

功能梯度一维六方准晶层合梁的自由振动和弯曲变形研究*

高得旺¹ 郭俊宏^{1,2**} 王浩田¹ 孙托娅²

(¹ 内蒙古工业大学理学院力学系, 呼和浩特, 010051)(² 内蒙古工业大学航空学院, 呼和浩特, 010051)

摘要 本文利用伪 Stroh 公式, 研究具有功能梯度的一维六方准晶层合梁的自由振动和弯曲问题. 建立准晶层合简支梁模型, 采用传递矩阵法, 推导出简支边界条件下梁自由振动的固有频率及弯曲变形位移的精确解, 并与已有结果对比, 验证本文模型和方法的准确性和有效性. 通过数值算例, 分析两种不同叠层顺序下层合梁的高跨比、层厚比和功能梯度系数对一维准晶层合简支梁固有频率和弯曲变形的影响规律. 结果表明, 固有频率随功能梯度系数增大而增大; 两种叠层顺序下随功能梯度系数的增大, 声子场位移逐渐减小而相位子场位移逐渐增大; 功能梯度系数和叠层顺序对层合梁的应力有很大影响, 其中对准晶特有的相位子场应力影响更大. 本文给出的精确解可为研究准晶梁的各种数值方法和实验结果提供理论参考.

关键词 准晶, 功能梯度, 简支梁, 自由振动, 弯曲变形

DOI: 10.19636/j.cnki.cjasm42-1250/o3.2024.032

0 引言

1984 年, 以色列科学家 Shechtman^[1] 在急冷凝固的 Al-Mn 合金中发现了二十面体准晶体, 它具有五重旋转对称性. 准晶被首次报导后, 引起了晶体学、材料学、物理学等各界的强烈反响. 准晶是一种新型固体结构^[2], 具有宏观对称性但不具有普通晶体的平移对称性, 其独特的原子排列方式使准晶具有比传统的合金更优异的物理性能和力学性能^[3], 比如高强度、高硬度和高摩擦系数等, 因此, 准晶常用作表面改性材料如不粘锅炊具表面、隔热材料、颗粒增强相等^[4].

在实际的工程试验中, 梁板^[5] 结构是重要的组成部分, 受到大量学者广泛关注. 对于准晶板的研究, Gao 等^[6,7] 对二维正交准晶材料梁和板的混合边界条件进行研究, 导出准晶梁弯曲下的衰减状态条件. Pan^[8] 提出的伪 Stroh 公式与传递矩阵法, 在解

决多层板和梁问题上具有推导过程简单, 并具有高精度优点. Sun 等^[9] 利用伪 Stroh 型公式和传递矩阵法, 得到了二维准晶层状纳米板非局部振动频率和屈曲临界载荷的精确解. Wang 和 Guo^[10] 研究了具有非理想界面的一维六方准晶板的弯曲变形和自由振动, 分析了非理想参数和叠层顺序对准晶梁板弯曲变形和振动的影响. Zhang 等^[11] 研究多层一维六方压电准晶板受表面电、弹性载荷作用下的静态弯曲问题. 对于准晶梁的研究, 黄孚等^[12] 利用准晶二维本构关系和物理方程以及层间连续条件和边界条件, 得出一维六方准晶悬臂梁在自由端受到集中力作用下声子场和相位子场的位移解析解. Sun 和 Guo^[13] 利用状态空间-微分求积法 (SSDQM), 研究了一维准晶层合梁在各种边界条件下的振动响应和弯曲变形. 陈韬等^[14] 利用伪 Stroh 型公式和传递矩阵法, 给出了一维六方准晶层合梁自由振动和屈曲问题的精确解. Li 等^[15] 引入修正偶应力理论, 研究了一维压电准晶纳米梁的自由振动.

* 国家自然科学基金项目 (12072166, 21462007), 内蒙古自治区科技计划项目 (2021GG0254), 内蒙古自治区直属高校基本科研业务费项目 (JY20220075), 内蒙古自然科学基金重点项目 (No. 2024ZD21) 和内蒙古自治区研究生科研创新项目 (B20231101Z) 资助.

2024-07-10 收到修改稿, 2024-07-25 网络首发.

** 通讯作者. E-mail: jhguo@imut.edu.cn.

功能梯度材料是一种新型复合材料,其成分和结构呈连续梯度变化^[16].功能梯度材料的最大优点在于其可以根据实际服役条件进行灵活设计,以满足不同部位对材料性能的特定要求^[17].通过调整组成和结构,功能梯度材料能够实现性能的连续梯度变化,从而优化整体性能^[18,19].实际生产生活中对称结构广泛应用各个领域,如机械设备滑轮等、建筑领域梁板结构等,对称结构具有设计简单,高效率易于加工和制造等特点^[20].功能梯度梁板材料中也存在对称结构,在梁板的顶层和底层形成功能梯度过渡层,使材料性能缓慢变化,代替原有的突变界面,从而提高梁板结构的整体力学性能.随着制备技术的不断进步和新型材料的不断开发,功能梯度可以与准晶深度结合,这种功能梯度准晶材料在多个领域都具有巨大的应用潜力,如在航空航天领域用于制造耐高温和压力的结构部件,在能源领域可以用于开发高效稳定的存储材料,在生物医学领域可用于人造假骨材料等.对于功能梯度材料,Li 等^[21]利用传递矩阵法推导出功能梯度二维热弹性多层板的解析解,分析了热弹性、功能梯度因子对准晶板的影响.Pan 等^[22]利用伪 Stroh 型公式对功能梯度各向异性线性磁电弹性多层板进行了研究,并得出其精确解.Guo 等^[23]基于修正偶应力理论对各向异性功能梯度复合材料层合板的尺寸依赖性进行了研究,得到了其弹性场的精确解.Daneshmehr 等^[24]基于非局部弹性理论和高阶板理论,研究了双轴功能梯度纳米板的稳定性问题,分析了功能梯度系数等对屈曲载荷的影响.Jandaghian 等^[25]利用非局部弹性理论对功能梯度压电纳米板的自由振动问题进行

了分析,并得到其解析解.Huang 等^[26]利用状态向量法和传递矩阵法,研究了功能梯度压电准晶层合板的静态响应,分析了功能梯度系数对声子场、相位子场和电场的影响.

迄今为止,关于功能梯度准晶层合梁的相关研究尚未报道,而功能梯度准晶层合梁的研究为材料科学家研究其制造工艺、性能表征等以及工程师对其在实际工程的应用情况提供重要的理论依据,所以有必要开展功能梯度层合准晶梁的力学性能研究.本文通过建立准晶层合简支梁二维模型,研究具有功能梯度一维六方准晶层合梁的自由振动和弯曲问题.利用伪 Stroh 型公式得出单层功能梯度梁的广义位移和广义应力,再通过传递矩阵法,获得三明治型功能梯度准晶梁自由振动和弯曲问题的精确解,最后,通过数值算例分析高跨比、层厚比、叠层顺序和功能梯度系数对固有频率和弯曲变形的影响规律,为功能梯度准晶在作为材料增强相、航空航天结构件的应用提供科学依据,也为研究功能梯度准晶材料的各种数值计算方法和实验结果提供理论参考.

1 问题描述和基本方程

本文研究两边简支的功能梯度一维六方准晶层合梁的振动和弯曲特性,梁模型如图 1 所示,中间为均匀层,上下为功能梯度层,其原子排列在 x_1 方向为周期排列,在 x_3 方向为准周期排列.梁的跨度为 L ,梁的总厚度为 h ,三明治型梁的底部和顶部分别为 $x_3^{(0)}=0$ 和 $x_3^{(3)}=h$,宽度为 b .

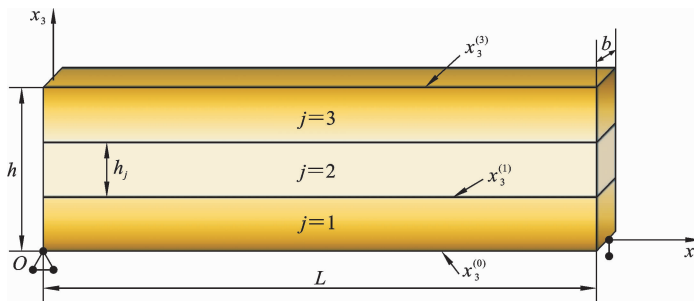


图 1 功能梯度一维六方准晶层合简支梁

Fig. 1 Functional gradient one-dimensional quasicrystal laminated simply supported beam

对于简支的多层准晶梁,其声子场和相位子场的边界条件为

$$u_3 = w_3 = \sigma_{11} = 0, \text{ 在 } x_1 = 0 \text{ 和 } x_1 = L \quad (1)$$

其中 u_3 为声子场位移, w_3 为相位子场位移, σ_{11} 为声子场应力。

假设不同层之间在 x_3 方向上的声子场和相位子场的位移和应力是连续的,满足连续性边界条件

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{(j)} - \mathbf{u}^{(j-1)} = \mathbf{0} \\ \mathbf{t}^{(j)} - \mathbf{t}^{(j-1)} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\mathbf{u}^{(j)} = \{u_1, u_3, w_3\}^T$, $\mathbf{t}^{(j)} = \{\sigma_{13}, \sigma_{33}, H_{33}\}^T$ 分别表示层 j 的广义位移和广义应力,上标 T 表示矩阵或向量的转置。

基于一维六方准晶的线弹性理论,其应变-位移关系为

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \omega_{ij} = w_{i,j} \quad (3)$$

其中 ϵ_{ij} 和 ω_{ij} 为声子场和相位子场的应变张量,下标逗号表示偏微分。

在平面应力假设下,一维六方准晶梁的本构关系式可简化为^[14]

$$\begin{cases} \sigma_{11} = C_{11}\epsilon_{11} + C_{13}\epsilon_{33} + R_1\omega_{33} \\ \sigma_{33} = C_{13}\epsilon_{11} + C_{33}\epsilon_{33} + R_2\omega_{33} \\ \sigma_{13} = \sigma_{31} = 2C_{44}\epsilon_{13} + R_3\omega_{31} \\ H_{31} = 2R_3\epsilon_{13} + K_2\omega_{31} \\ H_{33} = R_1\epsilon_{11} + R_2\epsilon_{33} + K_1\omega_{33} \end{cases} \quad (4)$$

其中 $\sigma_{11}, \sigma_{13}, \sigma_{31}, \sigma_{33}$ 为声子场应力, $C_{11}, C_{13}, C_{33}, C_{44}$ 为声子场弹性常数, H_{31}, H_{33} 为相位子场应力, K_1, K_2 为相位子场弹性常数, R_1, R_2, R_3 为声子场-相位子场耦合弹性常数。

单层功能梯度一维六方准晶常数沿厚度 x_3 方向按指数率变化,则式(4)中材料常数为

$$\begin{cases} C_{ijkl}(x_3) = C_{ijkl}^0 e^{\eta x_3}, & R_{ijkl}(x_3) = R_{ijkl}^0 e^{\eta x_3} \\ K_{ijkl}(x_3) = K_{ijkl}^0 e^{\eta x_3} \end{cases} \quad (5)$$

式中 η 是沿 x_3 方向的功能梯度指数因子,上标 0 表示均匀材料(即 $\eta=0$)时的材料常数。

平衡方程为

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} = f_i \\ H_{ij,j} = g_i \end{cases} \quad (6)$$

对于自由振动问题, $f_i = \rho u_{i,u}$, $g_i = \rho w_{i,u}$; 对于弯曲问题, $f_i = 0, g_i = 0$ 。式中下标 t 表示时间, ρ 表示密

度,沿厚度方向也呈指数率变化,即 $\rho = \rho^0 e^{\eta x_3}$ 。

2 功能梯度准晶层合梁的一般解

为了满足简支梁的边界条件,功能梯度一维准晶层合梁的广义位移通解设为

$$\mathbf{u} \triangleq \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ w_3 \end{Bmatrix} = e^{\phi} \begin{Bmatrix} a_1 \cos px_1 \\ a_2 \sin px_1 \\ a_3 \sin px_1 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

其中 $a_1 \sim a_3$ 是待定常数, $p = n\pi/L$, n 为正整数。对于准晶层合梁的自由振动问题, $\phi = sx_3 + i\omega t$; 对于准晶层合梁的弯曲问题, $\phi = sx_3$, 其中 s 是待确定的特征值, i 代表的是虚数, ω 是角频率。

将式(7)代入式(3)和(4),可得广义应力的一般解为

$$\mathbf{t} \triangleq \begin{Bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{33} \\ H_{33} \end{Bmatrix} = e^{\phi + \eta x_3} \begin{Bmatrix} b_1 \cos px_1 \\ b_2 \sin px_1 \\ b_3 \sin px_1 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

引入两个向量 $\mathbf{a} = \{a_1 \quad a_2 \quad a_3\}^T$ 和 $\mathbf{b} = \{b_1 \quad b_2 \quad b_3\}^T$, 得到 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 的关系为

$$\mathbf{b} = (-\mathbf{R}^T + s\mathbf{T})\mathbf{a} \quad (9)$$

其中

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & C_{13}^0 p & R_1^0 p \\ -C_{44}^0 p & 0 & 0 \\ -R_3^0 p & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} C_{44}^0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{33}^0 & R_2^0 \\ 0 & R_2^0 & K_1^0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

把式(8)代入平衡方程(6),化简得到如下控制方程

$$[\mathbf{Q} + s^2 \mathbf{T} + s(\mathbf{R} - \mathbf{R}^T + \eta \mathbf{T}) - \eta \mathbf{R}^T] \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (11)$$

注意,这里弯曲问题和自由振动问题的控制方程形式虽相同,但是 \mathbf{Q} 的表达式不同,对于自由振动问题

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \rho\omega^2 - C_{11}^0 p^2 & 0 & 0 \\ 0 & \rho\omega^2 - C_{44}^0 p^2 & -R_3^0 p^2 \\ 0 & -R_3^0 p^2 & \rho\omega^2 - K_2^0 p^2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

对于弯曲问题

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -C_{11}^0 p^2 & 0 & 0 \\ 0 & -C_{44}^0 p^2 & -R_3^0 p^2 \\ 0 & -R_3^0 p^2 & -K_2^0 p^2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

根据式(9)和(11),得到线性特征系统为

$$N \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = s \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

其中矩阵 N 为

$$N = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{R}^T & \mathbf{T}^{-1} \\ -\mathbf{Q} - \mathbf{R} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R} \mathbf{T}^{-1} - \eta \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (15)$$

其中 \mathbf{I} 为 3×3 的单位矩阵.

通过求解式(14),可得到特征值 s 和特征向量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} ,从而获得广义位移和广义应力的通解表达式为

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{t} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \langle e^{s_1^* x_3} \rangle & \mathbf{A}_2 \langle e^{s_2^* x_3} \rangle \\ \mathbf{B}_1 \langle e^{(s_1^* + \eta)x_3} \rangle & \mathbf{B}_2 \langle e^{(s_2^* + \eta)x_3} \rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{K}_1 \\ \mathbf{K}_2 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1 = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] & \mathbf{A}_2 = [\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6] \\ \mathbf{B}_1 = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3] & \mathbf{B}_2 = [\mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6] \\ \langle e^{s_1^* x_3} \rangle = \text{diag}[e^{s_1^* x_3}, e^{s_2^* x_3}, e^{s_3^* x_3}] \\ \langle e^{s_2^* x_3} \rangle = \text{diag}[e^{s_4^* x_3}, e^{s_5^* x_3}, e^{s_6^* x_3}] \\ \langle e^{(s_1^* + \eta)x_3} \rangle = \text{diag}[e^{(s_1^* + \eta)x_3}, e^{(s_2^* + \eta)x_3}, e^{(s_3^* + \eta)x_3}] \\ \langle e^{(s_2^* + \eta)x_3} \rangle = \text{diag}[e^{(s_4^* + \eta)x_3}, e^{(s_5^* + \eta)x_3}, e^{(s_6^* + \eta)x_3}] \end{cases} \quad (17)$$

在方程(16), \mathbf{K}_1 和 \mathbf{K}_2 是两个待确定的 3×1 常数列向量,可由边界条件确定.功能梯度准晶梁任意 j 层上表面的广义应力和广义位移可由 j 层下表面所表示,即

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{t} \end{Bmatrix}_{x_3^j} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \langle e^{s_1^* h_j} \rangle & \mathbf{A}_2 \langle e^{s_2^* h_j} \rangle \\ \mathbf{B}_1 \langle e^{(s_1^* + \eta)h_j} \rangle & \mathbf{B}_2 \langle e^{(s_2^* + \eta)h_j} \rangle \end{bmatrix}_j \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}_j^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{t} \end{Bmatrix}_{x_3^{j-1}} \quad (18)$$

其中 $h_j = x_3^j - x_3^{j-1}$.

由于假设广义位移和广义应力在层与层之间是连续的,所以通过重复使用传递关系式(18)使物理量从功能梯度准晶层合梁的底层 $x_3 = 0$ 传递到顶层 $x_3 = h$,得到如下的传递关系式为

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{t} \end{Bmatrix}_h = [\mathbf{P}_j(h_j)] [\mathbf{P}_{j-1}(h_{j-1})] \cdots [\mathbf{P}_2(h_2)] \cdot [\mathbf{P}_1(h_1)] \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{t} \end{Bmatrix}_0 \quad (19)$$

其中 $\mathbf{P}_j(h_j)$ 为传递矩阵,即

$$[\mathbf{P}_j(h_j)] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \langle e^{s_1^* h_j} \rangle & \mathbf{A}_2 \langle e^{s_2^* h_j} \rangle \\ \mathbf{B}_1 \langle e^{(s_1^* + \eta)h_j} \rangle & \mathbf{B}_2 \langle e^{(s_2^* + \eta)h_j} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}^{-1} \quad (20)$$

2.1 自由振动

对于梁的自由振动问题,梁的上下表面自由,从而有

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}_h = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}_0 \quad (21)$$

其中 $\mathbf{C}_1 \sim \mathbf{C}_4$ 是梁从底层到顶层的传递矩阵的子矩阵.当 \mathbf{C}_3 的行列式等于零时,可求出自由振动的固有频率.

2.2 静态弯曲

对于梁的静态弯曲问题,考虑上表面仅受到声子场机械载荷 σ_{33} ,下表面应力自由,其边界条件为

$$\mathbf{t}(h) = \{0, \sigma_0 \sin p x_1, 0\}^T \quad \mathbf{t}(0) = \{0, 0, 0\}^T \quad (22)$$

从而式(19)变为

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{t} \end{Bmatrix}_h = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}_0 \quad (23)$$

将式(22)代入式(23)中,得到上下表层的位移为

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{C}_3^{-1} \mathbf{t}(h), \quad \mathbf{u}(h) = \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_3^{-1} \mathbf{t}(h) \quad (24)$$

最终可得功能梯度准晶层合梁任意位置的广义应力和广义位移为

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{t} \end{Bmatrix}_{x_3} = [\mathbf{P}_j(x_3 - x_3^{j-1})] [\mathbf{P}_{j-1}(h_{j-1})] \cdots [\mathbf{P}_2(h_2)] \cdot [\mathbf{P}_1(h_1)] \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{t} \end{Bmatrix}_0 \quad (25)$$

3 数值算例

本节考虑两种叠层顺序 QC1/QC2/QC1 和 QC2/QC1/QC2 下高跨比、层厚比、功能梯度系数和叠层顺序对自由振动固有频率和对弯曲位移和应力的影响. QC1 和 QC2 的材料属性如表 1 所示. 设三明治梁的顶层和底层为功能梯度材料,中间层为均匀材料,为了符合实际且计算相对简单,令顶层和底层的材料系数关于中间层对称变化. 图 2 为材料功能梯度系数变化图,以下算例中选取 $\eta = 10, 0, -10$ 三种功能梯度系数.

表 1 Al-Ni-Co 准晶(QC1)和 QC2 的材料系数(C_{ij} , K_i 和 R_i ; 10^9 N/m² 以及 ρ ; 10^3 kg/m³)^[13]

Table 1 Material properties of Al-Ni-Co quasicrystal (QC1) and QC2 (C_{ij} , K_i and R_i in 10^9 N/m² and ρ in 10^3 kg/m³)

	C_{11}	C_{13}	C_{33}	C_{44}	R_1	$R_2=R_3$	K_1	K_2	ρ
QC1	234.33	66.63	232.22	70.19	8.846	8.846	122	24	4.186
QC2	150	90	130	50	1.5	1.2	0.3	0.18	4.186

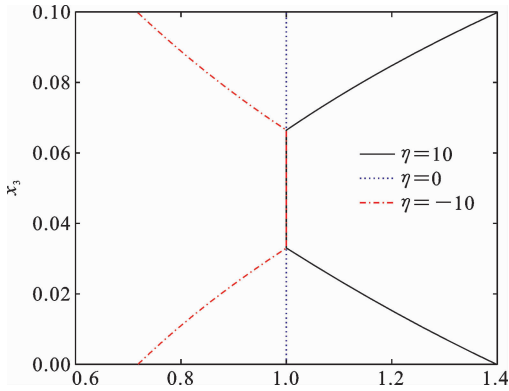


图 2 沿梁厚方向材料比例系数图

Fig. 2 Plot of material proportionality factor along beam thickness

3.1 自由振动

为了验证本文功能梯度准晶梁模型的准确性, 首先将本文所得结果与已有三明治准晶层合梁的精确解^[14]和应用状态空间-微分求积法(SSDQM)^[13]的三明治准晶层合梁进行对比, 见表 2, 其中材料为 QC1 准晶, 高跨比为 $h/L=0.1$. 从表中发现, 本文所得结果与已有精确解和数值结果吻合很好, 从而验证本文模型的正确性和有效性.

表 3 给出两种叠层顺序下功能梯度一维六方准

表 2 准晶均匀简支梁的前四阶固有频率

Table 2 The first four natural frequencies of the quasicrystal uniform simple support beam

阶数	本文解	精确解 ^[14]	SSDQM ^[13]
1	0.2678	0.2672	0.2676
2	0.9823	0.9823	0.9823
3	1.0164	1.0147	1.0147
4	1.9687	1.9687	1.9687

晶层合梁的前四阶固有频率, 从表中随着功能梯度系数的增大, QC1/QC2/QC1 层合梁的前四阶固有频率呈增大趋势; QC2/QC1/QC2 层合梁的第一阶和第三阶固有频率呈增大趋势, 第二阶和第四阶固有频率呈递减趋势. 当功能梯度系数增大时, 材料的属性分布会发生变化, 这些变化会直接影响结构的自由振动特性. 功能梯度系数增大导致第二种叠层梁的某区域的刚度和强度发生变化进而导致其不同阶的固有频率发生不同的变化. 对比两种叠层顺序的层合梁固有频率, 发现 QC1/QC2/QC1 层合梁的固有频率比 QC2/QC1/QC2 层合梁高, 所以高弹性模量的 QC1 准晶适用于涂层材料.

表 3 两种叠层顺序下准晶简支梁的前四阶固有频率($h/L=0.1$)

Table 3 The first four natural frequencies of the quasicrystal simple supported beam under two stacking sequences ($h/L=0.1$)

η	QC1/QC2/QC1				QC2/QC1/QC2			
	1	2	3	4	1	2	3	4
10	0.2704	0.8186	1.0152	1.5956	0.1789	0.5232	0.6901	0.9603
0	0.2641	0.7966	0.9968	1.5513	0.1755	0.5532	0.6791	1.0082
-10	0.2574	0.7742	0.9754	1.5065	0.1720	0.5810	0.6669	1.0464

图 3 显示两种叠层顺序功能梯度准晶层合梁的第一阶固有频率随高跨比 h/L 的变化. 由图发现, 两种叠层顺序的准晶梁的第一阶固有频率随着高跨

比的增加而增大, 随着功能梯度系数的增加而增大, 表明可以通过增加准晶层合梁厚度或功能梯度因子来提高其固有频率.

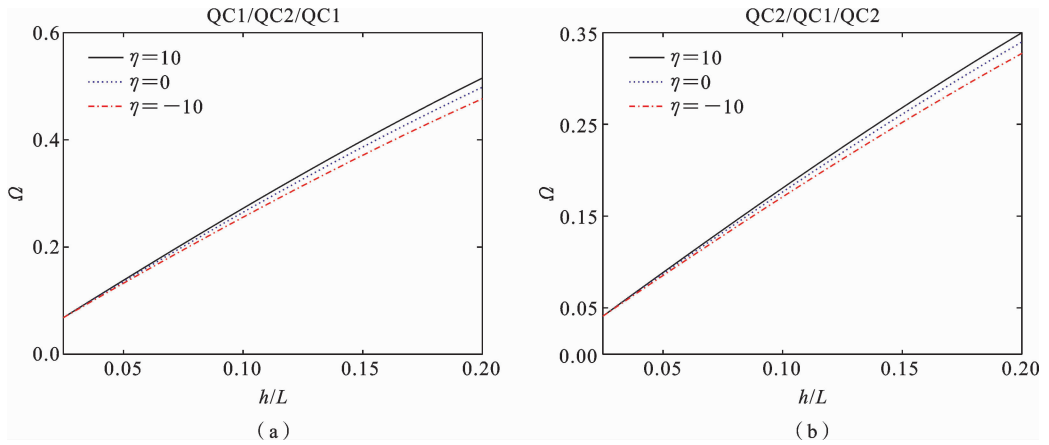


图 3 两种叠层顺序下功能梯度准晶层合简支梁的第一阶固有频率随 h/L 的变化

Fig. 3 Variation of the first-order natural frequency of functional gradient quasicrystal layered simply supported beams with h/L under two different stacking sequences

图 4 显示两种叠层顺序功能梯度准晶层合梁的第一阶固有频率随层厚比 h_1/h_2 的变化. 由图发现, 随着 h_1/h_2 的增加, QC1/QC2/QC1 层合梁的固有

频率逐渐增大, QC2/QC1/QC2 层合梁逐渐减小, 最后均趋于稳定. 随着 h_1/h_2 的增加, 功能梯度对固有频率的影响更加明显.

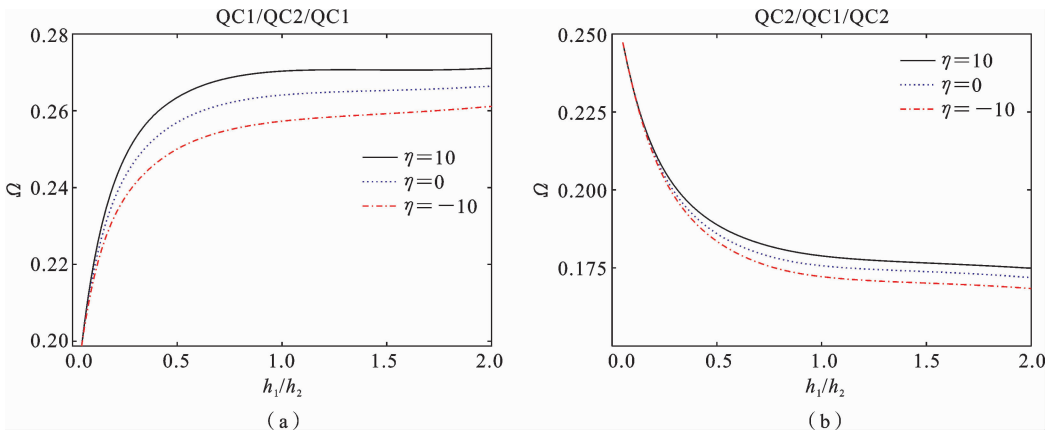


图 4 两种叠层顺序下功能梯度准晶层合简支梁的第一阶固有频率随 h_1/h_2 的变化

Fig. 4 Variation of the first-order natural frequency of functional gradient quasicrystal layered simply supported beams with h_1/h_2 under two different stacking sequences

图 5 为不同功能梯度系数下两种叠层顺序准晶层合梁沿厚度方向变化的振型图, 其中 u_{max} 为 u_1, u_3, ω_3 中的最大值. 由图可知, 随着功能梯度系数的增加, 两种叠层顺序下的声子场位移 u_1 振型在增大. QC1/QC2/QC1 层合梁的相位子场位移 ω_3 振型在顶层随功能梯度系数增加而减小, 在底层则相反; 而对于 QC2/QC1/QC2 层合梁的相位子场位移 ω_3 振型则随功能梯度系数增加而增大. 可见, 功能

梯度因子对准晶的相位子场的振型影响更为明显.

3.2 弯曲

假设在简支层合梁的上表面 ($x_3 = h$) 仅作用声子场应力 $\sigma_{33} = \sigma_0 \sin p x_1$, 在本模型中, 应力载荷幅值可以设置为任意值以满足实际要求, 为了与已有文献结果进行对比, 本文应力载荷幅值取为 $\sigma_0 = 1 \text{ N/m}^2$ ^[23], 其他方向上的应力分量为零. 梁的尺寸高跨比为 $h/L = 0.1$, 考虑两种叠层顺序 QC1/QC2/

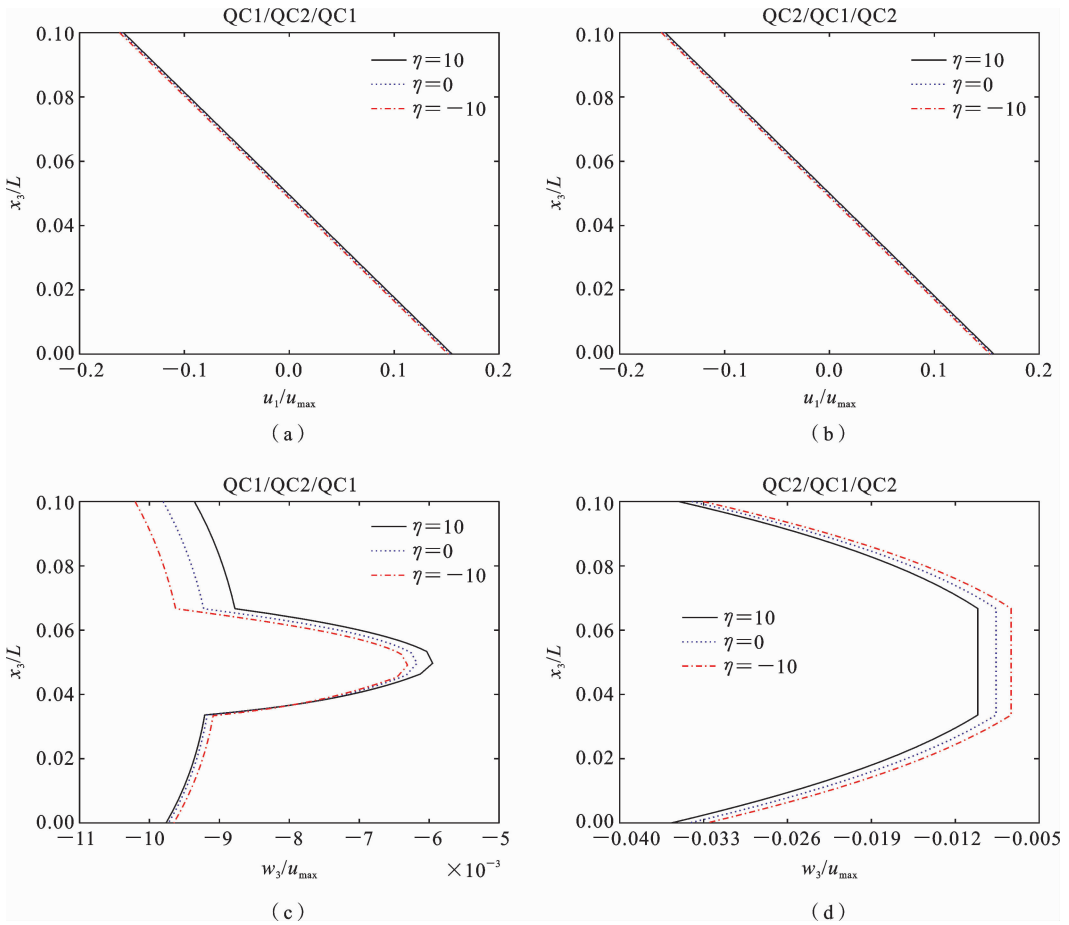


图 5 两种叠层顺序下功能梯度准晶层合简支梁一阶振型随厚度 h 的变化

Fig. 5 Variation of the first mode of functional gradient quasicrystal layered simply supported beams with thickness h under two different stacking sequences

QC1 和 QC2/QC1/QC2, 梁的每层厚度相同. 图 6 显示两种叠层顺序下声子场和相位子场位移沿厚度方向的变化. 由图可知, 声子场位移 u_1 在两种叠层顺序下具有相同的变化趋势, 在整个板厚方向声子场位移 u_1 的绝对值随功能梯度系数的增大而减小. 在两种叠层顺序下随功能梯度系数的增大, 声子场位移 u_3 逐渐减小, 而相位子场位移 w_3 逐渐增大, 表明功能梯度对准晶材料的普通弹性场(声子场)和特有的相位子场会产生不同的影响.

图 7 给出两种叠层顺序下声子场和相位子场应力沿厚度方向的变化图, 其中 C_{max} 为表 1 最大值. 由图可知, 在两种叠层顺序下声子场应力 σ_{13} 的最大值均在梁中部位, 且 QC2/QC1/QC2 的声子场应力 σ_{13} 的最大值大于 QC1/QC2/QC1 的声子场应力 σ_{13} ; 声子场应力 σ_{33} 随着功能梯度系数的增大而减

小; 此外, 相比于声子场应力, 相位子场应力 H_{33} 对功能梯度系数的改变较为敏感, 尤其对于高弹性常数准晶作外层的功能梯度层合梁.

4 结论

利用伪 Stroh 型公式与传递矩阵法, 研究功能梯度一维六方准晶层合梁的自由振动和弯曲问题, 获得简支边界条件的功能梯度准晶层合梁自由振动和弯曲问题的精确解. 通过数值算例, 分析两种叠层顺序下高跨比、层厚比以及非局部参数对准晶层合简支梁固有频率、一阶模态以及弯曲变形的广义应力和广义位移的影响规律, 得到如下结论:

(1) 随着功能梯度系数的增大, QC1/QC2/QC1 层合梁的前四阶固有频率始终增大, 而 QC2/

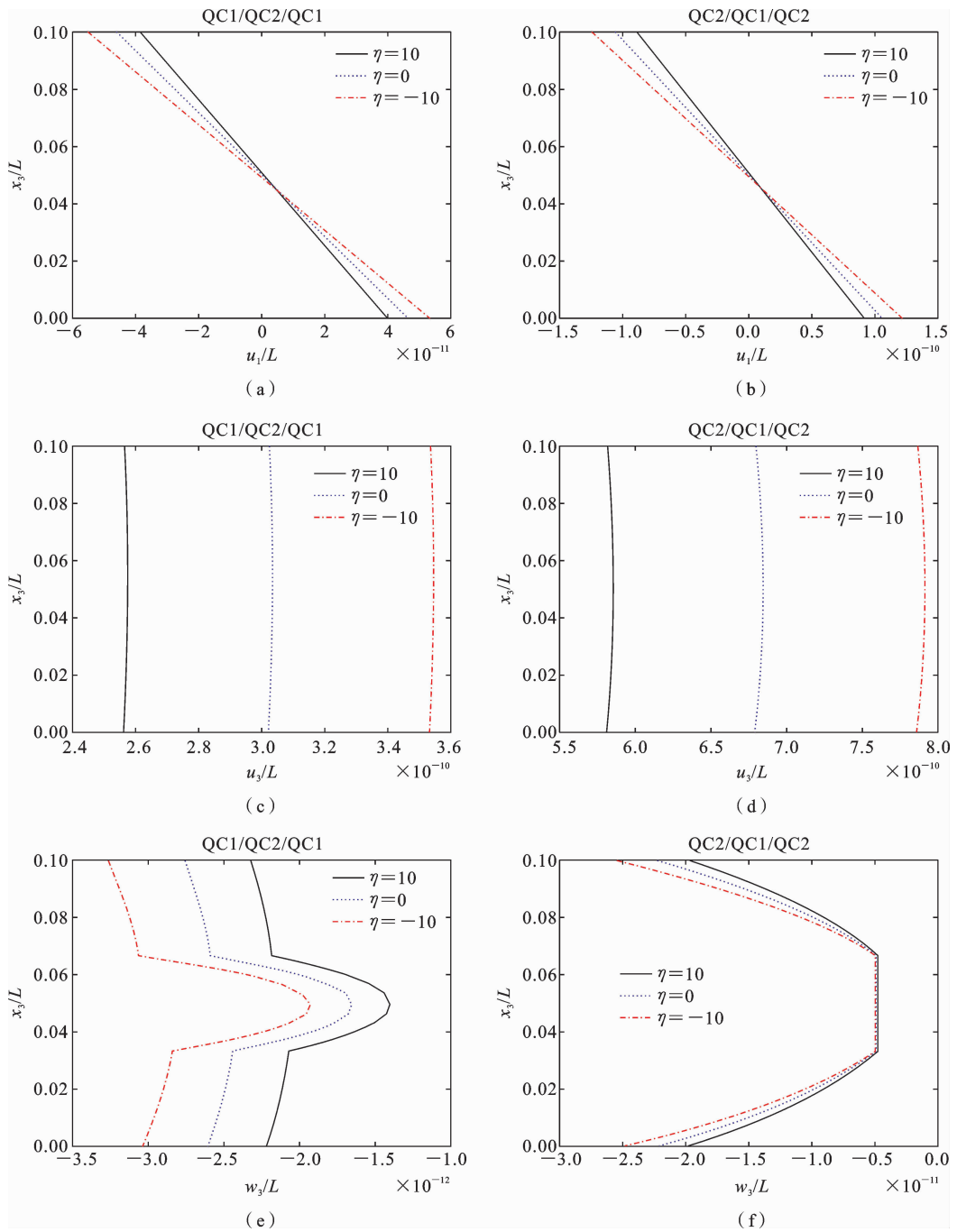


图 6 位移分量沿层合梁厚度方向的变化

Fig. 6 Variation of displacement components along the thickness direction of layered beams

QC1/QC2 层合梁的第一阶和第三阶固有频率呈增大趋势,但第二阶和第四阶固有频率呈递减趋势.

(2) 准晶层合简支梁的自由振动固有频率随着高跨比的增加而增大. 随着层厚比的增大, QC1/QC2/QC1 层合梁的固有频率逐渐增大,而 QC2/QC1/QC2 层合梁逐渐减小,最后均趋于稳定,并且两种准晶层合梁的固有频率随着功能梯度系数的增

加而增大.

(3) 随功能梯度系数增加,两种叠层顺序下的声子场位移 u_1 振型在增大,而相位子场位移 w_3 振型变化不同.

(4) 在两种叠层顺序下随功能梯度系数的增大,声子场位移 u_1 具有相同的变化趋势,声子场位移 u_3 逐渐减小,而相位子场位移 w_3 逐渐增大. 功能

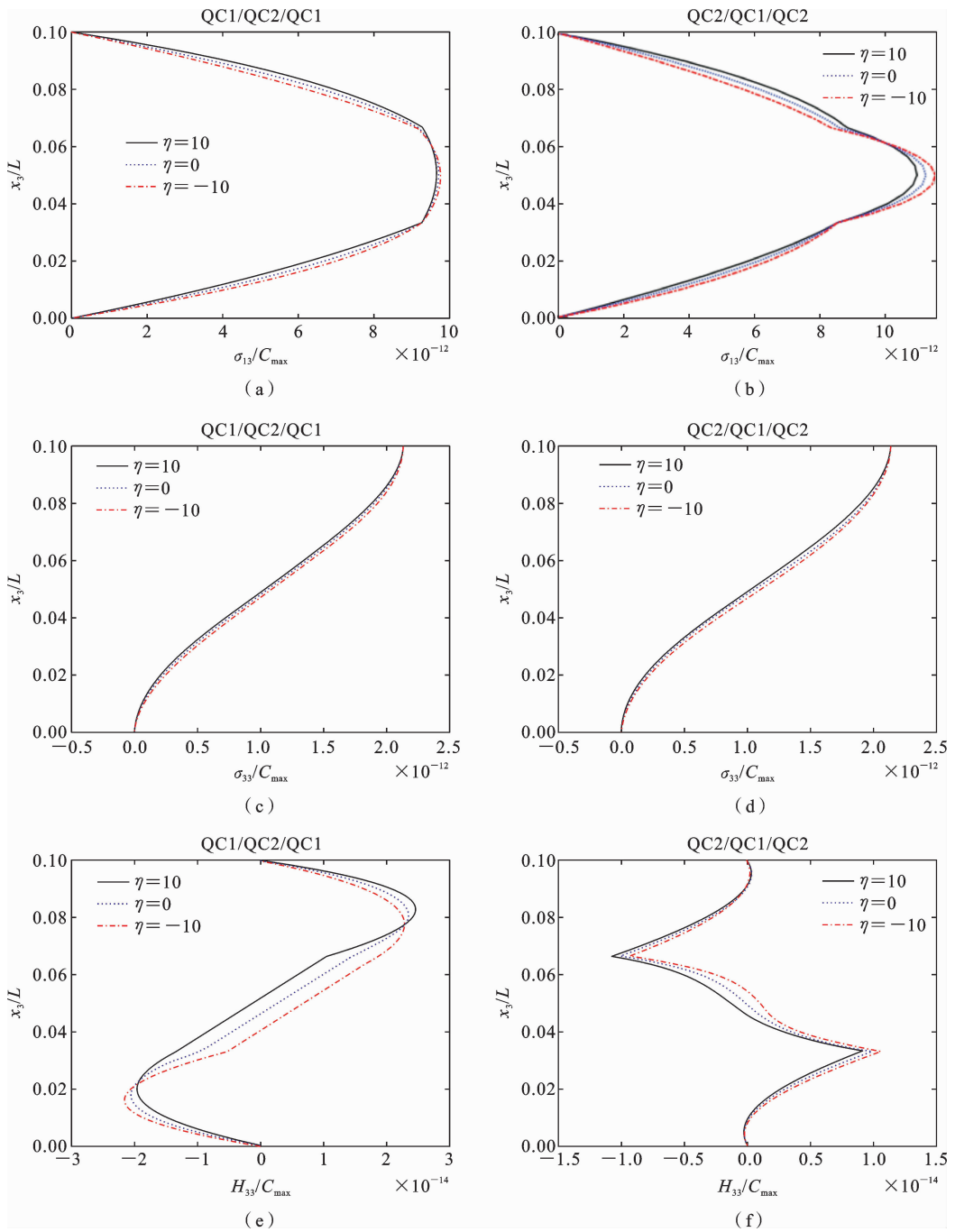


图 7 应力分量沿层合梁厚度方向的变化

Fig. 7 Variation of stress components along the thickness direction of layered beams

梯度系数和叠层顺序对层合梁的应力有很大影响，其中对准晶特有的相位子场应力影响更大。

本文所研究的功能梯度准晶梁二维模型不仅适用于三明治梁，还可以解决多层梁的相关问题。利用 COMSOL 和有限元等计算平台研究功能梯度准晶梁将是今后工作的重点方向之一，可进一步验证本文理论计算的正确性和有效性。

参考文献

[1] Shechtman D, Blech I, Gratias D. Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry[J]. Physical Review Letters, 1984, 53 (20): 1951-1953.

- [2] 陈敬中. 准晶对称与准晶结构[M]. 科学出版社, 2013: 172. (Chen J Z. Quasicrystal Symmetry and Quasicrystal Structure [M]. Science Press, 2013: 172. (in Chinese))
- [3] 张利明, 董闯. 准晶材料性能及应用研究现状[J]. 材料导报, 2000, 14(1): 22-24. (Zhang L M, Dong C. Current status of research on properties and applications of quasicrystal materials[J]. Materials Review, 2000, 14(1): 22-24. (in Chinese))
- [4] 李志强, 徐洲, 李小平. 准晶材料的应用研究进展[J]. 材料导报, 2002, 16(2): 9-11. (Li Z Q, Xu Z, Li X P. Research progress in the application of quasicrystal materials[J]. Materials Review, 2002, 16(2): 9-11. (in Chinese))
- [5] 马文赛, 刘方浩, 李东霄. 特殊对称铺设复合材料层合矩形板的全局动力学研究[J]. 内蒙古工业大学学报(自然科学版), 2023, 42(2): 109-115. (Ma W S, Liu F H, Li D X. Global dynamics of composite laminated rectangular plates with special symmetric layout [J]. Journal of Inner Mongolia University of Technology (Natural Science Edition), 2023, 42(2): 109-115. (in Chinese))
- [6] Gao Y. Boundary Conditions for Beam Bending in Two-dimensional Quasicrystals[M]. Nova Science Publishers, 2011.
- [7] Gao Y, Xu S. P. Stress and mixed boundary conditions for two dimensional dodecagonal quasi-crystal plates[J]. Pramana-Journal of Physics, 2007, 68(5): 803-817.
- [8] Pan E. Exact solution for simply supported and multilayered magneto-electro-elastic plates[J]. Journal of Applied Mechanics, 2001, 68(4): 608-618.
- [9] Sun T Y, Guo J H, Pan E. Nonlocal vibration and buckling of two-dimensional layered quasicrystal nanoplates embedded in an elastic medium[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2021, 42(8): 1077-1094.
- [10] Wang H T, Guo J H, Jiang X. Bending and vibration of one-dimensional hexagonal quasicrystal layered plates with imperfect interface[J]. Acta Mechanica, 2022, 233(10): 4029-4046.
- [11] Zhang L, Guo J H, Xing Y M. Bending deformation of multilayered one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystal nanoplates with nonlocal effect[J]. International Journal of Solids and Structures, 2018 (132-133): 278-302.
- [12] 黄孚, 张一鸣, 高阳. 一维六方准晶弹性层合悬臂梁的解析解[J]. 固体力学学报, 2015, 36(02): 123-128. (Huang F, Zhang Y M, Gao Y. Analytical solution of one-dimensional hexagonal quasicrystal elastic laminated cantilever beam[J]. Journal of Solid Mechanics, 2015, 36(02): 123-128. (in Chinese))
- [13] Sun T Y, Guo J H. Free vibration and bending of one-dimensional quasicrystal layered composite beams by using the state space and differential quadrature approach [J]. Acta Mechanica, 2022, 233(8): 3035-3057.
- [14] 陈韬, 郭俊宏, 田园. 一维六方准晶层合简支梁自由振动与屈曲的精确解[J]. 固体力学学报, 2023, 44(01): 109-119. (Chen T, Guo J H, Tian Y. Accurate solution for free vibration and buckling of one-dimensional hexagonal quasicrystal laminated simply supported beams [J]. Journal of Solid Mechanics, 2023, 44(01): 109-119. (in Chinese))
- [15] Li Y S, Xiao T. Free vibration of the one-dimensional piezoelectric quasicrystal microbeams based on modified couple stress theory[J]. Applied Mathematical Modelling, 2021, 96: 733-750.
- [16] Suresh S, Mortensen A. Fundamentals of Functionally Graded Materials[M]. London: IOM Communications, 1998: 26-35.
- [17] 余慧芳, 刘铁军. 基于层合板模型求解功能梯度压电材料涂层的二维接触问题[J]. 内蒙古工业大学学报, 2021(04): 247-255. (Yu H F, Liu T J. Solving the 2-D contact problem of functionally graded piezoelectric material coating based on laminated plate model[J]. Journal of Inner Mongolia University of Technology, 2021(04): 247-255. (in Chinese))
- [18] 张雷, 周科朝, 李志友. 功能梯度材料的制备技术[J]. 粉末冶金材料科学与工程, 2003(01): 48-56. (Zhang L, Zhou K C, Li Z Y. Preparation technology of functional gradient materials[J]. Powder Metallurgical Materials Science and Engineering, 2003(01): 48-56. (in Chinese))
- [19] 马涛, 赵忠民, 刘良祥. 功能梯度材料的研究进展及应用前景[J]. 化工科技, 2012, 20(01): 71-75. (Ma T, Zhao Z M, Liu L X. Research progress and application prospects of functional gradient materials[J]. Chemical Technology, 2012, 20(01): 71-75. (in Chinese))

- nese))
- [20] 宋慧, 刘铁军, 韩楠楠. 刚性圆柱形平压头作用下的梯度夹层界面应力场[J]. 内蒙古工业大学学报, 2013(03): 173-178. (Song H, Liu T J, Han N N. Interfacial stress field of gradient sandwich under the action of rigid cylindrical flat indenter[J]. Journal of Inner Mongolia University of Technology, 2013(03): 173-178. (in Chinese))
- [21] Li Y, Yang L, Gao Y. Thermo-elastic analysis of functionally graded multilayered two-dimensional decagonal quasicrystal plates[J]. ZAMM-Journal of Applied Mathematics & Mechanics, 2018, 98(9): 1585-1602.
- [22] Pan E, Han F. Exact solution for functionally graded and layered magneto-electro-elastic plates[J]. International Journal of Engineering Science, 2005, 43(3-4): 321-339.
- [23] Guo J H, Chen J Y, Pan E. Size-dependent behavior of functionally graded anisotropic composite plates [J]. International Journal of Engineering Science, 2016, 106: 110-124.
- [24] Daneshmehr A, Rajabpoor A, Pourdavood M. Stability of size dependent functionally graded nanoplate based on nonlocal elasticity and higher order plate theories and different boundary conditions[J]. International Journal of Engineering Science, 2014, 82(3): 84-100.
- [25] Jandaghian A, Rahmani O. Vibration analysis of functionally graded piezoelectric nanoscale plates by nonlocal elasticity theory: An analytical solution[J]. Superlattices and Microstructures, 2016, 100: 57-75.
- [26] Huang Y Z, Li Y, Gao Y. Static response of functionally graded multilayered one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystal plates using the state vector approach[J]. Journal of Zhejiang University-Science A (Applied Physics & Engineering), 2019, 20(02): 133-147.

Study on Free Vibration and Bending Deformation of Functionally Graded One-Dimensional Hexagonal Quasicrystal Laminated Beams

Dewang Gao¹ Junhong Guo^{1,2} Haotian Wang¹ Tuoya Sun²

(¹Department of Mechanics, College of Science, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot, 010051)

(²School of Aeronautics, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot, 010051)

Abstract The pseudo-Stroh formulism can transform the governing equations of multi-field coupling materials such as quasicrystals into a linear eigensystem, enabling the exact solution of multilayered structures with simply-supported boundary conditions. This provides an important reference for various numerical and experimental methods of quasicrystal beams in engineering practice. In this paper, the free vibration and bending problems of one-dimensional (1D) hexagonal quasicrystal (QC) laminated beams with functional gradients are investigated using the pseudo-Stroh formula. A simply-supported QC laminated beam is modeled, and the transfer matrix method is used to derive the exact solutions for natural frequency of free vibration and bending deformation displacements of the beam under simply-supported boundary conditions. The obtained results are compared with the existing ones to verify the accuracy and precision of the presented model. Numerical examples are provided to show the effects of high span ratio, layer thickness ratio, and functional gradient coefficient on the natural frequency, bending deformation, and mode shape of simply-supported 1D QC laminated beams under two different stacking sequences. The results show that natural frequency increases with the increase of functional gradient coefficient. Phonon displacement decreases while phason displacement increases with the increase of functional gradient coefficient under the two stacking sequences. Functional gradient coefficient and stacking sequence minimally affect phonon displacement modes but significantly impact phason displacement modes. Moreover, they notably affect phason stresses compared to phonon stresses in QC laminated beams. Thus, the optimal natural frequency and deformation displacement of a QC beam can be achieved by adjusting geometric size, stacking sequence, and functional gradient coefficient of the layered beam. These findings can provide theoretical references for various numerical methods and experimental studies on QC beams.

Key words quasicrystal, functional gradient, simply-supported beam, free vibration, bending deformation