

任意轴向荷载作用下高耸结构 $P-\Delta$ 效应高阶精确分析方法*

陆言 李鸿晶** 杨筱朋 翟银泉

(南京工业大学工程力学研究所, 南京, 211816)

摘要 高耸结构 $P-\Delta$ 效应的传统分析方法一般难以考虑时变轴力作用, 有可能会低估 $P-\Delta$ 效应对结构安全性的影响. 本文应用求积单元法 (weak form quadrature element method, QEM), 针对分布质量结构体系和含有集中质量的结构体系分别建立 Hermite 型求积单元模型, 发展了一种高耸结构 $P-\Delta$ 效应高阶精确分析方法. 该方法能够应用于具有突变质量的结构体系, 可处理任意轴向荷载引起的动力 $P-\Delta$ 效应问题, 无需迭代计算即可获得高精度的 $P-\Delta$ 效应解答, 同时能准确地揭示竖向荷载以及时变轴力对高耸结构特性的影响规律. 通过对 3 个不同类型案例的比较分析, 验证了本文方法的可行性和准确性. 数值分析结果表明, 本文方法可以实现高精度的 $P-\Delta$ 效应分析, 对于质量均匀分布和含有集中质量的结构体系仅需使用一个求积单元即可获得非常精确的动态响应结果.

关键词 高耸结构, $P-\Delta$ 效应, 求积单元, 时变轴力, Hermite 型插值

DOI: 10.19636/j.cnki.cjsm42-1250/o3.2024.039

0 引言

拥有较大高宽比的结构, 例如输电线塔、烟囱、高桥墩等, 在同时遭受水平向作用 (风、水平地震地面运动等) 和竖向作用 (恒荷载、活荷载、竖向地震地面运动等) 时, 其横向结构响应中往往包含不容忽视的轴向作用的影响. 这是因为当结构产生相对于基底的水平变位 Δ 时, 轴向作用力 P 将在结构上施加附加弯矩作用, 进而对横向响应产生影响, 此即 $P-\Delta$ 效应问题. 高耸结构属于对竖向作用敏感的结构体系, 尤其遭遇强震作用时重力和竖向地震地面运动产生的 $P-\Delta$ 效应可能会对结构安全性造成较严重威胁, 这是高耸结构设计时不得不面对的因素^[1].

$P-\Delta$ 效应是普遍存在的一种力学现象, 它在本质上属于几何非线性问题, 在结构响应过程中即使材料始终处于弹性范围, 横向响应亦呈现非线性特征. 从分析方法的角度来看, 目前已经发展的 $P-\Delta$ 效应分析方法大致可以归结为两类, 即迭代方法

(Iterative methods) 和非迭代方法 (Non-iterative methods). 迭代法是早期使用的分析方法, 可进一步细分为等效水平力的有限元迭代法^[2] 和等效重力迭代法^[3], 加拿大钢结构规范^[4] 曾采用迭代策略实现对 $P-\Delta$ 效应问题的求解. 迭代解法可以达到比较高的精度, 且能够考虑结构平衡位置的变化. 但想要获得较为准确的结果需要耗费较多的机时, 计算工作量大. 故实际进行 $P-\Delta$ 效应分析时多采用无需迭代的近似方法, 如放大系数法^[5-9]、直接求解法^[10,11] 和基于几何刚度的有限元法^[12,13] 等. 非迭代方法简单易行, 计算效率高, 但 $P-\Delta$ 效应分析结果往往不够精确, 对于时变轴力效应的估计可能存在偏差, 其中基于几何刚度的有限元法虽然广泛被使用, 但因其刚度矩阵只是建立在施加荷载增量之初的内力及位移基础上的, 忽略了施加荷载过程中内力与位移的变化, 因此不能准确地反映 $P-\Delta$ 效应的影响. 李鸿晶等^[14] 从连续体系运动微分方程入手, 利用微分求积 (differential quadrature, DQ) 原

* 国家自然科学基金项目 (52378519) 资助.

2024-09-04 收到修改稿, 2024-09-09 网络首发.

** 通讯作者. E-mail: hjing@njtech.edu.cn.

理^[15-17]发展了一种高精度 $P-\Delta$ 效应分析方法. 这种方法操作简便且不需要迭代处理,对于分布质量结构体系能够高效地给出高精度的分析结果,但在处理具有突变质量(例如集中质量)的结构体系 $P-\Delta$ 效应问题时显得不足. 此外,文献^[18-22]针对特定类型工程结构建立的 $P-\Delta$ 效应分析方法,可视为上述各类求解方法的具体应用.

与传统的迭代法以及非迭代法不同,本文聚焦质量突变高耸结构体系,旨在应用弱形式求积单元法(weak form quadrature element method, QEM)^[23-28]进一步建立一种适用于任意高耸结构体系的 $P-\Delta$ 效应高精度分析方法,分别建立连续分布质量结构体系和含有集中质量结构体系两种 Hermite 型求积单元模型,以解决任意的横向荷载和轴向荷载耦合作用下的结构 $P-\Delta$ 效应分析问题. 本文发展的动力 $P-\Delta$ 效应分析方法为高阶数值方法,故可获得高精度的分析结果.

1 高耸结构模型

烟囱、高桥墩以及各种类型的塔桅结构等具有较大的高宽比,其主要变形形式为弯曲变形,水平荷载作用是结构设计的主要依据. 这些高耸结构系统

可以由众多的构件组合而成,工程上的关注点主要集中在整体结构的横向位移上,并以此为基础估计各构件的内力和变形. 因此,可以将高耸结构系统整体上等效为一个悬臂梁结构,开展结构静力和动力分析. 高层建筑的结构系统与高耸结构的特性相似, $P-\Delta$ 效应是结构设计时不得不面对的问题. 本文将高层建筑结构和高耸结构归并在一起,研究该类型结构在任意的横向荷载和轴向荷载耦合作用下 $P-\Delta$ 效应的高阶分析方法.

对于建造在良好地基上的结构,刚性基底假设通常是合理的. 将高耸结构视为基底固定支撑和顶端自由的悬臂结构,结构特性用沿高度方向分布的质量集度 $m(y)$ 、横向刚度 $EI(y)$ 和轴向刚度 $EA(y)$ 描述,如图 1 所示. 高耸结构的动力响应是时间坐标 t 和空间坐标 y 的多元函数. 注意到这些结构特性不都是随着空间坐标 y 均匀分布的,例如高层建筑楼(屋)盖质量(包括作用于楼盖或屋盖上的恒荷载和活荷载)、输电塔挂线部位的质量等都远超其他空间部位的质量,往往造成高耸结构拥有突变质量分布的特征. 在结构模型中还应考虑这种质量突变性对高耸结构 $P-\Delta$ 效应的影响,通过集中质量的方式予以描述.

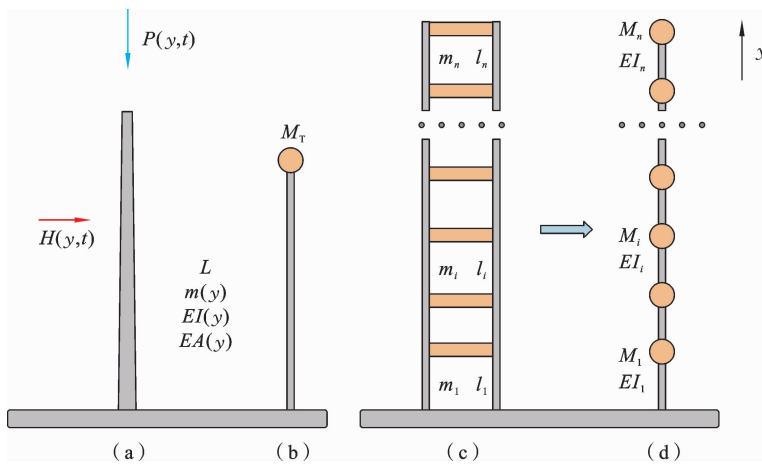


图 1 高耸结构模型

Fig. 1 Simplified model for different types of tall structures

在图 1 所示的结构模型中,横向荷载 H 和轴向荷载 P 都可以是任意分布的,它们都是 t 和 y 的分布函数. 在空间坐标 y 处取出微元 dy ,其受力状态

如图 2 所示. 通过应用牛顿第二定律可在水平向和竖向分别建立该微元的动力学微分方程,即
水平方向:

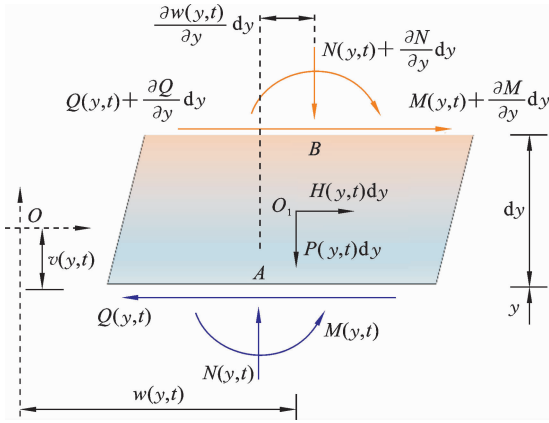


图 2 微元体受力状态

Fig. 2 Force analysis of micro-element

$$m(y) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \left[EI(y) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(EA \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right] = H(y, t) \quad (1)$$

竖直方向：

$$m(y) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial y} \left[EA \frac{\partial v}{\partial y} \right] = P(y, t) \quad (2)$$

式中, $w(y, t)$ 为横向位移, 向右为正; $v(y, t)$ 为竖向位移, 向下为正; $EI(y)$ 和 $EA(y)$ 分别为横向分布刚度和轴向分布刚度, $m(y)$ 为分布质量, 其中包含有集中质量; $H(y, t)$ 和 $P(y, t)$ 分别为作用于结构上的横向分布荷载和轴向分布荷载; $N(y, t)$ 为轴力响应。

时变轴力 $N(y, t)$ 可以依据虎克定律确定, 即

$$N(y, t) = EA(y) \frac{\partial v(y, t)}{\partial y} \quad (3)$$

观察式(1)、式(2)和式(3), 可以发现 P-Δ 效应问题属于几何非线性问题。求解方程(2)可以独立地解出结构竖向位移 $v(y, t)$, 将其代入式(3)进而求解方程(1), 即可获得结构横向位移 $w(y, t)$ 。求解方程(1)和方程(2)时需要使用适当的数值方法。

2 P-Δ 效应高阶精确分析方法

为了建立高耸结构 P-Δ 效应高阶精确分析方法, 引入 QEM 建立具有分布质量和分布刚度特征的求积梁单元模型。考虑到高耸结构的轴向刚度往

往远远大于弯曲刚度, 相较于横向位移结构在轴向上产生的形变是微不足道的, 忽略其影响不会引起大的误差。因此, 在构建求积单元模型时不考虑结构轴向变形影响, 并假定结构响应过程中材料本构始终处于线弹性范围内(满足线弹性应力-应变关系), 即把研究重点放在 P-Δ 效应导致的几何非线性对高耸结构动力响应的影响上面。

为保证一致性和完整性, 将求积梁单元的长度和横截面面积分别设为 L 和 A , 材料密度 ρ , 弹性模量 E , 惯性矩 I , 横向位移 $w(x, t)$ 。

2.1 求积梁单元

梁单元的动能和应变能表达为

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (4)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (5)$$

轴力 N 和横向荷载 H 所作的功分别写为

$$W_n = \frac{1}{2} \int_0^L N(x) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (6)$$

$$W_h = \mathbf{H}^T \mathbf{w} = \int_0^L H(x) w(x) dx \quad (7)$$

假定一个梁单元包含 N 个节点, 其中左端和右端各有一个端节点, 其余节点为内部节点。由于忽略了结构轴向变形, 故每个内部节点只有一个横向自由度, 而每个端节点则有两个自由度, 即横向位移和截面转角。梁的求积单元模型如图 3 所示。

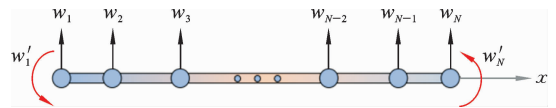


图 3 N-节点求积欧拉梁单元

Fig. 3 N-node quadrature Euler-Bernoulli beam element

按照 Hermite 型求积单元模式, 上述 N 节点梁单元的位移场可假设为

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(x) w(x_i, t) + \psi_1(x) w^{(1)}(x_1, t) + \psi_N(x) w^{(1)}(x_N, t) = \sum_{i=1}^{N+2} H_i(x) \bar{w}_i(t) \quad (8)$$

式中, $\bar{w}_j = w_j$ ($j = 1, 2, \dots, N$), $\bar{w}_{N+1} = w_1^{(1)}$, $\bar{w}_{N+2} = w_N^{(1)}$, H_i 表示 Hermite 插值多项式, 其定义为

$$H_i(x) = \varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x_i - x_1)(x_i - x_N)} l_i(x) (x - x_N)(x - x_1) & (i=2, 3, \dots, N-1) \\ \frac{1}{x_i - x_{N-i+1}} l_i(x) (x - x_{N-i+1}) - \left[a_{ii} + \frac{1}{x_i - x_{N-i+1}} \right] \psi_i(x) & (i=1, N) \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} H_{N+1}(x) = \psi_1(x) = \frac{1}{(x_1 - x_N)} l_1(x) (x - x_1)(x - x_N) \\ H_{N+1}(x) = \psi_N(x) = \frac{1}{(x_N - x_1)} l_N(x) (x - x_N)(x - x_1) \end{cases} \quad (10)$$

式中, $l_i(x)$ 为 Lagrange 插值多项式, a_{ii} 表示 Lagrange 多项式一阶导数系数, 分别按照下式计算

$$l_i(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_N)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_N)} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \quad (11)$$

$$a_{ij} = \left. \frac{\partial l_j(x)}{\partial x} \right|_{x=x_i} = \begin{cases} \frac{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^N (x_i - x_k)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^N (x_j - x_k)} & (i \neq j) \\ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \frac{1}{x_i - x_k} & (i = j) \end{cases} \quad (12)$$

为获取单元对角质量矩阵^[28], 可利用 Lagrange 形函数来构造梁单元的位移场:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^N l_i(x) w(x_i, t) = \sum_{i=1}^N l_i(x) w_i(t) \quad (13)$$

将上述 Lagrange 型位移场函数代入式(4), 并且将表达式(8)分别代入式(5)和式(6), 采用无量纲节点坐标 $\xi_i (i=1, 2, \dots, N)$ 表示, 其中 $\xi = (2x - L)/L$, 可得

$$T = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{m(\xi)L}{2} \left[\sum_{i=1}^N l_i(\xi) \dot{w}_i(t) \right]^2 d\xi = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{w}}^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{w}} \quad (14)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{8EI(\xi)}{L^3} \right) \left[\sum_{i=1}^{N+2} \frac{d^2 H_i(\xi)}{d\xi^2} \bar{w}_i(t) \right]^2 d\xi = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{w}}^T \mathbf{k} \bar{\mathbf{w}} \quad (15)$$

$$W_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{2N(\xi, t)}{L} \right) \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial H_i(\xi)}{\partial \xi} \bar{w}_i(t) \right)^2 d\xi = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{w}}^T \mathbf{g} \bar{\mathbf{w}} \quad (16)$$

式中, $\dot{\mathbf{w}}$ 表示 \mathbf{w} 对时间的一阶导. \mathbf{m} , \mathbf{k} 和 \mathbf{g} 分别表示求积单元的质量矩阵、刚度矩阵和几何刚度矩阵. 采用数值积分(Gauss 积分或 GLL 积分), 其矩阵元素可分别表示为

$$m_{ij} = \int_{-1}^1 \frac{m(\xi)L}{2} l_i(\xi) l_j(\xi) d\xi = \frac{L}{2} \sum_{k=1}^N G_k m(\xi_k) l_{ki} l_{kj}$$

$$= \frac{L}{2} G_i m(\xi_i) l_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, N) \quad (17)$$

$$g_{ij} = \frac{2}{L} \int_{-1}^1 N(\xi, t) \frac{dH_i(\xi)}{d\xi} \frac{dH_j(\xi)}{d\xi} d\xi = \frac{2}{L} \sum_{k=1}^N N(\xi_k, t) G_k A_{ki} A_{kj} \quad (i, j = 1, 2, \dots, N, N+1, N+2) \quad (18)$$

$$k_{ij} = \int_{-1}^1 \left(\frac{8EI(\xi)}{L^3} \right) \frac{d^2 H_i(\xi)}{d\xi^2} \frac{d^2 H_j(\xi)}{d\xi^2} d\xi = \sum_{k=1}^N G_k \cdot \left(\frac{8EI(\xi_k)}{L^3} \right) \frac{d^2 H_i(\xi_k)}{d\xi^2} \frac{d^2 H_j(\xi_k)}{d\xi^2} d\xi = \frac{8}{L^3} \sum_{k=1}^N G_k \cdot EI(\xi_k) B_{ki} B_{kj} \quad (i, j = 1, 2, \dots, N, N+1, N+2) \quad (19)$$

其中 G_k 表示积分节点对应的权重; A_{ij} 和 B_{ij} 分别表示形函数 H_i 在单元节点处的一阶导与二阶导数系数. 根据微分求积法的导数计算法则, 它们可以显式地计算, 即

$$\psi_j^{(k)}(\xi_i) = \frac{1}{(\xi_j - \xi_{N-j+1})} \{ l_j^{[k]}(\xi_i) (\xi_i - \xi_1) (\xi_i - \xi_N) + k(k-1) l_j^{[k-2]}(\xi_i) + k l_j^{[k-1]}(\xi_i) [(\xi_i - \xi_1) + (\xi_i - \xi_N)] \} \quad (j = 1, N; i = 1, 2, \dots, N) \quad (20)$$

$$\varphi_j^{(k)}(\xi_i) = \frac{1}{(\xi_j - \xi_{N-j+1})} \left[l_j^{[k]}(\xi_i) (\xi_i - \xi_{N-j+1}) + k l_j^{[k-1]}(\xi_i) \right] - \left[l_j'(\xi_j) + \frac{1}{\xi_j - \xi_{N-j+1}} \right] \psi_j^{[k]}(\xi_i) \quad (j = 1, N; i = 1, 2, \dots, N) \quad (21)$$

$$\varphi_j^{(k)}(\xi_i) = \frac{1}{(\xi_j - \xi_1) (\xi_j - \xi_N)} \{ l_j^{[k]}(\xi_i) (\xi_i - \xi_1) \cdot$$

$$(\xi_i - \xi_N) + k(k-1)L_j^{[k-2]}(\xi_i) + kL_j^{[k-1]}(\xi_i)[(\xi_i - \xi_1) + (\xi_i - \xi_N)] \quad (j = 2, 3, \dots, N-1; i = 1, 2, \dots, N) \quad (22)$$

令 $k = 1$ 得到 A_{ij} 后, B_{ij} 也可方便地由下式计算:

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N A_{ik} A_{kj} \quad (23)$$

2.2 含有集中质量的求积梁单元

建立含有集中质量的求积梁单元本质上是处理

单元节点与积分点不重合这一问题. 按照基函数最小化最优的原则^[29,30], 在 Lagrange 型求积单元中基于 Lagrange 插值函数的 GLL 节点是最佳选择, 而基于 Lagrange 插值函数的等距节点则是最差的选择; 而在 Hermite 型求积单元中, 基于 Hermite 插值函数的等距节点是最优的(节点数不超过 8). 这可通过图 4 中展示的两种单元在不同节点条件下插值函数的最值来体现.

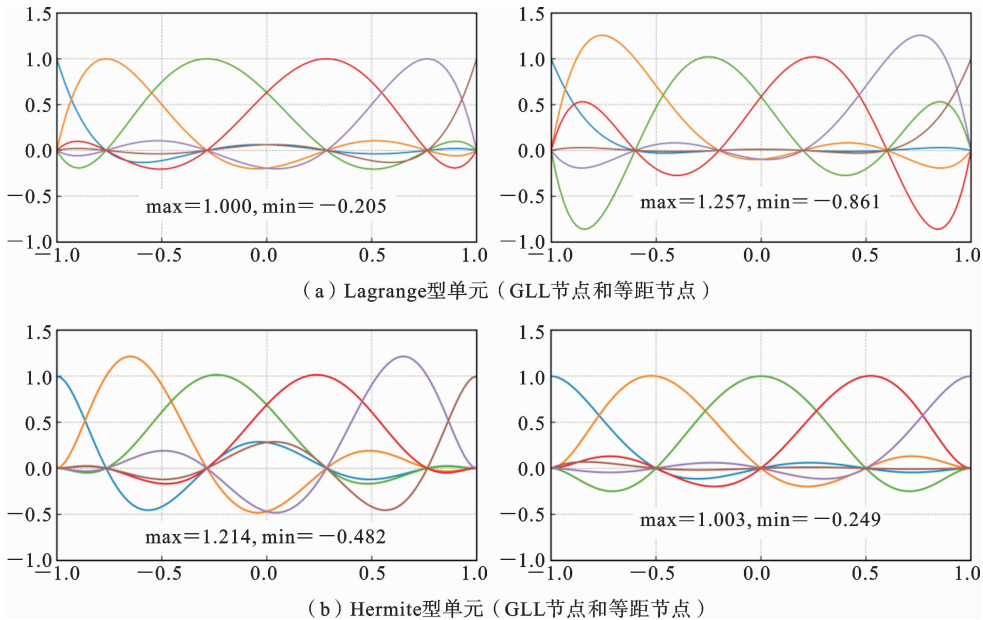


图 4 两类单元不同节点的插值函数

Fig. 4 Interpolation functions of different nodes of two types of element

由于等距节点的 Hermite 单元表现出较好的基函数性质, 所以对于像高层建筑这类结构, 为计算其结构特性和动态响应, 开发一种等间距节点且含集中质量的求积单元是有价值的. 为此, 以 6-等距节点单元为例, 建立该类型单元模型, 单元的相关参数如图 5 所示.

为常数), 其中 δ 表示狄拉克 δ 函数, $M(x)$ 表示楼层集中质量, 由于地基处 $M(x_0) = 0$, 且为了便于单元组装可将第一个节点的集中质量设为 0, 即有

$$m(x) = \rho A + \sum_{i=1}^N M(x) \delta(x - x_i) \quad (N = 6) \quad (24)$$

则单元动能表达式:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m(x) \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho A + \sum_{i=1}^N M(x) \delta(x - x_i) \right] \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (25)$$

为获取对角质量矩阵, 采用式 (13) 的位移函数来计算动能:

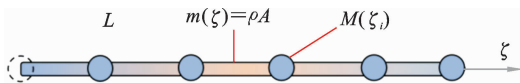


图 5 6-节点求积欧拉梁单元

Fig. 5 6-node quadrature Euler-Bernoulli beam element

假设单元的质量分布函数由式 (24) 表示 (ρ, A

$$T = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\rho AL}{2} \left[\sum_{i=1}^N l_i(\xi) \dot{w}_i(t) \right]^2 d\xi + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[\sum_{i=1}^N M(\xi) \delta(\xi - \xi_i) \right] \left[\sum_{i=1}^N l_i(\xi) \dot{w}_i(t) \right]^2 d\xi = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{w}}^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{w}} \quad (26)$$

王鑫伟等^[26,27]提出了一种简单但通用的方法来解决单元节点和积分节点不同的情况。该方法给出了积分点处应变的显示计算式。记 N 个积分点为 $\zeta_k (k=1, 2, \dots, N)$ 且其对应的权重系数为 G_k ，则 N 个积分点在形函数 $l_i(\xi)$ 上的函数值可通过下式计算：

$$l_i(\xi) \Big|_{\xi=\zeta_k} = l_i(\zeta_k) = l_{ik} \quad (27)$$

利用积分点 ζ_k 同样可以构造出形函数 $\hat{l}_i(\xi)$ ，即：

$$l_i(\xi) = \sum_{k=1}^N \hat{l}_k(\xi) l_i(\zeta_k) = \sum_{k=1}^N \hat{l}_k(\xi) l_{ik} \quad (28)$$

式中 $\hat{l}_k(\xi)$ 为基于 N 个积分点 ζ_k 的 Lagrange 插值函数，由下式计算：

$$\hat{l}_k(\xi) = \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^N \frac{\xi - \zeta_m}{\zeta_k - \zeta_m} \quad (29)$$

显然在确定 l_{ik} 之后，将新的位移场表达式代入式(26)，便可获取节点和积分点不重合时的单元对角质量矩阵 \mathbf{m} ，即其对角元素由下式计算（其中， l_{ii} 表示积分点处对应的形函数值）：

$$m_{ii} = \frac{\rho AL}{2} \sum_{k=1}^N G_k l_i(\zeta_k) + M(\xi_i) l_i(\zeta_i) l_i(\zeta_i) = \frac{\rho AL}{2} \sum_{k=1}^N G_k l_{ik} + M(\xi_i) l_{ii} l_{ii} \quad (30)$$

对于 \mathbf{g} 和 \mathbf{k} ，由于单元的节点和积分点不同导致其求解方式与式(18)和(19)略有不同，其矩阵元素可通过下式进行计算：

$$g_{ij} = \frac{2}{L} \sum_{k=1}^N N(\xi_k, t) G_k \bar{A}_{ki} \bar{A}_{kj} \\ k_{ij} = \frac{8EI}{L^3} \sum_{k=1}^N G_k \bar{B}_{ki} \bar{B}_{kj}$$

其中 \bar{A}_{ij} 、 \bar{B}_{ij} 可由式(20)~(22)求解，但需要将公式中的关于节点对应的 Lagrange 权系数换为积分点对应的权系数，即公式中的 ξ_i 用 ζ_k 代替；积分点对应的各阶 Lagrange 权系数由下式计算：

$$a_{ij} = \frac{2}{L} \frac{dl_j(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=\zeta_i} = \frac{2}{L} \sum_{k=1}^N \frac{d\hat{l}_k(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=\zeta_i} l_j(\zeta_k)$$

$$= \frac{2}{L} \sum_{k=1}^N \hat{a}_{ik} l_{jk} \quad (31)$$

$$b_{ij} = \frac{4}{L^2} \frac{dl_j^2(\xi)}{d\xi^2} \Big|_{\xi=\zeta_i} = \frac{4}{L^2} \sum_{k=1}^N \frac{d\hat{l}_k^2(\xi)}{d\xi^2} \Big|_{\xi=\zeta_i} l_j(\zeta_k) = \frac{4}{L^2} \sum_{k=1}^N \hat{b}_{ik} l_{jk} \quad (32)$$

\hat{a}_{ij} 和 \hat{b}_{ij} 分别表示积分点对应的 Lagrange 插值函数的一阶导和二阶导权系数矩阵，二者同样具有与式(23)相同的计算关系。将式(31)和式(32)对应代入式(20)~(22)，便可获取 Hermite 形函数在积分点处各阶导数的权系数。

3 结构总体控制方程

考虑 P - Δ 效应的结构总体控制方程可以表示为

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{w}} + (\mathbf{K} - \mathbf{G}) \mathbf{w} = \mathbf{F} \quad (33)$$

式中， \mathbf{M} 为总体质量矩阵， \mathbf{K} 为总体刚度矩阵， \mathbf{G} 为总体几何刚度矩阵， \mathbf{F} 为总体等效荷载向量， \mathbf{w} 为结构的横向节点位移向量。

对于一个划分为 Z 个单元、每个单元具有 N 个节点的悬臂梁模型，其整体等效荷载向量 $\mathbf{F} = \{\mathbf{F}_w^T, \mathbf{\Omega}_\theta^T\}^T$ ，即

$$\mathbf{F}_w = \{f_1^e, \dots, f_N^e + f_1^{e2}, \dots, f_N^e + f_1^{e3}, \dots, \dots, f_N^e\}^T \quad (34)$$

$$\mathbf{\Omega}_\theta = \{\Omega_1^e, \Omega_N^e + \Omega_1^{e2}, \dots, \dots, \Omega_N^e\}^T \quad (35)$$

由于每个单元只涉及 2 个转角，因此 $\mathbf{\Omega}_\theta$ 向量的维数是 $Z+1$ 维， \mathbf{F} 的维数为 $N \cdot Z+2$ 。值得注意的是，当单元节点与积分点不同时，单元等效作用荷载应由如下公式进行求解：

$$f_i = \int_0^L H(x) \varphi_i(x) dx = \frac{L}{2} \int_{-1}^1 H(\xi, t) \varphi_i(\xi) d\xi = \frac{L}{2} \sum_{k=1}^N G_k l_{ik} H(\xi_i, t) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (36) \\ \beta_i = \frac{L}{2} \int_{-1}^1 H(\xi, t) \psi_i(\xi) d\xi = 0 \quad (i = 1, N) \quad (37)$$

式中， f_i 为横向等效节点荷载， β_i 为转角等效节点荷载， $H(\xi, t)$ 为横向分布荷载。

在利用 QEM 形成结构的总体刚度矩阵时，其中包含了转角的影响，而得到节点处的位移响应

是所关心的主要目标,为此将水平向运动 \mathbf{W} 定为主自由度向量,节点转动 $\boldsymbol{\theta}$ 为从自由度向量. 因此,可将位移和转角分离考虑,即结构的振动控制方程写为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_w & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{W}} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ww} & \mathbf{K}_{w\theta} \\ \mathbf{K}_{\theta w} & \mathbf{K}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{W} \\ \boldsymbol{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_w \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (38)$$

令 $\mathbf{M}_\theta = \mathbf{0}$, 可得:

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{K}_{\theta\theta}^{-1} \mathbf{0} - \mathbf{K}_{\theta\theta}^{-1} \mathbf{K}_{\theta w} \mathbf{W} \quad (39)$$

$$\mathbf{M}_w \dot{\mathbf{W}} + \mathbf{K}_w \mathbf{W} = \mathbf{F} \quad (40)$$

其中

$$\mathbf{K}_w = \mathbf{K}_{ww} - \mathbf{K}_{w\theta} \mathbf{K}_{\theta\theta}^{-1} \mathbf{K}_{\theta w}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_w - \mathbf{K}_{w\theta} \mathbf{K}_{\theta\theta}^{-1} \mathbf{W}_\theta$$

显然,式(40)即是标准的结构运动控制方程,并且它只包含了主自由度向量 \mathbf{W} ; 在确定结构运动控制方程后,结合无条件稳定的 Newmark 常平均加速度法便可求解结构的动态响应.

4 算例与讨论

为验证本文方法对高耸结构 P-Δ 效应分析的可行性和准确性,设计了三个计算案例,并将本文方法计算结果分别与有限元解、DQM 解和解析解进行对比分析.

4.1 烟囱算例

以某一混凝土烟囱为例阐释本文方法的应用,其结构模型如图 1(a)所示. 该烟囱高度为 220 m,为保证一般性,假定其质量和刚度沿高度方向呈线性分布,表示为

$$m(x) = \rho A(x) = A_1 - k_1 \cdot x \quad (41)$$

$$EI(x) = A_2 - k_2 \cdot x \quad (42)$$

作用于烟囱上的横向荷载 $H(x, t)$ 满足表达式:

$$H(x, t) = A_3 \sin(\omega_p t) \quad (43)$$

设该烟囱模型和横向外荷载的相关参数如表 1 所示.

表 1 烟囱参数

Table 1 Properties of the Chimneys

L (m)	k_1 (kg/m ²)	k_2 (kN·m)	A_1 (kg/m)	A_2 (kN·m ²)	A_3 (kN)	ω_p (rad·s ⁻¹)
220	5.530×10^3	1.014×10^9	1.473×10^5	2.301×10^{11}	25	$0.93\omega_1$ $1.03\omega_1$

注: ω_p 表示外荷载的作用频率, ω_1 表示结构的一阶固有频率.

根据方程(41)和(42),当 k_1 和 k_2 均为零时,该结构为等截面欧拉梁模型,其固有频率可通过解析

方法得到. 表 2 中列出了在这种情况下 QEM、DQM 以及解析方法的计算结果.

表 2 烟囱前四阶固有频率

Table 2 The first four order natural frequencies for tall Chimneys (rad·s⁻¹)

模态	无轴向荷载情形			考虑轴向荷载情形		
	DQM($N_n=17$)	QEM(1×12)	Analytical	DQM($N_n=17$)	QEM(1×12)	Analytical
1	0.9081	0.9081	0.9081	0.8685	0.8685	—
2	5.6910	5.6910	5.6910	5.6560	5.6560	—
3	15.9348	15.9348	15.9348	15.8973	15.8973	—
4	31.2259	31.2259	31.2259	31.1840	31.1840	—

注: N_n 表示节点数;(1×12)表示采用一个包含 12 个 GLL 节点的单元.

从表 2 可以看出,QEM 仅需使用一个包含 12 个 GLL 节点的单元即可使求解结果与解析解相符,

DQM 则需要 17 个 CGL 节点才能收敛于解析解. 将 k_1 和 k_2 调整为本例参数值,在不考虑轴力影响

时,利用 QEM(一个包含 21 个 GLL 节点的单元), DQM(43 个 CGL 节点)对烟囱模型进行计算,二者前三阶固有频率一致,结构模态如下图 6 中所示.值得注意的是,由于 DQM 的刚度矩阵为非对称矩阵,因此其并不能获取与结构固有频率相对应的模态.

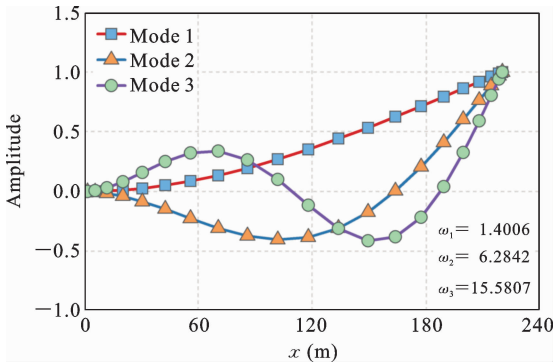


图 6 烟囱的前三阶结构特性

Fig. 6 Chimney's first three natural frequencies and modes

在考虑轴向力的作用后,结构的各阶频率都有所降低.这种频率降低的现象可能导致结构在遭受不同频率外部横向荷载作用时产生不同的响应.因此,以烟囱结构模型的顶点作为采样点,利用 QEM 可获取不同频率外部荷载作用下采样点的动态响应.

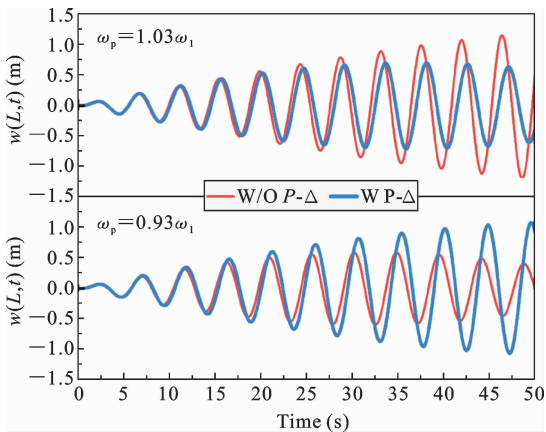


图 7 采样点时程曲线

Fig. 7 Time history curve of sampling point

W 表示 With(考虑轴向荷载情形);可以发现, $P-\Delta$ 效应对高耸结构动态响应产生了两种不同的影响.当结构遭受作用频率为 1.03 倍基频的作用荷载时,会发生共振现象.然而,由于 $P-\Delta$ 效应的存在,结构的固有频率降低,从而抑制了共振现象.同样,当结构受到 0.93 倍基频的作用荷载时,由于下降后的结构固有频率与作用荷载频率接近,结构发生了共振现象.换言之,当 $P-\Delta$ 效应使结构的固有频率降低时,可能会出现接近或远离外部荷载作用频率的情况,从而增加或减小结构的动态响应.这种现象可以理解为结构的内在因素(固有频率)和外在因素(外部荷载作用频率)之间的相互关系变化所致,可简单由图 8 表示:

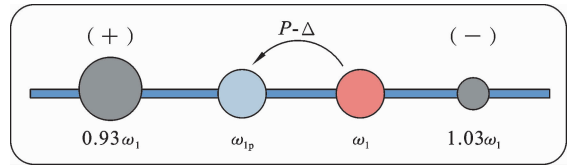


图 8 内外因素与结构动态响应关系

Fig. 8 Relationship of internal and external factors with structural dynamic response

4.2 桥墩算例

以某一真实桥墩为例,使用 QEM 分析其在轴向力、时变轴力作用下的结构频率变化规律及结构动态响应.桥墩的相关参数来自 Li 等^[31]的研究,其简化模型可以由图 1(b)表示;桥墩高度为 90 m,其抗弯刚度和分布质量分别为 $EI=2.225 \times 10^8 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$ 和 $m(x)=19.87 \text{ t/m}$,墩顶的集中质量为 $M_T=700 \text{ t}$.利用 QEM 对桥墩进行分析时,墩顶的集中质量可以直接放置在整体质量矩阵的最后一个元素上,即将其放置在最后一个单元的最后一个节点处. QEM 的计算结果、有限元解以及 Tubaldi 解析方法^[32]的结果汇总在表 3 中.

根据表 3 可以发现 QEM 仅使用了 1 个包含 9 个 GLL 节点的求积单元就能得到与 Tubaldi 解析解一致的结果,且继续增大节点数或单元数,其结果均收敛于解析解,见图 9;而即使 FEM 的单元数为 90 个甚至 100 个时,其求解结果仍未完全收敛于解析解.

图 7 中 W/O 表示 Without(无轴向荷载情形),

表 3 高墩前三阶固有周期

Table 3 The first three order natural periods for tall piers (s)

模态	无轴向荷载情形			考虑轴向荷载情形		
	FEM	Tubaldi	QEM(1×9)	FEM	Tubaldi	QEM(1×9)
1	6.9755	6.968	6.9681	7.7002	7.692	7.6919
2	0.8915	0.884	0.8840	0.9028	0.895	0.8950
3	0.2984	0.292	0.2919	0.2998	0.293	0.2932

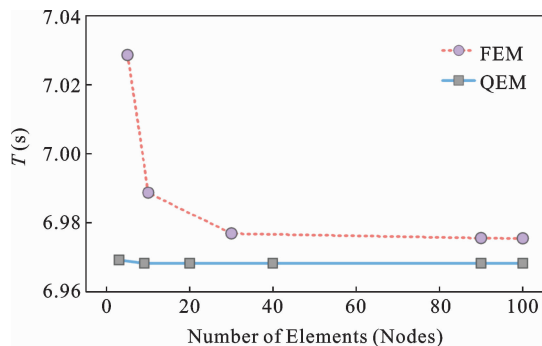


图 9 两种方法收敛速度对比

Fig. 9 Comparison of the convergence speed of the two methods

于计算结构的 P-Δ 效应,这些软件主要依赖于基于几何刚度的有限元法^[12,13].然而,这种方法在分析过程中往往无法始终准确捕捉到结构的内力与位移的变化,也难以全面地描述结构特性变化的规律.尤其在竖向荷载的作用下,结构的刚度矩阵不再仅仅是原弹性刚度矩阵的简单增减,这使得计算过程更为复杂.与此相比,采用 QEM 进行分析则能够精确描述高耸结构在考虑 P-Δ 效应、时变轴力情况下结构特性的变化.因此,对结构模型输入 1940 年 5 月 18 日美国加州帝王谷地震(Imperial Valley earthquake)中记录到的经典 El Centro 地面加速度时程,并截取地震记录前 40 s 作用于结构,其水平(南北向)和竖向地震加速度时程反应谱如图 10 所示.

商用有限元软件,如 SAP2000 和 PKPM,常用

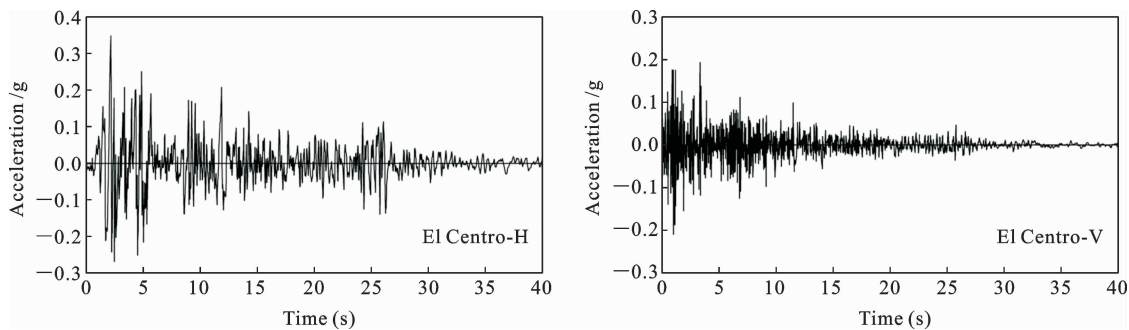


图 10 水平和竖向地震加速度时程图

Fig. 10 Time history of horizontal and vertical seismic acceleration

以结构的顶点作为采样点,对比分析结构在考虑 P-Δ 效应以及考虑时变轴力作用下采样点的时程曲线,同时分析二者对结构固有频率的影响规律.

如图 11 所示,在采用有限元法(FEM)和 QEM 对结构模型进行分析时,观察到采样点的时程曲线几乎一致.当考虑 P-Δ 效应后,采样点的位移幅值增加了 4.25%,这验证了 P-Δ 效应会放大结构动态

响应的观点.此外,考虑竖向地震荷载后,结构固有频率的变化规律可以从图 12 进行阐述.

在图 12 中, N 表示竖向轴力, G 表示竖向地震荷载作用, ω_i 表示时变频率,即在时变轴向荷载作用下,结构的频率不再是恒定的,而会随着轴力的改变而改变.从图中可以看出,在考虑 P-Δ 效应之后,结构的一阶频率从 0.9016 降低为 0.8168,同时在

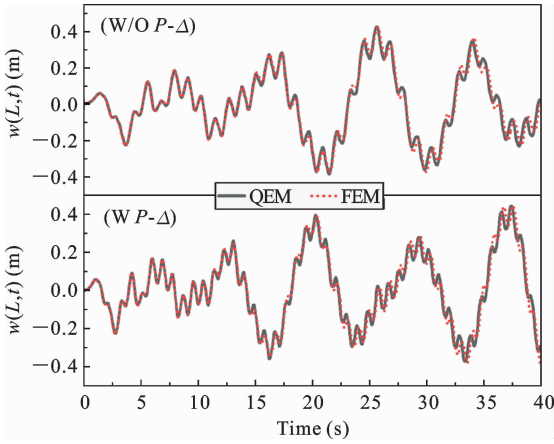


图 11 结构顶点时程响应曲线

Fig. 11 Time history response curve of the Structural apex

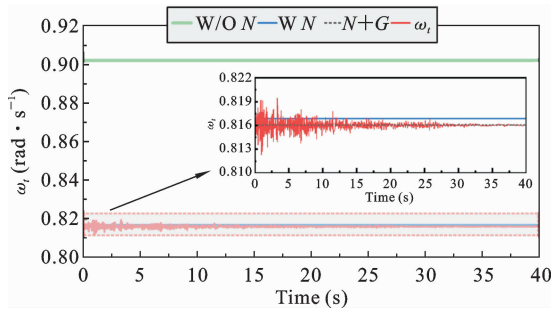


图 12 不同荷载状态下结构的固有频率

Fig. 12 Structural natural frequency under different loading states

考虑时变轴力作用之后, 结构频率会轻微下降(约 0.09%)。此后, 结构的时变频率会呈现与竖向地震

动形状一致的时程曲线, 这一现象源于假设轴向刚度无穷大, 即忽略轴向变形, 将竖向作用力直接等效于轴力所致。需要注意的是, El Centro 竖向地震动对结构频率的影响较小, 因此考虑时变轴力作用时, 样点的时程曲线与不考虑时变轴力时的几乎相同, 如图 13 所示。

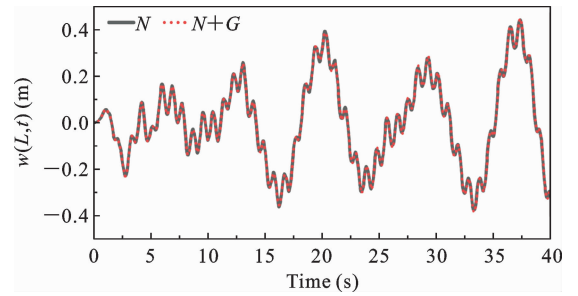


图 13 结构顶点时程响应曲线

Fig. 13 Time history response curve of the structural apex

4.3 高层建筑算例

烟囱和桥墩模型验证了 QEM 应用于高耸结构 P-Δ 效应分析时的可行性与准确性。该小节将针对高层建筑的“多自由度体系”模型采用两种不同的方案进行动力 P-Δ 效应分析。以某一栋 108 m 高层建筑为例, 其结构模型如图 1(c-d), 结构特性参数如下表所示。

表 4 结构特性参数

Table 4 Properties of the structure

结构总高度	楼层高度	层间分布质量	层间刚度	楼层数	楼层质量
L (m)	h (m)	m (kg/m)	EI (kN · m ²)	N_f	M_l (kg)
108	3.6	1.56×10^5	5.36×10^9	30	100×10^3

在第一种方案中, 高层建筑的每个楼层均被视为一个求积梁单元, 楼层质量 M_l 被置于各单元的连接点。考虑到建筑共有 30 层, 因此将模型划分为 30 个单元。确定单元数量后, 模型的收敛性和准确

性主要受到空间域内各单元节点划分数量的影响。为此, 分别使用具有 3、5 和 7 个 GLL 节点的单元进行分析。表 5 汇总了在考虑和不考虑轴力的情形下, 结构各阶固有频率的计算结果。

表 5 结构模型的前四阶固有频率

Table 5 The first four order natural frequency for the structural model (rad · s⁻¹)

Mode	无轴向荷载情形			考虑轴向荷载情形		
	$N_n=3$	$N_n=5$	$N_n=7$	$N_n=3$	$N_n=5$	$N_n=7$
ω_1	1.6197	1.6197	1.6197	1.5751	1.5751	1.5751
ω_2	10.1489	10.1489	10.1489	10.1102	10.1102	10.1102
ω_3	28.4136	28.4135	28.4135	28.3738	28.3737	28.3737
ω_4	55.6725	55.6720	55.6720	55.6306	55.6301	55.6301

从表 5 可以发现,在单元数 $N_f=30$ 的前提下,无论是否考虑轴向荷载,单元节点数 $N_n=3$ 时的求解结果已接近收敛解。

在第二种方案中,将高层建筑的若干楼层视为一个含集中质量的求积梁单元,将楼层质量 M_l 置

于等距单元节点处。据此,可将该算例划分为 5 个 6 等距节点的 Hermite 型单元。表 6 汇总了方案 1(采用节点数 $N_n=5$ 的单元)与方案 2 的各阶固有频率求解结果。两种方案相对应的结构模态如图 14 所示。

表 6 结构模型的前四阶固有频率对比

Table 6 Comparison of the first four natural frequencies of structural model (rad · s⁻¹)

Mode	无轴向荷载情形			考虑轴向荷载情形		
	Scheme1	Scheme2	error	Scheme 1	Scheme 2	error
ω_1	1.6197	1.6156	0.25%	1.5751	1.5710	0.26%
ω_2	10.1489	10.1228	0.25%	10.1102	10.0840	0.26%
ω_3	28.4135	28.3369	0.27%	28.3737	28.2970	0.27%
ω_4	55.6720	55.4958	0.32%	55.6301	55.4537	0.32%

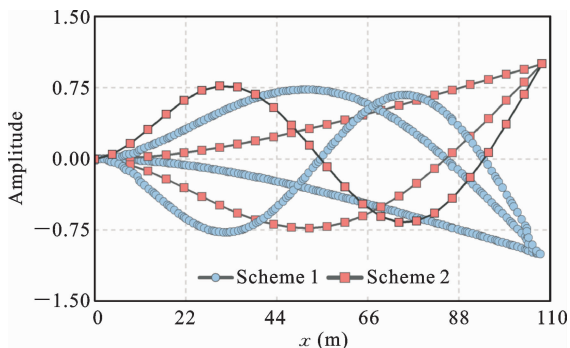


图 14 两种方案下结构模型的前三阶模态

Fig. 14 The first three orders of modes of the structural model under the two Schemes

将 El Centro 地面加速度时程信息输入到结构模型,对其进行结构动态响应分析,求解得到方案 1

和方案 2 的整体最大横向位移和采样点的时程曲线如下图所示。

根据表 6 和图 15 可以发现,采用含集中质量的 6-等距节点求积单元的求解结果与方案 1 的结果基本一致,由于频率的轻微差异,使得整体横向最大位移响应有轻微差别(可认为方案 1 的求解结果是精确值);本文数值方法采用 Python 语言进行编译,并通过比较两种方案的 CPU 运算时间来评估计算效率,图 16 展示了两种方案在 CPU 运行时间方面的对比。

可以发现,通过将楼层的集中质量直接放置在单元内部节点上,方案 2 显著减小了结构模型的整体刚度矩阵和整体质量矩阵的维度,从而提高了动力 P-Δ 效应分析的计算效率。这种优化是有意义的,特别是在分析时变轴力对高层结构动态响应的

影响时,模型的整体几何刚度矩阵会时刻发生变化, 因此其维度的大小成为影响计算效率的主要原因.

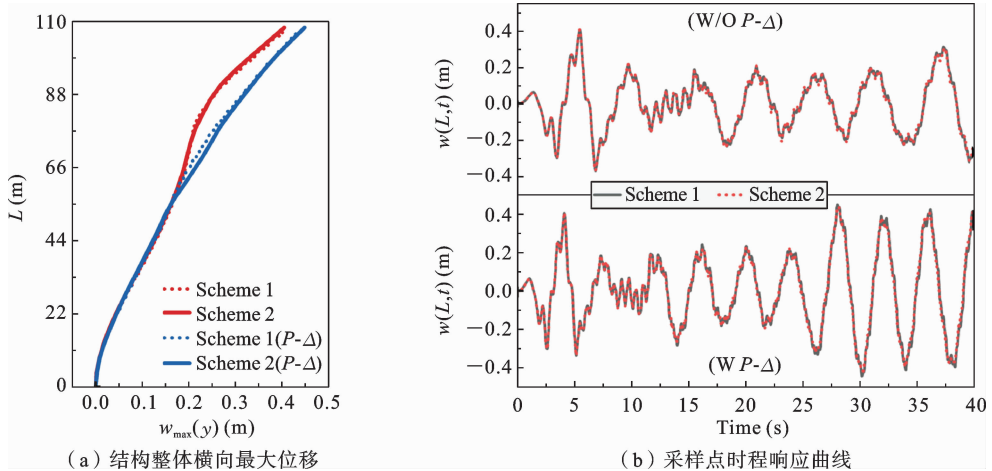


图 15 结构动态响应比较

Fig. 15 Comparison of structural dynamic response

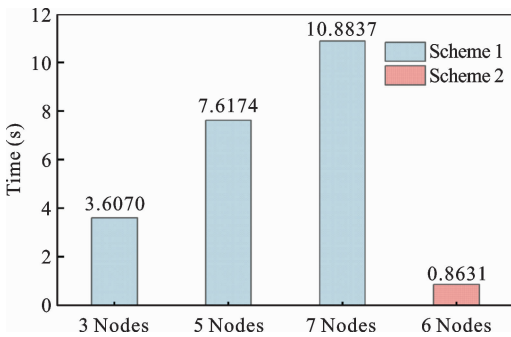


图 16 CPU 运行时间对比

Fig. 16 Comparison of CPU running time

5 结论

本文利用 QEM 建立了一种能够处理不同类型高耸结构动力 P-Δ 效应的通用分析方法,该方法不需要繁琐的迭代即可获取高精度的问题解答. 具体结论如下:

(1) P-Δ 效应对结构产生有利或不利的影 响取决于外部荷载的幅值大小,以及结构固有频率的变化和外荷载作用频率之间的关系.

(2) 基于 QEM 的高精度动力 P-Δ 效应分析方法适用于各种类型的高耸结构,包括几何和材料上的不连续性. 相较于 DQM 方法,该方法的应用更

加方便和灵活.

(3) 在不考虑轴向变形的情况下,时变轴力对高耸结构的影响似乎较轻微,因为它对结构的几何刚度矩阵影响较小. 这意味着结构的频率不会产生较大的波动,因此认为其影响可忽略不计.

(4) 依据基函数最小化最优的原则,本文建立了含有集中质量的 Hermite 单元,在对多高层结构模型进行分析时,该方法通过降低整体刚度矩阵和质量矩阵的维度展现出较好的计算效率.

本文旨在利用 QEM 方法解决高耸结构动力 P-Δ 效应问题,并着重于方法的建立、验证和优化. 未来的研究可以基于此方法,探索双向地震动对竖向作用敏感型高耸结构的影响规律,深化对结构动力行为及在复杂荷载下响应的理解. 借助机器学习和大数据分析技术,构建可靠的双向地震动作用下结构的预测模型,为高耸结构的设计提供可靠支持.

参考文献

[1] Gaiotti R, Smith B S. P-delta analysis of building structures[J]. Journal of Structural Engineering, ASCE, 1989, 115(4): 755-770.

[2] Adams P F. The Design of Steel Beam-Columns[M]. Canada: Canadian Steel Industries Construction Council, 1974.

- [3] Smith B S, Gaiotti R. Iterative Gravity Load Method for P -delta Analysis: Structural Engineering Series Report[R]. No. 88-4; McGill University, 1988.
- [4] Canadian Steel Industries Construction Council. The Design of Steel Beam Columns[S]. 1974.
- [5] Bernal D. Amplification factors for inelastic dynamic P - Δ effects in earthquake analysis[J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 1987, 15(5): 635-651.
- [6] MacRae G A. P - Δ effects on single-degree-of-freedom structures in earthquakes[J]. Earthquake Spectra, 1994, 10(3): 539-568.
- [7] Tremblay R, Duval C, Leger P. Effects of hysteretic models and ground motion characteristics on seismic P -delta strength amplification factors[J]. Stability and Ductility of Steel Structures, 1997, 97: 311-318.
- [8] Tremblay R, Cote B, Leger P. An evaluation of P - Δ amplification factors in multistorey steel moment resisting frames[J]. Revue Canadienne De Génie Civil, 2011, 26(5): 535-548.
- [9] Amara F, Bosco M, Marino E M, Rossi P P. An accurate strength amplification factor for the design of SDOF systems with P - Δ effects[J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 2014, 43(4): 589-611.
- [10] Goldberg J E. Approximate methods in stress and stability analysis of tall building frames [C]//Proceedings of the Regional Conference on Tall Buildings, Bangkok, Thailand, 1974: 177-194.
- [11] Rutenberg A. A direct P -delta analysis using standard plane frame computer programs[J]. Computers & Structures, 1981, 14(1-2): 97-102.
- [12] Wilson E L, Habibullah A. Static and dynamic analysis of multi-story buildings, including P -delta effects [J]. Earthquake Spectra, 1987, 3(2): 289-298.
- [13] Nixon D, Beaulieu D, Adams P F. Simplified second order frame analysis[J]. Canadian Journal of Civil Engineering, 1975, 2(4): 602-605.
- [14] 李鸿晶, 杨筱朋, 伍小平. 时变轴力下结构 P - Δ 效应高精度分析方法[J]. 地震工程与工程振动, 2020, 40(5): 11-23 (Li H J, Yang X P, Wu X P. A high-order approach to P - Δ effect analysis of tall structures subjected to the time-varying axial force[J]. Earthquake Engineering and Engineering Dynamics, 2020, 40(5): 11-23. (in Chinese))
- [15] Bellman R, Casti J. Differential quadrature and long-term integration[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1971, 34(2): 235-238.
- [16] Bellman, Kashef B G, Casti J. Differential quadrature: a technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations[J]. Journal of Computational Physics, 1972, 10(1): 40-52.
- [17] Bert C W, Malik M. Differential quadrature method in computational mechanics: a review[J]. Applied Mechanics Reviews, 1996, 49(1): 1-28.
- [18] 张振根, 孙广俊, 李鸿晶. 近断层地震作用下考虑 P - Δ 效应的混凝土结构响应分析[J]. 防灾减灾工程学报, 2017, 37(5): 48-55. (Zhang Z G, Sun G J, Li H J. Response analysis of concrete structure considering the P - Δ effect due to near-fault earthquake ground motions[J]. Journal of Disaster Prevention and Mitigation Engineering, 2017, 37(5): 48-55. (in Chinese))
- [19] 李微哲, 娄平. 计入水平力剪切变形和轴力影响的柱单元及其在支座桩基共同作用分析中的应用[J]. 公路交通科技, 2018, 35(1): 46-54. (Li W Z, Lou P. Beam element considering lateral shear deformation and axial force effect and its application in analysis of bearing and pile combined action [J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2018, 35(1): 46-54. (in Chinese))
- [20] 朱达力, 王珊珊, 朱镜清. 高耸结构 P - Δ 效应分析的精度问题[J]. 哈尔滨建筑大学学报, 2002, 35(3): 51-53. (Zhu D L, Wang S S, Zhu J Q. Accuracy of P - Δ effect analysis of tall structures[J]. Journal of Harbin University of Civil Engineering & Architecture, 2002, 35(3): 51-53. (in Chinese))
- [21] 李顺玉. 水平地震作用下多自由度体系动力二阶效应计算方法研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2011. (Li S Y. Study on Calculation Methods for Seismic Second-order Effect of MDOF System under Horizontal Earthquake[D]. Chongqing: Chongqing University, 2011. (in Chinese))
- [22] 易伟建, 茹文恺. 近场地震作用下考虑二阶效应的混凝土框架抗震分析[J]. 地震工程与工程振动, 2012, 32(2): 106-113. (Yi W J, Ru W K. Seismic a-

- analysis of concrete frame structures including second order effect subjected to near-field earthquake ground motions[J]. *Earthquake Engineering and Engineering Dynamics*, 2012, 32(2):106-113. (in Chinese))
- [23] Zhong H Z, Yu T. Flexural vibration analysis of an eccentric annular Mindlin plate[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2007, 77(4): 185-195.
- [24] Zhong H Z, Wang Y. Weak form quadrature element analysis of Bickford beams[J]. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2010, 29(5): 851-858.
- [25] Zhong H Z, Yu T. A weak form quadrature element method for plane elasticity problems [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2009, 33(10): 3801-3814.
- [26] Wang X W, Yuan Z X, Jin C H. A general integration scheme in quadrature element method[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2020, 105: 106305.
- [27] Jin C H, Wang X W, Ge L Y. Novel weak form quadrature element method with expanded Chebyshev nodes[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2014, 34: 51-59.
- [28] Wang X W. *Differential Quadrature and Differential Quadrature Based Element Methods: Theory and Applications*[M]. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2015.
- [29] Boyd J P. A numerical comparison of seven grids for polynomial interpolation on the interval[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 1999, 38(3-4): 35-50.
- [30] Brutman L. On the Lebesgue function for polynomial interpolation[J]. *Siam Journal on Numerical Analysis*, 1978, 15(4): 694-704.
- [31] Liang Z, Li J. Investigation on rational analytical model of tall bridge pier[J]. *Earthquake Engineering & Engineering Vibration*, 2007, 27(2): 91-98.
- [32] Tubaldi E, Scozzese F, Domenico De D, Dall'Asta A. Effects of axial loads and higher order modes on the seismic response of tall bridge piers[J]. *Engineering Structures*, 2021, 247: 113134.

Method of High-Order Precise Analysis for the $P-\Delta$ Effect in Tall Structures due to Arbitrary Axial Loads

Yan Lu Hongjing Li Xiaopeng Yang Yinquan Zhai

(*Institute of Engineering Mechanics, Nanjing Tech University, Nanjing, 211816*)

Abstract Traditional methods for analyzing the $P-\Delta$ effect in tall structures often fail to adequately account for time-varying axial forces, which can lead to an underestimation of its impact on structural safety. This paper introduces a high-order accurate analysis method based on the weak-form quadrature element method (QEM). We develop Hermite-type quadrature element models for both distributed and concentrated mass structures. The proposed method is capable of addressing dynamic $P-\Delta$ effects caused by arbitrary axial loads without iterative computations, yielding precise solutions. Its efficacy and accuracy are validated through comparative analysis involving three distinct case studies. Numerical results confirm that the proposed approach delivers highly accurate $P-\Delta$ effect analyses, achieving exceptional precision in dynamic response with a single quadrature element, even in complex structural systems. Overall, this method offers a novel and efficient solution for detailed analysis of $P-\Delta$ effects in tall structures.

Key words tall structures, $P-\Delta$ effect, weak-form quadrature element, time-varying axial force, Hermite interpolation