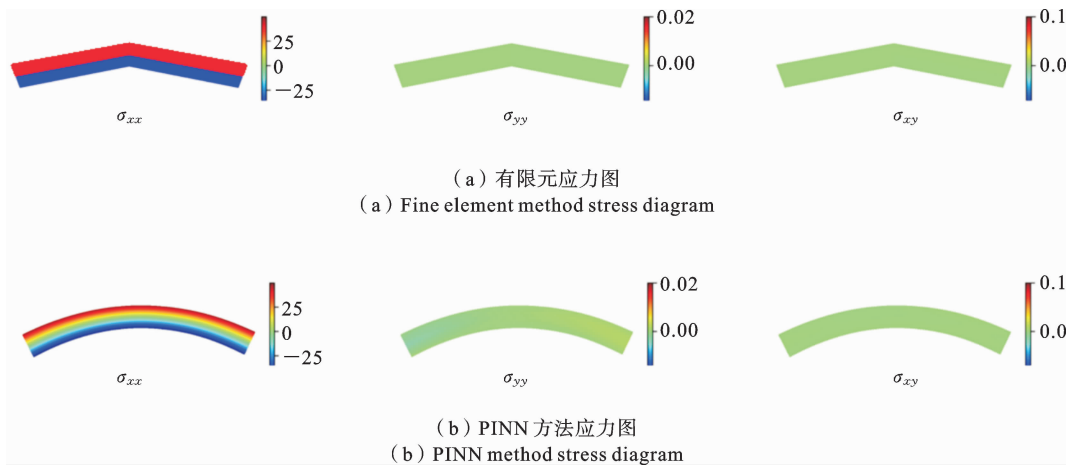


图 6 有限元方法和 PINN 方法结果对比

Fig. 6 Comparison of results between finite element method and PINN method

细化网格也能一定程度上缓解剪切锁死, 为了进一步验证 PINN 方法能够避免剪切锁死, 将上述

算例网格划分为 100000 个单元. 如图 7 所示, 从有限元结果可以看出, 细网格划分的模型不发生剪切

锁死,并且模拟优秀.将 Abaqus 有限元结果导入到 python 中,并与 PINN 结果在相同图例下进行对比.如图 8 所示,PINN 方法的结果与细网格划分结

果基本一致,进一步验证了 PINN 方法求解平面应力问题过程中,可以解决剪切锁死的问题.



图 7 细网格 Abaqus 有限元结果应力图

Fig. 7 Stress diagram of fine grid Abaqus finite element results

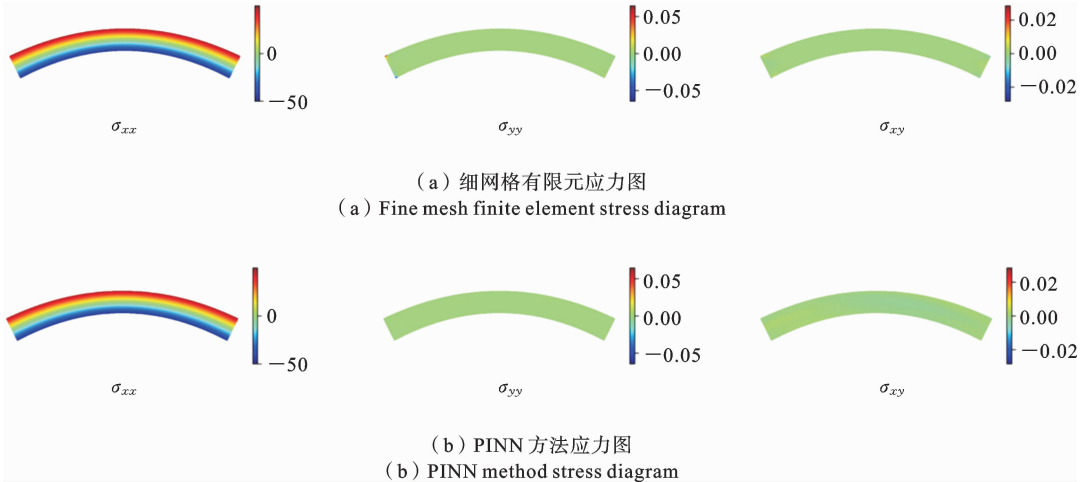


图 8 细网格结果与 PINN 方法结果对比

Fig. 8 Comparison between fine grid results and PINN method results

### 3.2 算例二

为了验证本文模型在复杂边界条件和复杂荷载条件下的适用性,本文算例二将计算缺陷板的平面应力问题.结构的问题如图 9 所示.一个正方形左下角有一个 1/4 圆的缺陷,弹性模量  $E$  为 5 Pa,泊松比  $\mu$  为 0.3.正方形边长为 1 m,圆的圆心在  $(0,0)$  处,半径为 0.2 m,在正方形板的右侧施加大小为  $q = \sin(y * \pi/2)$  的分布力.

应力边界条件为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx}(1, y) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \times y\right) \\ \sigma_{xy}(x, 0) = 0 \\ \sigma_{xy}(0, y) = 0 \\ \sigma_{xy}(1, y) = 0 \\ \sigma_{xy}(x, 1) = 0 \\ \sigma_{yy}(x, 1) = 0 \end{array} \right. \quad (17)$$

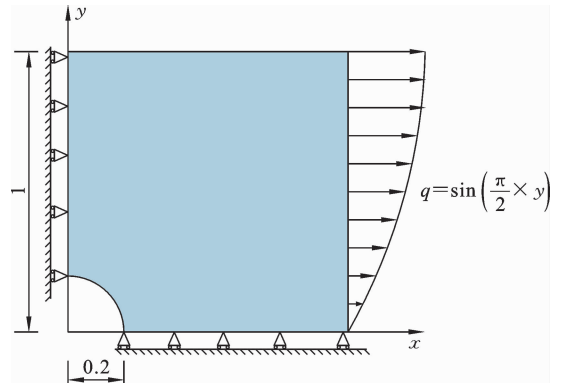


图 9 缺陷板结构图

Fig. 9 Defect board structure diagram

弧线应力边界条件为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} \times n_x + \sigma_{xy} \times n_y = 0 \\ \sigma_{xy} \times n_x + \sigma_{yy} \times n_y = 0 \end{array} \right. \quad (18)$$

其中,公式中的  $n_x, n_y$  分别是弧线法向量与  $x, y$  轴线的余弦值.

位移边界条件为:

$$\begin{cases} u_x(0, y) = 0 \\ u_y(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (19)$$

如图 10 所示,神经网络在非线性边界条件以及受到复杂荷载的情况下得到的结果依然很优秀,计算结果并没有出现剪切锁死现象,并且精确度高.

在计算算例二时,不需要对神经网络的结构重新进行搭建,只需要根据模型的边界和受力情况,更改神经网络模型中的边界条件,即可精确计算出结构的位移和应力结构.而有限元方法对不同的算例则需要重新进行模型的建立,网格的划分,在效率上明显低于 PINN 方法.可以看出 PINN 方法在求解平面应力问题上比传统有限元方法更加具有优越性.

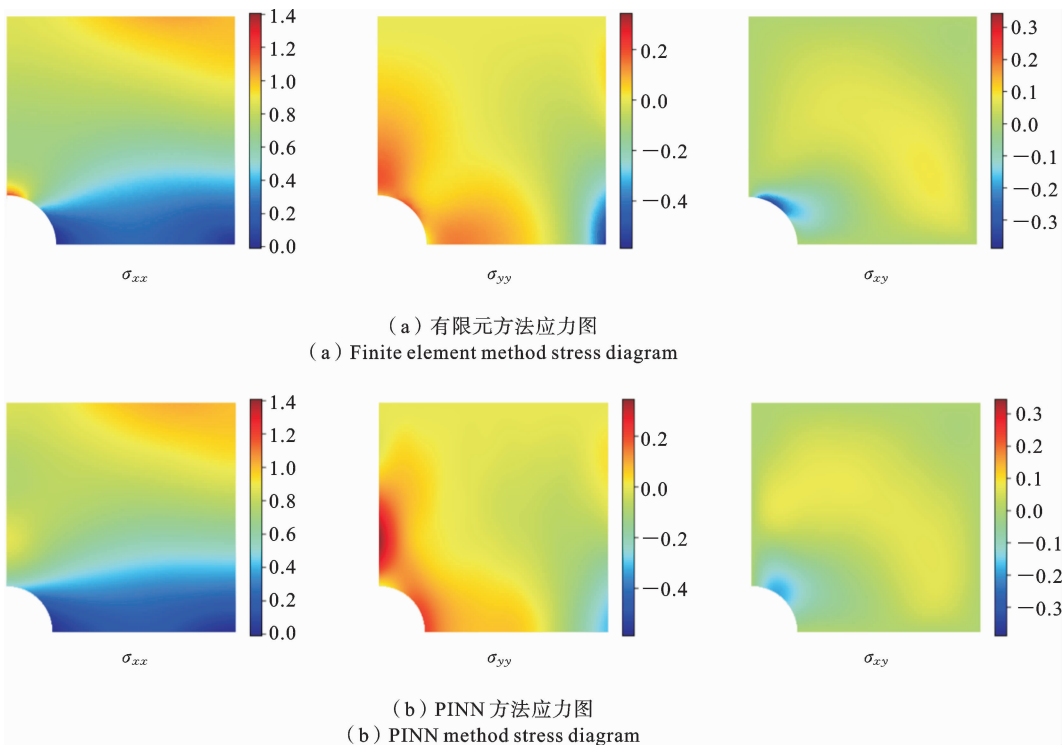


图 10 缺陷板有限元方法和 PINN 方法结果对比

Fig. 10 Comparison of finite element method and PINN method results for defective plates

#### 4 关于有限元网格划分的问题

为探讨有限元细化网格对缓解剪切锁死问题的影响,本文将使用 Abaqus 有限元模拟软件把结构分别划分为 4 个单元,1000 个单元,10000 个单元,100000 个单元进行跨中竖向位移的对比,并将 PINN 结果和理论解一并放入表格中进行对比,如表 1 所示.

前一章节算例一中,跨中位置最大位移理论计算值为(Abaqus 默认板厚为 1).

由表 1 可以看出有限元模型 1 与其他模型相比误差较大,明显发生了剪切锁死的现象.而有限元模型 2~有限元模型 4 随着网格密度逐渐增大,跨中竖向位移值接近理论解,但是计算速度也逐渐下降.可以看出,在不考虑计算速度的情况下,结构网格细化是可以缓解剪切锁死问题的.

然而 PINN 模型在不进行网格划分的情况下,得到与有限元细网格划分结果相近的解,可以看出 PINN 方法同样能避免剪切锁死的问题,并且跳过了网格划分这一繁琐的步骤.

表 1 不同网格划分下的跨中竖向位移

Table 1 Vertical displacement at mid span under different grid divisions

	宽度方向单元个数	长度方向单元个数	总单元个数	跨中竖向位移值
有限元模型 1	2	2	4	0.09403
有限元模型 2	10	100	1000	0.124103
有限元模型 3	100	100	10000	0.124796
有限元模型 4	100	1000	100000	0.125062
PINN 模型	/	/	/	0.124982
理论解	/	/	/	0.125

## 5 神经网络参数对收敛性的影响

### 5.1 隐藏层层数与神经元数目

在实际训练过程中,隐藏层层数和神经元的数目对神经网络的训练效率和收敛性具有重要的影响.过多的隐藏层可能导致梯度消失或梯度爆炸的问题,使得训练过程变得困难,甚至无法收敛.而减少隐藏层的层数可能会限制模型学习数据的能力,导致欠拟合.过多的神经元可能导致过拟合,使得模型在训练集上表现良好,但在测试集上泛化能力较差.而过少的神经元则会限制模型的拟合能力,导致欠拟合.因此,在设计神经网络模型时,需要根据具体问题的复杂性来选择合适的隐藏层结构,以实现损失函数的有效收敛并获得良好的模型性能.

如图 11 所示,其中横轴为训练周期(epoch),纵轴为当前训练周期(epoch)的损失函数( $Loss_{epoch}$ )与第 0 次(未训练)损失函数值( $Loss_0$ )比值的对数.对于算例一,隐藏层层数为 4,每层神经元数为 60 左右可以达到最佳精度.由于 50 个神经元震荡过大,而 60 个神经元震荡较小且损失下降速度高于 70 个神经元,因此选取 60 个神经元.总的来说,神经元和隐藏层数量的选取具有很强的经验性,需要多次平衡二者的数量,使模型达到最佳精度.另外,如图 11 (b)所示,过大的隐藏层会减慢损失下降的速度,并不一定能够提升计算的精度.

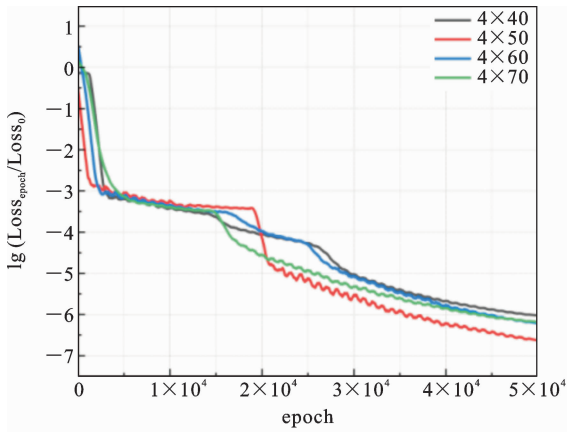
本文还对不同隐藏层选取不同神经元个数进行

了对比,如图 11(c)所示,可以看到本文的算例一中不同隐藏层选取相同的神经元数量效果更好.同时,使用相同神经元数量也能使网络更加简单和对称,网络的每一层能从前一层提取到相同数量特征,也有利于网络的稳定性.

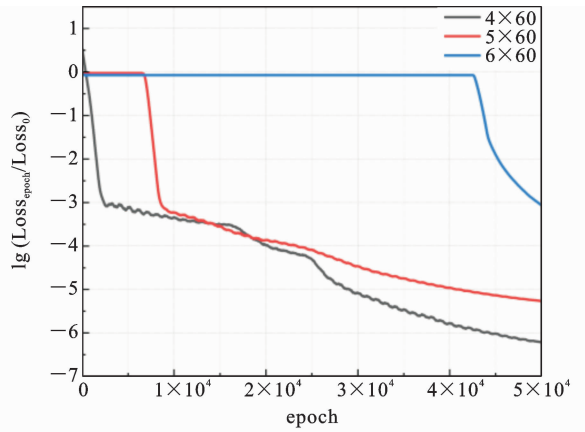
### 5.2 激活函数

激活函数的选择对于神经网络的收敛性有很大影响.由于激活函数的选取不同,神经网络的性能和收敛速度不同,选择合适的激活函数可以提高模型的训练效率和泛化能力<sup>[22]</sup>.本文中的 PINN 模型中嵌入了 ReLU 函数、Sigmoid 函数、Tanh 函数以及 Softplus 函数四种不同的常用的激活函数,通过对神经网络模型的定义,可根据不同的问题类型选择合适的激活函数从而提高神经网络的性能和收敛速度.ReLU 函数通常在隐藏层中使用,特别是在深度神经网络中,能够有效缓解梯度消失问题.Sigmoid 函数在输出层用于二分类问题,或者在浅层神经网络中使用.Tanh 函数收敛速度更快,通常在隐藏层中使用,能够提供更强的非线性性.Softplus 函数通常在隐藏层中使用,能够提供平滑的非线性性.在上节的算例一分析中,选择的是 Tanh 函数作为该模型的激活函数.

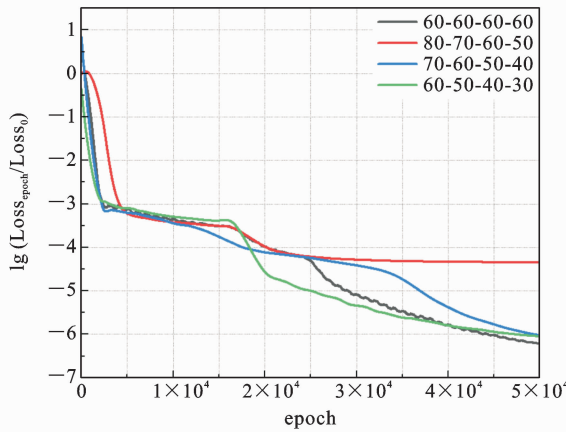
如图 12 所示,对于上述算例一,使用 Tanh 激活函数可以达到最佳精度.Tanh 激活函数得到的结果明显优于其他三种激活函数,并且在损失下降速度上也表现优秀.



(a) 不同神经元数量损失对比  
(a) Comparison of loss of different neuron numbers



(b) 不同隐藏层数量损失对比  
(b) Comparison of loss in different numbers of hidden layers



(c) 不同隐藏层神经元数量对比  
(c) Comparison of the number of neurons in different hidden layers

图 11 不同网络参数对损失函数收敛特性的影响

Fig. 11 The influence of different network parameters on the convergence characteristics of loss function

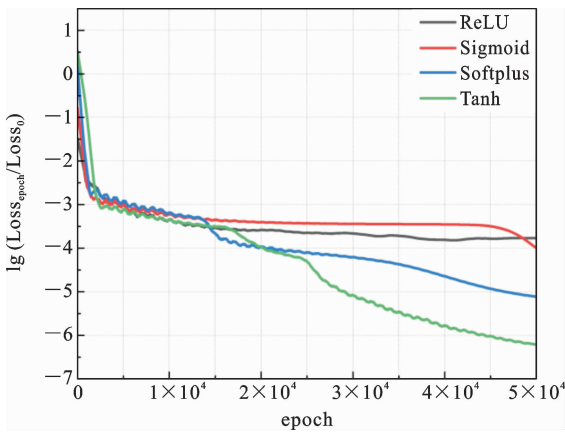


图 12 不同激活函数对损失函数收敛特性的影响

Fig. 12 The influence of different activation functions on the convergence characteristics of loss function

### 5.3 学习率

学习率是神经网络训练中一个特别关键的超参数,学习率的选择能够直接影响到模型的收敛速度和训练的稳定性.如果学习率过大,则损失将会急剧震荡,无法收敛,同时还有可能导致损失越来越大.如果学习率过小,则导致模型参数更新过小,使得训练过程变得缓慢,需要增加迭代次数才能达到相同的性能<sup>[23]</sup>.因此,在设计神经网络模型时,需要根据具体问题来选择合适的学习率使神经网络能够在训练过程中平稳地降低损失.

如图 13 所示,本文学习率取 0.08 能得到更加优秀的结果.

### 5.4 取样方法

神经网络内质点的选取方法影响着 PINN 模型

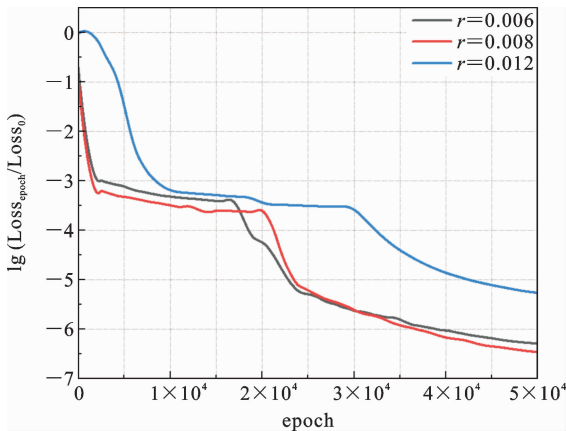


图 13 不同学习率对损失函数收敛特性的影响

Fig. 13 The influence of different learning rates on the convergence characteristics of the loss function

的求解效果,需要根据实际情况对模型选用合适的取样方法,以确保模型能够取得最优解。

如图 14 所示,本文将针对前面章节的算例一,进行随机取样、正态分布取样和均匀取样三种取样方法进行训练模型并对比。其中正态分布取样要求选取的  $x$  方向配点满足均值为  $1/2$ ,标准差为  $1/6$ ,  $y$  方向配点满足均值为  $0.1/2$ ,标准差为  $0.1/6$  的条件;均匀取样是指在模型  $x$  方向上  $[0, 1]$ ,在模型  $y$  方向上  $[-0.05, 0.05]$  中等距均匀选取配点。

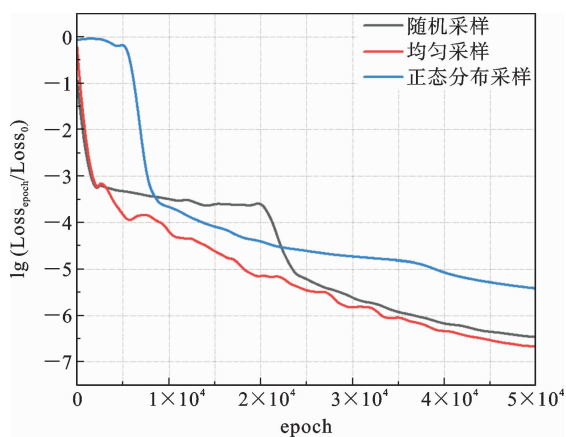


图 14 不同取样方法对损失函数收敛特性的影响

Fig. 14 The influence of different sampling methods on the convergence characteristics of the loss function

可以观察到随机取样和均匀取样两种取样方法都能得到优秀的结果.为了使模型具有更好的泛化

能力,使其能适应复杂结构,本文选取随机取样作为模型的取样方法。

## 6 结论

本文基于物理信息神经网络模型(PINN)求解平面应力问题解决剪切锁死问题,通过典型的纯弯梁算例,可以得出以下结论:

(1) 本方法没有使用任何标签数据,模型中只引入偏微分方程和边界条件,在复杂工程中或难以获取标签数据的情况下,模型仍然可以预测结果,有别与数据驱动的机器学习方法.这一特性展示了此方法在工程问题中的实用性和普遍性。

(2) 相较于传统有限元方法,本方法不需要考虑网格的划分对计算效率和准确性的影响,只需要通过最小化损失函数来求解平面应力问题,在不影响结果精确性的情况下,大大省略了计算步骤。

(3) 本方法算例一的结果与 100000 个网格的细网格结果误差极小,且引用了强形式微分控制方程,满足物理定律.同时能够避免剪切锁死,保证结果的精确性.这一特性展示了此方法的有效性和精确性。

(4) 本方法算例二在不改变原神经网络架构的情况下,能够有效地求解复杂边界情况下的平面应力问题,展示了本方法对复杂边界的适用性。

(5) 本文结合无网格方法和 PINN 方法的特性提出新的求解平面应力问题的方法,对后续求解各类平面应力问题具有重要意义。

## 参考文献

[1] 薛俊好, 邓忠林. 弹性薄板弯曲的有限元分析法[J]. 沈阳航空航天大学学报, 2011, 28(4): 9-11. (Xue Junhao, Deng Zhonglin. Finite element analysis on elastic plate bending[J]. Journal of Shenyang Aerospace University, 2011, 28(4): 9-11. (in Chinese))

[2] 党像梁, 吕西林, 钱江, 蒋欢军. 自复位预应力剪力墙抗震性能实体和平面单元有限元分析[J]. 建筑结构学报, 2014, 35(05): 17-24. (Dang Xiangliang, Lu Xilin, Qian Jiang, Jiang Huanjun. Finite element analysis with solid and plane element of seismic per-

- formance of self-centering pre-stressed shear walls [J]. *Journal of Building Structures*, 2014, 35(05): 17-24. (in Chinese))
- [3] 曹子龙, 关玉璞, 陈伟. 新的一个求解带孔薄板弹性问题的二维杂交应力单元[J]. *固体力学学报*, 2015, 36(4): 329-336. (Cao Zilong, Guan Yupu, Chen Wei. A novel 2-dimensional hybrid stress element for stress analyses of plate with holes[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2015, 36(4): 329-336. (in Chinese))
- [4] Nayroles B, Touzot G, Villon P. Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements[J]. *Computational Mechanics*, 1992, 10(5): 307-318.
- [5] Belytschko T, Gu L, Lu Y Y. Fracture and crack growth by element free Galerkin methods[J]. *Modeling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 1994, 2(3A): 519-534.
- [6] Cho J Y, Atluri S N. Analysis of shear flexible beams, using the meshless local Petrov-Galerkin method, based on a locking-free formulation[J]. *Engineering Computations: International Journal for Computer-Aided Engineering and Software*, 2001, 18(1/2): 215-240.
- [7] Noguchi H, Kawashima T, Miyamura T. Element free analyses of shell and spatial structures[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2015, 47(6): 1215-1240.
- [8] Kanok-Nukulchai W, Barry W, Saran-Yasoonorn K, Bouillard P H. On elimination of shear locking in the element-free Galerkin method[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 52(7): 705-725.
- [9] Donning B M, Liu W K. Meshless methods for shear deformable beams and plates[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1998, 152: 47-71.
- [10] Chen J, Wu C, Yoon S. A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 50(2): 435-466.
- [11] Wang D, Chen J S. Locking-free stabilized conforming nodal integration for meshfree Mindlin-Reissner plate formulation[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, 193(issues 12/14): 1065-1083.
- [12] Krizhevsky A, Sutskever I, Hinton G. ImageNet classification with deep convolutional neural networks [J]. *Communications of the ACM*, 2017, 60(6): 84-90.
- [13] Kissas G, Yang Y, Hwuang E, et al. Machine learning in cardiovascular flows modeling: Predicting arterial blood pressure from non-invasive 4D flow MRI data using physics-informed neural networks [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019, 112623.
- [14] Zhang R Y, Liu Y, Sun H. Physics-guided convolutional neural network (PhyCNN) for data-driven seismic response modeling[J]. *Engineering Structures*, 2020, 215(Jul. 15): 110704. 1-110704. 13.
- [15] 苏国韶, 宋咏春, 燕柳斌. 高斯过程机器学习在边坡稳定性评价中的应用[J]. *岩土力学*, 2009, 30(3): 675-679. (Su Guoshao, Song Yongchun, Yan Liubin. Application of Gaussian process machine learning to slope stability evaluation[J]. 2009, 30(3): 675-679. (in Chinese))
- [16] 陈崇一. 基于机器学习的建筑外墙外保温热工缺陷检测方法 [D]. 哈尔滨工业大学, 2019. (Chen Chongyi. Detection Method of Thermal Engineering Defects in Exterior Thermal Insulation Buildings Based on Machine Learning [D]. Harbin Institute of Technology, 2019. (in Chinese))
- [17] Raissi M, Perdikaris P, Karniadakis G E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations[J]. *Journal of Computational Physics*, 2019, 378: 686-707.
- [18] Wang J X, Wu J L, Xiao H. Physics-informed machine learning approach for reconstructing Reynolds stress modeling discrepancies based on DNS data[J]. *Phys. Rev. Fluids*, 2017, 2(3): 1-22.
- [19] 王彪, 任海杰, 曹文鑫, 胡彦伟, 何玉荣, 韩杰才, 朱嘉琦. 基于第一性原理的金刚石薄膜热导率神经网络预测研究[J]. *中国科学: 物理学 力学 天文学*, 2022, 52(09): 62-74. (Wang B, Ren H J, Cao W X, Hu Y W, He Y R, Han C J, Zhu J Q. Prediction

- of thermal conductivity of diamond film by neural network based on first principles. *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2022, 52(09): 62-74. (in Chinese))
- [20] Huang H C. Implementation of assumed strain degenerated shell elements[J]. *Computers and Structures*, 1987, 25(1): 147-155.
- [21] Yu Y, Yao H, Liu Y. Structural dynamics simulation using a novel physics-guided machine learning method[J]. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2020, 96: 103947.
- [22] 张有健, 陈晨, 王再见. 深度学习算法的激活函数研究[J]. *无线电通信技术*, 2021, 47(01): 115-120. (Zhang Youjian, Chen Chen, Wang Jiuji. Research on activation functions of deep learning algorithms [J]. *Radio Communication Technology*, 2021, 47(01): 115-120. (in Chinese))
- [23] 李亚茹, 张宇来, 王佳晨. 面向超参数估计的贝叶斯优化方法综述[J]. *计算机科学*, 2022, 49(S1): 86-92. (Li Yaru, Zhang Yulai, Wang Jiachen. Survey on Bayesian optimization methods for hyper-parameter tuning[J]. *Computer Science*, 2022, 49(S1): 86-92. (in Chinese))

# Physics-Informed Neural Network Method for Solving Plane Stress Problems

Ke Du<sup>1,2</sup>    Zhipeng Lin<sup>1,2</sup>    Wenxian Wu<sup>1,2</sup>    Huan Luo<sup>3</sup>    Zifa Wang<sup>1,2</sup>    Ruizhi Wen<sup>1,2</sup>

*(<sup>1</sup>Key Laboratory of Earthquake Engineering and Engineering Vibration, Institute of Engineering Mechanics, China Earthquake Administration, Harbin, 150080)*

*(<sup>2</sup>Key Laboratory of Earthquake Disaster Mitigation, Ministry of Emergency Management, Harbin, 150080)*

*(<sup>3</sup>College of Civil Engineering & Architecture, China Three Gorges University, Yichang, 443002)*

**Abstract** Most methods for solving plane stress problems currently rely on the finite element method (FEM), which is widely accepted for its established effectiveness in various engineering applications. However, FEM often suffers from shear locking during the solution process. To address this challenge and improve the solution of plane stress problems without the risk of shear locking, this paper adopts a physics-informed neural network (PINN) approach. The PINN framework integrates physical laws directly into the neural network training, allowing for the bypassing of traditional mesh requirements, which presents a considerable advantage. In this approach, internal and boundary points are randomly generated within the specified domain $[x, y]$ , serving as the basis for calculations. The geometric equations, constitutive equations, and balance equations that describe the behavior of the materials involved are incorporated into the model. Additionally, the physical constraints of boundary conditions for the boundary points are included in the loss function of the neural network model. This integration ensures that the model accurately reflects physical reality and adheres to the governing equations. By minimizing the loss function, the model effectively approximates the solution of the partial differential equations (PDEs) associated with plane stress problems. Importantly, this method does not require mesh generation, simplifying the computational process. Instead, it focuses solely on optimizing the loss functions for the internal and boundary points. To validate the proposed approach, further analysis is conducted to compare the PINN method with traditional FEM. The results demonstrate that the PINN method can solve plane stress problems without the need for labeled data. Furthermore, it effectively addresses finite element defects arising from spurious shear deformation due to mesh generation, specifically shear locking. Additionally, case studies indicate that the PINN method maintains high accuracy even with complex boundaries and varying stress conditions. This feature suggests that the method has significant potential for practical engineering applications in the future.

**Key words** plane stress element, neural network, machine learning, physical information, shear locking