

一维六方准晶纳米尺度孔边周期Ⅲ型 裂纹断裂力学分析*

童鸣^{1,2} 肖俊华^{1,2**}

(¹燕山大学工程力学系, 秦皇岛, 066004)(²燕山大学河北省重型装备与大型结构力学可靠性重点实验室, 秦皇岛, 066004)

摘要 本文理论研究了一维六方准晶弹性体中孔边Ⅲ型周期多裂纹的断裂力学问题. 基于表面弹性理论考虑纳米缺陷(孔洞和周期裂纹)的表面效应, 利用解析函数边值问题理论并结合保角变换技术得到了问题的应力场, 推导了裂纹尖端的声子场和相位子场应力强度因子和能量释放率的解析表达式. 讨论了孔径尺寸、裂纹数量、裂纹长/孔径比、声子场-相位子场耦合系数和施加载荷对无量纲场强因子和无量纲能量释放率的影响. 研究表明: 不考虑表面效应时耦合系数、施加载荷和孔径尺寸对无量纲场强因子无影响; 考虑表面效应时无量纲场强因子和无量纲能量释放率都存在着显著的尺寸依赖效应; 声子场和相位子场之间有明显的耦合效应; 裂纹数量对无量纲场强因子和能量释放率的影响受到缺陷尺寸的制约; 施加的声子场和相位子场载荷对无量纲场强因子和能量释放率的影响不同.

关键词 表面效应, 表面弹性理论, 一维六方准晶, 纳米孔边周期裂纹, 应力强度因子, 能量释放率

DOI: 10.19636/j.cnki.cjasm42-1250/o3.2024.030

0 引言

准晶材料的发现更正了人们关于固体的分类方法^[1]. 相较于传统材料, 准晶材料因其原子呈准周期排列而具有不同的物理性能, 这些特殊性能使得准晶材料广泛应用于能源、汽车、航空等工程领域^[2,3]. 准晶材料在常温下呈脆性^[4], 在生产和服役过程中不可避免会产生孔洞和裂纹等缺陷, 严重影响其使用寿命, 成为限制准晶材料应用与发展的重要原因之一^[5].

对准晶材料含各类缺陷进行强度分析尤其是断裂力学性能研究显得尤为重要, 许多国内外学者也都在该领域进行了深入的探讨. 诸多准晶材料中, 一维六方准晶是指在具有六重旋转对称轴的方向上原子准周期排列, 而在垂直于该方向的平面内原子周期排列^[6]. 由于一维六方准晶相较于高维准晶更为简单的晶体结构, 使得它成为研究准晶领域的首选

对象. 近年来关于含缺陷一维六方准晶的代表性研究有: Liu 和 Yang^[7] 研究了一维六方准晶体中无限多个平行位错与半无限裂纹之间的相互作用问题. 常莉红等^[8] 利用椭圆函数理论对一维六方准晶材料中裂纹中心位于等腰三角形顶点上的双周期排列反平面问题进行了讨论, 并获得了该问题下声子场和相位子场的闭合解. 马小丹等^[9] 研究了一维六方准晶带裂纹的弹性半平面无摩擦接触问题, 给出了裂纹尖端场的应力强度因子和压头下方接触应力的分布. 崔江彦和李星^[10] 分析了一维六方准晶非周期平面内的裂纹问题并给出了周期法向荷载下的应力函数. 吕鑫和刘官厅^[11] 给出了一维六方准晶中多条平行螺型位错和有限长直裂纹之间的弹性场相互作用问题的解析解. Dang^[12] 和 Zhao^[13] 团队先后研究了一维六方准晶涂层在反平面载荷和平面载荷作用下界面裂纹的断裂问题. Fan 等^[14] 分析了一维六方准晶双材料界面裂纹尖端的奇异性并提出了一种去除

* 河北省自然科学基金项目(A2022203025)资助.

2024-06-20 收到修改稿, 2024-06-25 网络首发.

** 通讯作者. E-mail: xiaojunhua@ysu.edu.cn.

振荡奇点的新方法. 张炳彩等^[15]研究了一维六方准晶双材料界面上圆孔边两条不对称裂纹的反平面剪切问题. 赵雪芬和马园园^[16]对一维六方准晶双材料界面共线裂纹的反平面问题进行了研究. Yu 和 Guo^[17]利用傅里叶级数方法给出了一维六方准晶带含两条等长共线裂纹受反平面剪切时周期阵列问题的解析解. Ma 等^[18]利用叠加原理和积分变换技术研究了一维六方准晶涂层与半空间弹性基本界面裂纹对 Love 波的散射问题. 杨娟等^[19]利用傅里叶余弦变换处理复杂边值问题, 求解了 SH 波对功能梯度一维六方准晶裂纹作用的动态断裂问题. 赵雪芬等^[20]利用傅里叶积分变换和叠加原理, 研究了非周期平面内含有中心开口裂纹的一维六方准晶平面热弹性问题.

上述研究中的缺陷都在宏观尺度, 当缺陷(裂纹或孔洞)尺寸降低到纳米时, 准晶材料中纳米缺陷的表面效应对其强度性能的影响及其重要. 近年来, Gurtin-Murdoch 表面弹性理论^[21-23]在对一维六方准晶裂纹的纳米尺度断裂力学行为分析中得到了广泛应用. 魏刚等^[24]提出了解决一维六方准晶中螺型位错极子与直线纳米裂纹干涉效应问题的新方法并获得了问题的封闭解. Yang 和 Liu^[25]研究了一维六方准晶中一个正六边形孔边有六条纳米裂纹的反平面问题. 武志林等^[26]对考虑表面效应时一维六方准晶中带两条共线裂纹的圆形纳米孔的反平面问题进行了研究. Zhao 和 Guo^[27]研究了一维六方压电准晶复合材料中具有表面效应的增强纳米椭圆孔或纳米裂纹的反平面剪切问题. Wu 等^[28]研究了纳米尺度下一维六方压电准晶中正 2n 多边形孔边缘有两个共线裂纹的 III 型断裂问题. Su 等^[29,30]先后研究了考虑表面效应下的一维六方压电准晶椭圆孔边发出两条和四条裂纹时的反平面问题. 卢绍楠等^[31]对在半渗透率条件下一维六方压电准晶纳米弯折裂纹反平面问题进行了研究并得到了该问题的解析解. Ma 等^[32]分析了一维六方压电准晶中电半磁导纳米尖锐裂纹问题. Lu 等^[33]给出了一维六方准晶非周期面包含纳米开放裂纹的平面热弹性问题的闭合形式解. Xin 和 Xiao^[34,35]研究了一维六方压电准晶纳米孔任意位置裂纹的反平面问题. 赵雪芬等^[36]研究了一维六方准晶考虑表面效应时的正三角形顶点处

发出三条等长裂纹的反平面剪切问题.

实际工程中, 脆性准晶材料产生缺陷(如孔洞)后, 在复杂载荷环境下孔边应力集中非常明显, 从而进一步诱发孔边微裂纹, 孔和裂纹相互作用又会显著影响结构的强度性能. 在研究孔洞和多裂纹相互作用时, 将孔边裂纹建模为径向周期分布模型实用且有效^[37]. 本文利用 Gurtin-Murdoch 表面弹性理论^[21-23]引入纳米缺陷的表面应力, 研究了一维六方准晶弹性体中纳米尺度圆孔均布周期径向裂纹的反平面问题, 获得了一维六方准晶孔边周期纳米 III 型裂纹的裂纹尖端广义应力场强因子和能量释放率的解析表达式, 讨论了纳米缺陷几何参数、材料性能与施加载荷对于广义应力场强因子和能量释放率的影响.

1 一维六方准晶纳米孔边周期裂纹与基本方程

图 1 为考虑缺陷表面效应时一维六方准晶中孔边均布周期裂纹示意图, Ω_c , Ω_m 和 Ω_s 表示孔、准晶基体和纳米缺陷(孔和裂纹). 孔半径为 R , 裂纹长均为 L , l_n 表示第 n 条裂纹. z 轴垂直于平面 Oxy , 设 z 方向为一维六方准晶的准周期方向. 远场作用声子场载荷 σ_{yz}^∞ 和相位子场载荷 H_{yz}^∞ .

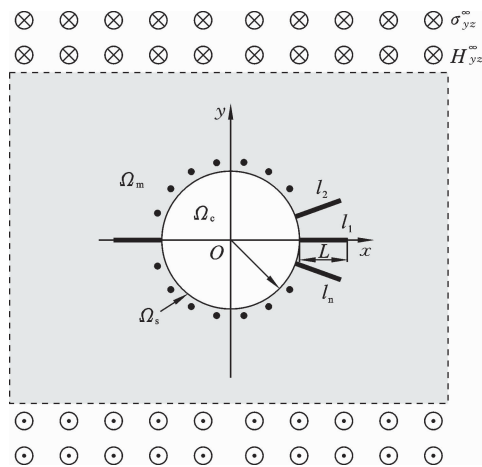


图 1 一维六方准晶中纳米孔边周期裂纹示意图

Fig. 1 Schematic diagram of periodic nanocracks emanating from a nano-hole in one-dimensional hexagonal quasicrystals

在反平面剪切问题中,一维六方准晶弹性体的基本方程如下^[38]:

本构方程:

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 2C_{44}\epsilon_{yz} + R_3\omega_{yz} \quad (1)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = 2C_{44}\epsilon_{xz} + R_3\omega_{xz} \quad (2)$$

$$H_{yz} = H_{zy} = 2R_3\epsilon_{yz} + K_2\omega_{yz} \quad (3)$$

$$H_{xz} = H_{zx} = 2R_3\epsilon_{xz} + K_2\omega_{xz} \quad (4)$$

几何方程:

$$\epsilon_{yz} = \epsilon_{zy} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (5)$$

$$\omega_{yz} = \omega_{zy} = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \omega_{xz} = \omega_{zx} = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (6)$$

平衡方程:

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial H_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial H_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

式中 σ_{jz} 和 H_{jz} ($j=x, y$) 分别表示声子场应力和相位子场应力, ϵ_{jz} 和 ω_{jz} ($j=x, y$) 分别表示声子场应变和相位子场应变, u 和 w 分别表示声子场位移和相位子场位移, 声子场弹性常数 C_{44} , 相位子场弹性常数 K_2 , 声子场-相位子场耦合弹性常数 R_3 .

将式(1)-(6)代入式(7)和(8)中, 得到控制方程:

$$\mathbf{B} \nabla^2 \mathbf{U} = 0 \quad (9)$$

其中 $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} C_{44} & R_3 \\ R_3 & K_2 \end{bmatrix}$, ∇^2 表示拉普拉斯算子, $\mathbf{U} = [u \ w]^T$ 表示广义位移.

反平面剪切问题的位移和应力可由解析函数向量 $\mathbf{P} = [\varphi(z) \ \psi(z)]^T$ 表示, 定义广义应力 $\mathbf{M} = [\sigma_{jz} \ H_{jz}]^T$, 广义应变 $\mathbf{N} = [\epsilon_{jz} \ \omega_{jz}]^T$ ($j=r, \theta$ 或 x, y), 广义位移和应力场如下:

$$\mathbf{U} = \text{Re}[\mathbf{P}] = \frac{1}{2} [\mathbf{P} + \bar{\mathbf{P}}] \quad (10)$$

$$\mathbf{M}_x - i\mathbf{M}_y = \mathbf{B} \frac{d\mathbf{P}}{dz} \quad (11)$$

$$\mathbf{M}_r - i\mathbf{M}_\theta = e^{i\theta} \mathbf{B} \frac{d\mathbf{P}}{dz} \quad (12)$$

根据 Gurtin-Murdoch 理论^[21-23], 纳米缺陷表面的非经典边界条件为^[29,30]:

$$\mathbf{U}_c(t) = \mathbf{U}_m(t) \quad (13)$$

$$-\mathbf{M}_r^m(t) = \frac{\mathbf{B}^s \partial \mathbf{N}_\theta^s}{\rho \partial \theta} \quad (14)$$

其中 $t(\rho, \theta)$ 表示极坐标, $\mathbf{B}^s = \begin{bmatrix} C_{44}^s & R_3^s \\ R_3^s & K_2^s \end{bmatrix}$ 表示准晶表面弹性常数矩阵, C_{44}^s 为声子场表面常数, K_2^s 为相位子场表面常数, R_3^s 为声子场-相位子场耦合表面常数, $\mathbf{M}_r^m(t)$ 表示广义基体应力向量, \mathbf{N}_θ^s 表示广义表面应变向量. 上下标中的 c 表示圆孔, m 表示基体, s 表示缺陷.

2 应力场解析解

利用保角变换函数^[39]可以将图 1 所示 z 平面上的孔边周期裂纹的孔外部分变换成为图 2 所示 ζ 平面上的半径为 R 的圆外部分, 变换函数为^[40]:

$$Z = \Phi(\zeta) = 2^{-\frac{2}{n}} \zeta [\epsilon (R^n \zeta^{-n} + 1) + \sqrt{\epsilon^2 (R^n \zeta^{-n} + 1)^2 - 4R^n \zeta^{-n}}]^{\frac{2}{n}} \quad (15)$$

$$\epsilon = \frac{1}{2} [(1+\lambda)^{\frac{n}{2}} + (1+\lambda)^{-\frac{n}{2}}], \quad \lambda = \frac{L}{R} \quad (16)$$

其中 n 表示孔边周期裂纹数量.

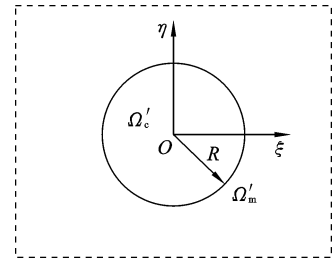


图 2 保角映射 (ζ 平面)

Fig. 2 Conformal mapping

将解析函数向量 \mathbf{P} 在 ζ 平面内展开成 Laurent 级数^[29,30]:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \varphi(z) \\ \psi(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^* \\ b^* \end{bmatrix} \ln \zeta + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix} \zeta^k \quad (17)$$

其中 $[a^* \ b^*]^T$ 和 $[a_k \ b_k]^T$ 是待定复常数.

经分析上式取有限项即可得到问题的解:

$$\mathbf{P}_c(\zeta) = \begin{bmatrix} \varphi_c(\zeta) \\ \psi_c(\zeta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^\varphi \\ A^\psi \end{bmatrix} \zeta \quad (18)$$

$$\mathbf{P}_m(\zeta) = \begin{bmatrix} \varphi_m(\zeta) \\ \psi_m(\zeta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} C_{-1} \\ D_{-1} \end{bmatrix} \frac{1}{\zeta} \quad (19)$$

其中 $A^\varphi, A^\psi, C_1, D_1, C_{-1}, D_{-1}$ 是复常数。

根据远场荷载条件,由式(11)和(19)可得:

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} = -i[2^{-\frac{2}{n}}(2\varepsilon)^{\frac{2}{n}}] \mathbf{B}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_{yz}^\infty \\ H_{yz}^\infty \end{bmatrix} \quad (20)$$

由边界条件(13)和(14)可得:

$$\begin{bmatrix} A^\varphi \\ A^\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} - \frac{1}{R^2} \begin{bmatrix} C_{-1} \\ D_{-1} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\mathbf{B} \left\{ \begin{bmatrix} C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{R^2} \begin{bmatrix} C_{-1} \\ D_{-1} \end{bmatrix} \right\} = \frac{\mathbf{B}^S}{R} \begin{bmatrix} A^\varphi \\ A^\psi \end{bmatrix} \quad (22)$$

联立式(20)-(22)得:

$$\begin{bmatrix} C_{-1} \\ D_{-1} \end{bmatrix} = i[2^{-\frac{2}{n}}(2\varepsilon)^{\frac{2}{n}}] R^2 \left(\mathbf{B} + \frac{\mathbf{B}^S}{R} \right)^{-1} \cdot \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{B}^S}{R} \right) \mathbf{B}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_{yz}^\infty \\ H_{yz}^\infty \end{bmatrix} \quad (23)$$

将式(20)和(23)代入到式(11)中,应力场的解析解如下:

$$\mathbf{M}_y + i\mathbf{M}_x = \frac{2^{-\frac{2}{n}}(2\varepsilon)^{\frac{2}{n}}}{\Phi'(\zeta)} \left[\mathbf{E} - \mathbf{B} \frac{R^2}{\zeta^2} \left(\frac{\mathbf{B}^S}{R} + \mathbf{B} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{\mathbf{B}^S}{R} - \mathbf{B} \right) \mathbf{B}^{-1} \right] \begin{bmatrix} \sigma_{yz}^\infty \\ H_{yz}^\infty \end{bmatrix} \quad (24)$$

其中 \mathbf{E} 表示单位矩阵。

3 应力强度因子与能量释放率

3.1 应力强度因子

在 z 平面内裂纹尖端的 III 型应力强度因子定义如下^[38]:

$$\begin{bmatrix} K_{III}^{\alpha A} \\ K_{III}^{HA} \end{bmatrix} = \lim_{Z \rightarrow Z_0} (\mathbf{M}_y + i\mathbf{M}_x) \sqrt{2\pi(Z - Z_0)} \quad (25)$$

其中 $Z_0 = R + L$, 上标中 σ 和 H 分别代表声子场和相位子场。

将式(24)代入式(25)中得:

$$\begin{bmatrix} K_{III}^{\alpha A} \\ K_{III}^{HA} \end{bmatrix} = \lim_{\zeta \rightarrow R} \frac{2^{-\frac{2}{n}}(2\varepsilon)^{\frac{2}{n}} \sqrt{2\pi(Z - Z_0)}}{\Phi'(\zeta)} \cdot \left[\mathbf{E} - \mathbf{B} \frac{R^2}{\zeta^2} \left(\frac{\mathbf{B}^S}{R} + \mathbf{B} \right)^{-1} \left(\frac{\mathbf{B}^S}{R} - \mathbf{B} \right) \mathbf{B}^{-1} \right] \begin{bmatrix} \sigma_{yz}^\infty \\ H_{yz}^\infty \end{bmatrix} \quad (26)$$

注意到当裂纹数量 n 及裂纹长/孔径比 λ 给定时 $\Phi'(R) = 0$, 上式可得:

$$\begin{bmatrix} K_{III}^{\alpha A} \\ K_{III}^{HA} \end{bmatrix} = \frac{2^{-\frac{2}{n}}(2\varepsilon)^{\frac{2}{n}} \sqrt{\pi}}{\sqrt{\Phi''(R)}} \left[\mathbf{E} - \mathbf{B} \left(\frac{\mathbf{B}^S}{R} + \mathbf{B} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{\mathbf{B}^S}{R} - \mathbf{B} \right) \mathbf{B}^{-1} \right] \begin{bmatrix} \sigma_{yz}^\infty \\ H_{yz}^\infty \end{bmatrix} \quad (27)$$

无量纲 III 型应力强度因子定义如下^[29]:

$$\begin{bmatrix} K_{III}^{\alpha \sigma} \\ K_{III}^{\alpha H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K_{III}^{\alpha A}}{\sqrt{\pi L' \sigma_{yz}^\infty}} \\ \frac{K_{III}^{HA}}{\sqrt{\pi L' H_{yz}^\infty}} \end{bmatrix} \quad (28)$$

其中 $L' = R + L$ 表示等效裂纹长度。

3.2 能量释放率

对于一维六方准晶弹性体,裂纹尖端的能量释放率为^[41]:

$$G = \frac{K_{III}^{\alpha A} K_{III}^{\alpha A} + K_{III}^{HA} K_{III}^{\alpha A}}{2} \quad (29)$$

其中 $K_{III}^{\alpha A}$ 和 $K_{III}^{\alpha H}$ 分别为声子场和相位子场的应变强度因子,可由下式确定:

$$\begin{bmatrix} K_{III}^{\alpha A} \\ K_{III}^{\alpha H} \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1} \begin{bmatrix} K_{III}^{\alpha A} \\ K_{III}^{HA} \end{bmatrix} \quad (30)$$

结合公式(29)和(30)可得:

$$G = \frac{K_2 K_{III}^{\alpha A^2} - 2R_3 K_{III}^{\alpha A} K_{III}^{HA} + C_{44} K_{III}^{HA^2}}{2(C_{44} K_2 - R_3^2)} \quad (31)$$

3.3 特殊情形

(1) 不考虑表面效应时一维六方准晶孔边周期裂纹应力强度因子

此时 $\mathbf{B}^S = 0$, 式(27)简化为:

$$\begin{bmatrix} K_{III}^{\alpha A} \\ K_{III}^{HA} \end{bmatrix} = \frac{2^{1-\frac{2}{n}}(2\varepsilon)^{\frac{2}{n}} \sqrt{\pi}}{\sqrt{\Phi''(R)}} \begin{bmatrix} \sigma_{yz}^\infty \\ H_{yz}^\infty \end{bmatrix} \quad (32)$$

经验证,上式与文献[39]中的结果一致。

(2) 考虑表面效应时周期裂纹数量 n 取特殊值时的应力强度因子

$n = 1$ 时,式(27)退化为文献[34]中不考虑电荷载荷时孔边含一个沿 x 正轴方向裂纹的情形:

$$\begin{bmatrix} K_{III}^{\alpha A} \\ K_{III}^{HA} \end{bmatrix} = \frac{\varepsilon^2 \sqrt{\pi}}{\sqrt{\Phi''(R)}} \left[\mathbf{E} - \mathbf{B} \left(\frac{\mathbf{B}^S}{R} + \mathbf{B} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{\mathbf{B}^S}{R} - \mathbf{B} \right) \mathbf{B}^{-1} \right] \begin{bmatrix} \sigma_{yz}^\infty \\ H_{yz}^\infty \end{bmatrix} \quad (33)$$

其中 $\varepsilon = \frac{1}{2}[(1+\lambda)^{\frac{1}{2}} + (1+\lambda)^{-\frac{1}{2}}]$ 。

$n = 2$ 时,式(27)退化为文献[29]中不考虑电荷载

荷时圆孔含对称双裂纹的情形:

$$\begin{bmatrix} K_{III}^{\sigma A} \\ K_{III}^{HA} \end{bmatrix} = \frac{\varepsilon \sqrt{\pi}}{\sqrt{\Phi''(R)}} \left[\mathbf{E} - \mathbf{B} \left(\frac{\mathbf{B}^S}{R} + \mathbf{B} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{\mathbf{B}^S}{R} - \mathbf{B} \right) \mathbf{B}^{-1} \right] \begin{bmatrix} \sigma_{yz}^{\infty} \\ H_{yz}^{\infty} \end{bmatrix} \quad (34)$$

其中 $\varepsilon = \frac{1}{2} [(1+\lambda) + (1+\lambda)^{-1}]$.

$n=4$ 时,式(27)退化为文献[30]中不考虑电载荷时圆孔含四个对称等裂纹的情形:

$$\begin{bmatrix} K_{III}^{\sigma A} \\ K_{III}^{HA} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{\varepsilon \pi}}{\sqrt{\Phi''(R)}} \left[\mathbf{E} - \mathbf{B} \left(\frac{\mathbf{B}^S}{R} + \mathbf{B} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{\mathbf{B}^S}{R} - \mathbf{B} \right) \mathbf{B}^{-1} \right] \begin{bmatrix} \sigma_{yz}^{\infty} \\ H_{yz}^{\infty} \end{bmatrix} \quad (35)$$

其中 $\varepsilon = \frac{1}{2} [(1+\lambda)^2 + (1+\lambda)^{-2}]$.

(3) 各向同性弹性体中纳米尺度圆孔边周期裂纹应力强度因子

令 $K_2=0, R_3=0, K_2^S=0, R_3^S=0$ 时,式(27)可以退化为文献[40]的结果:

$$K_{III}^A = \frac{2^{1-\frac{2}{n}} (2\varepsilon)^{\frac{2}{n}} \sqrt{\pi}}{\sqrt{\Phi''(R)}} \left(\frac{C_{44}}{C_{44}^s/R + C_{44}} \right) \sigma_{yz}^{\infty} \quad (36)$$

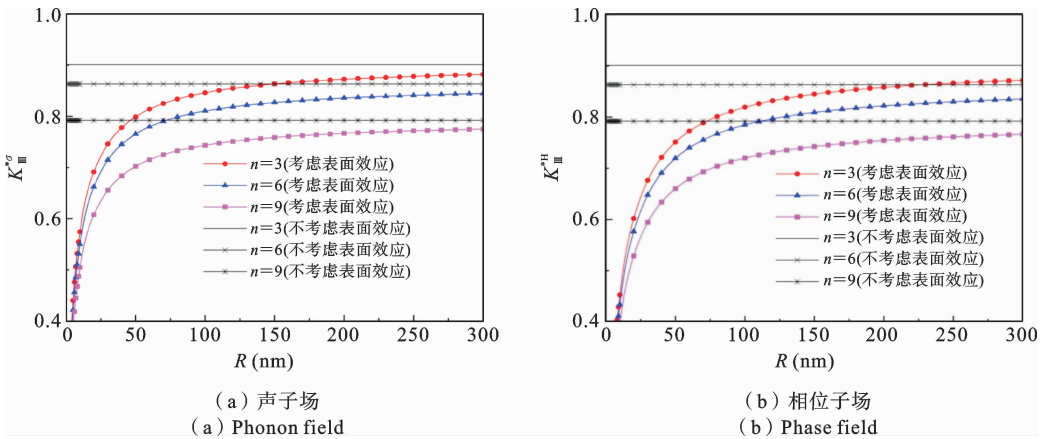


图3 不同裂纹数量时无量纲场强因子随孔径的变化

Fig. 3 Variation of dimensionless field intensity factors with aperture at different crack numbers

4.2 周期裂纹数量对无量纲应力强度因子的影响

图4给出了不同裂纹长/孔径比 L/R 分别取 0.3, 0.5 和 0.8 时裂纹数量对无量纲场强因子的影响,其中 $R=10$ nm. 可以看出无论是否考虑表面效应,在 $n < 3$ 时,相同裂纹长/孔径比时随着裂纹数量

4 结果与讨论

取一维六方准晶体的弹性常数为^[42]: $C_{44} = 50 \times 10^9$ N/m², $R_3 = 1.2 \times 10^9$ N/m², $K_2 = 0.3 \times 10^9$ N/m²;准晶体中的纳米缺陷表面弹性常数为: $C_{44}^s = 125$ N/m, $R_3^s = 8$ N/m, $K_2^s = 3$ N/m. 远场声子场和相位子场载荷分别为 $\sigma_{yz}^{\infty} = 8$ MPa 和 $H_{yz}^{\infty} = 2$ MPa.

4.1 缺陷尺寸对无量纲应力强度因子的影响

图3给出了裂纹数量 $n=3, 6, 9$ 时纳米孔尺寸对裂纹尖端声子场和相位子场的无量纲场强因子的影响曲线,其中 $L/R=0.5$. 可以看出,不考虑缺陷(孔和裂纹)表面效应时,无论孔径大小和裂纹数量如何变化,声子场和相位子场的无量纲场强因子恒定不变;声子场和相位子场的无量纲场强因子相等;随着裂纹数量增加无量纲场强因子减小. 考虑缺陷(孔和裂纹)表面效应时,随着孔径的增加,当孔径在 100 nm 以内时无量纲场强因子增长速度非常快,之后增长速度逐渐放缓并且最终趋近于不考虑表面效应时的结果,表面效应对无量纲场强因子的影响逐渐减小. 相同纳米孔径时相位子场的无量纲场强因子数值上比声子场低,且最终的收敛速度比声子场慢.

的上升无量纲场强因子增加,而在 $n > 3$ 时情况相反但变化趋势变缓; $n \geq 6$ 时无量纲场强因子小于 $n=1$ 时的值; $n=3$ 时无量纲场强因子最大,这说明圆孔边均布三条裂纹时材料最易发生失效. 有意思的是, $n=2$ 时无量纲场强因子结果总与 $n=4$ 时结果一

致. 裂纹数量相同时, 随着 L/R 的增加无量纲场强因子增大, 曲线的起伏变化趋势也增大. 当 n 持续增

大时, 可以看出裂纹长/孔径比对于强度因子的影响减弱.

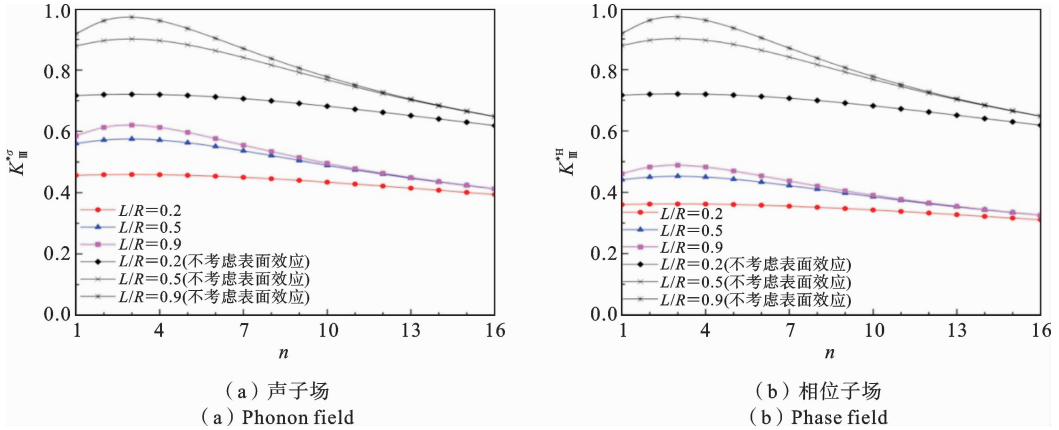


图 4 不同裂纹长/孔径比时无量纲场强因子随裂纹数量的变化

Fig. 4 Variation of dimensionless field intensity factors with number of cracks at different crack-length/aperture ratios

4.3 裂纹长/孔径比对应力强度因子的影响

图 5 给出了裂纹数量 $n=3, 10$ 时无量纲场强因子随裂纹长/孔径比的变化趋势, 其中 $R=5$ nm. 随着裂纹长/孔径比的不断增加无量纲场强因子都呈上升趋势, 且都在 $-2 < \lg(L/R) < -0.5$ 区间内增长幅度较大, 当 $\lg(L/R) > -0.5$ 时逐渐趋于平稳. 考虑表面效应时, 同一裂纹长/孔径比时裂纹数量对无量纲场强因子的影响在 $\lg(L/R) < -1$ 时可以忽略, 当 $\lg(L/R) > -1$ 时才能明显观察到裂纹数量的影响. 且裂纹数量不同导致的无量纲场强因子之

间的差值随着裂纹长/孔径比的增加而增大, 最终在 $\lg(L/R) > 0.5$ 时又趋向于平稳.

4.4 声子场-相位子场耦合系数对无量纲场强因子的影响

图 6 给出了裂纹数量 $n=3, 10$ 时耦合系数 R_3 对声子场和相位子场的无量纲应力强度因子的影响, 其中 $R=5$ nm, $L/R=0.5$. 随着耦合系数的逐渐增加, 声子场的无量纲强度因子近似呈线性增大, 而相位子场先增大而后减小呈非线性. 裂纹数量只改变无量纲场强因子的大小, 不同裂纹数量时的强度因子曲线接近平行.

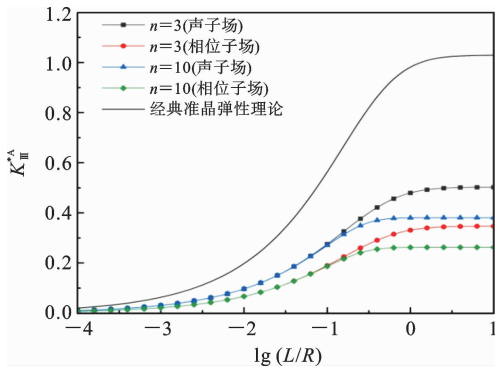


图 5 不同裂纹数量时无量纲场强因子随裂纹长/孔径比的变化

Fig. 5 Variation of dimensionless field intensity factors with crack-length/aperture ratio at different crack numbers

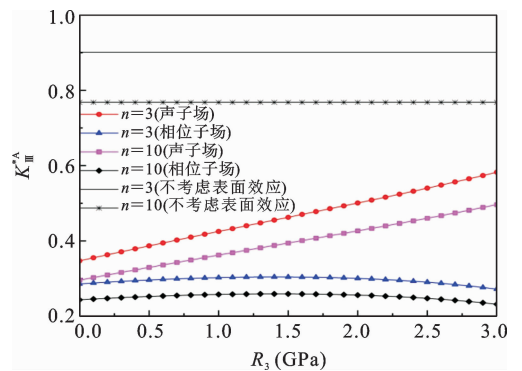


图 6 不同裂纹数量时无量纲场强因子随耦合系数的变化

Fig. 6 Variation of dimensionless field intensity factors with coupling coefficient at different crack numbers

4.5 施加载荷对无量纲强度因子的影响

图7给出了裂纹数量 $n=3, 10$ 时施加的声子场和相位子场载荷对无量纲强度因子的影响, 其中 $R = 5 \text{ nm}, L/R=0.5$, 耦合系数 $R_3=1.2 \text{ GPa}$. 图7(a)表明相位子场无量纲场强因子呈线性增加, 而声子场无量纲场强因子先迅速增大而后趋于平缓; 图7(b)图显示声子场无量纲场强因子呈线性减小, 而

相位子场无量纲场强因子先迅速减小而后趋于平缓. 裂纹数量不同的影响在(a)图中相位子场无量纲场强因子和(b)图中声子场无量纲场强因子仅体现在数值大小上, 对变化趋势没有影响; 但裂纹数量不同在(a)图中 $\sigma_{yz}^\infty < 4 \text{ MPa}$ 的声子场区间和(b)图中 $0.025 \text{ MPa} < H_{yz}^\infty < 0.25 \text{ MPa}$ 的相位子场区间, 对无量纲应力强度因子差值影响较小.

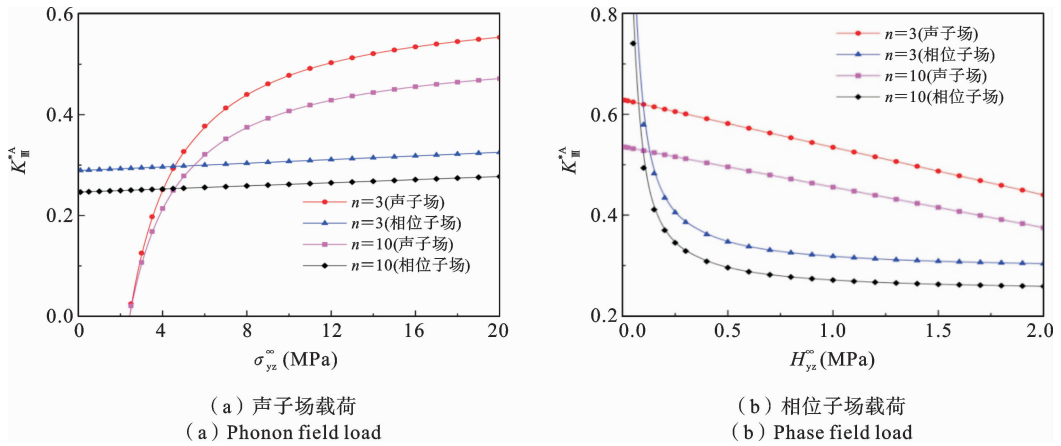


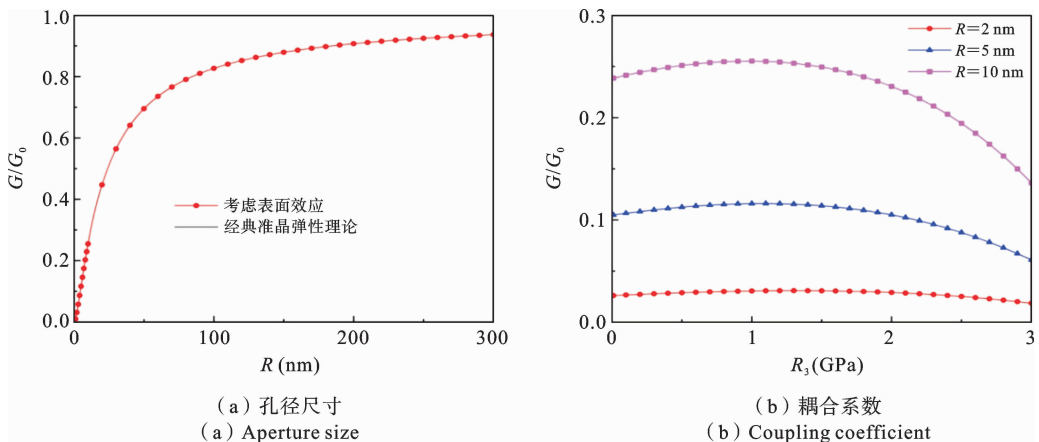
图7 不同裂纹数量时无量纲场强因子随施加载荷的变化

Fig. 7 Variation of dimensionless field intensity factor with applied load at different crack numbers

4.6 裂纹尖端无量纲能量释放率

图8给出了孔径尺寸、耦合系数、声子场载荷和相位子场载荷、裂纹长/孔径比多个参数对无量纲能量释放率的影响, 其中 G_0 表示同一条件下不考虑表面效应时的能量释放率. 由图8(a)可以看出, 随着孔径尺寸的增加无量纲能量释放率逐渐增大最终趋于1. 图8(b)表明, 随着耦合系数的增加无量纲能量释放率先轻微增大而后减小, 取最大值时的横坐

标随着孔径尺寸的增大而减小; 且孔径尺寸越大, 耦合系数的影响越大. 图8(c)说明, 随着声子场载荷的增加, 无量纲能量释放率先轻微递减再递增, 取最小值时的横坐标随着相位子场载荷的增大而增大, 且不论相位子场载荷大小如何, 都会趋于相同值. 图8(d)表明, 随着相位子场载荷的增加, 无量纲能量释放率先轻微递增再递减, 取最大值时的横坐标随着声子场载荷的增大而增大, 且不论声子场载荷大



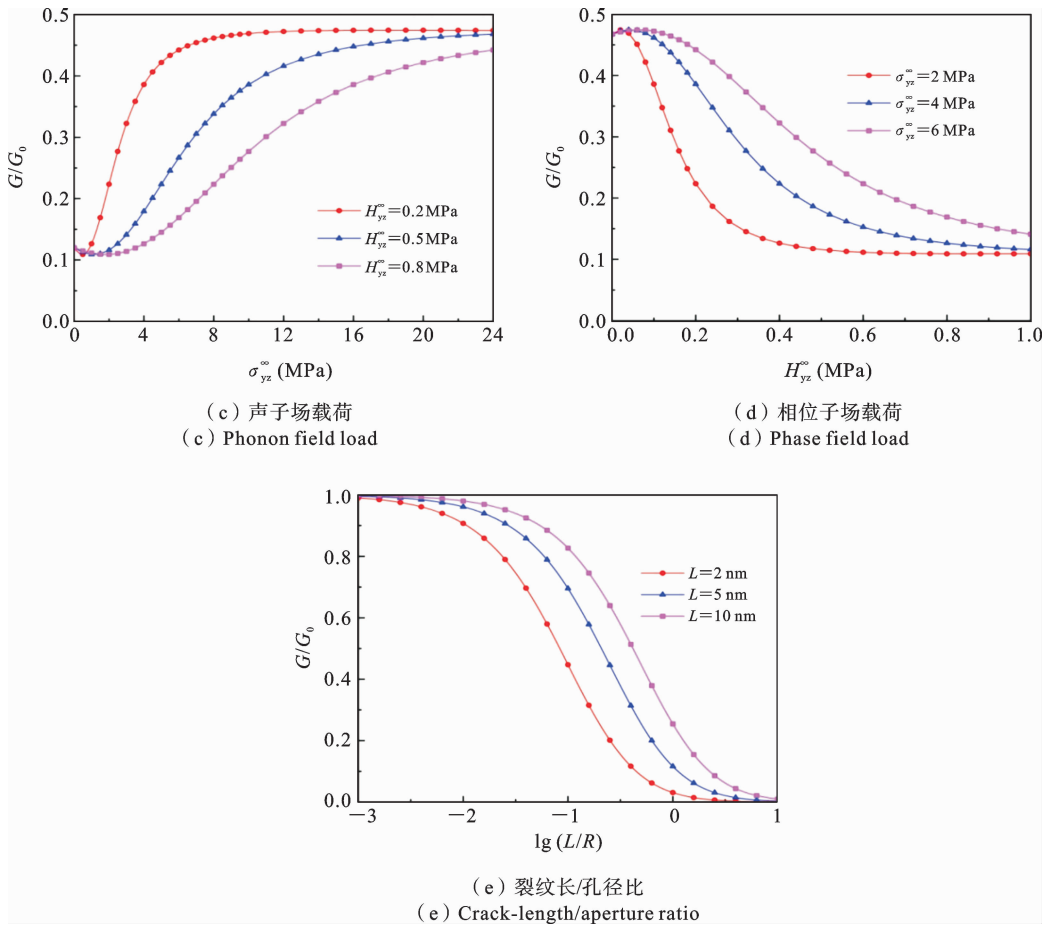


图 8 不同因素对无量纲能量释放率的影响

Fig. 8 Effects of different factors on dimensionless energy release rate

小如何,都会趋于相同值.图 8(e)可以看出,随着裂纹长/孔径比的增加,无论裂纹长度如何变化,无量纲能量释放率都是减小的,并在 $Lg(L/R) < -2$ 时缓慢减小,在 $-2 < Lg(L/R) < 0$ 时快速降低,在 $Lg(L/R) > 0$ 时又逐渐趋近于 0;相同裂纹长/孔径比条件下,裂纹长度越大无量纲能量释放率越大.

5 结论

本文基于表面弹性理论对一维六方准晶中纳米尺度孔边周期 III 型裂纹问题进行了断裂力学性能分析,主要结论如下:

(1) 考虑表面效应时,声子场和相位子场无量纲场强因子有着明显的尺寸依赖.随着裂纹数量的增加,无量纲场强因子先增大再减少,在裂纹数量 $n = 3$ 时达到最大值.随着裂纹长/孔径比的增加,无

量纲场强因子先迅速增大而后趋于平稳.随着耦合系数的增加,声子场无量纲场强因子近似线性增大,而相位子场无量纲场强因子先增大而后减小呈非线性.随着施加声子场载荷的增加,相位子场无量纲场强因子呈线性增加,而声子场无量纲场强因子先迅速增大而后趋于平缓;随着相位子场载荷的增加,声子场无量纲场强因子呈线性减小,而相位子场无量纲场强因子先迅速减小而后趋于平缓.

(2) 不考虑表面效应时,声子场和相位子场的无量纲场强因子相等,且孔径大小、耦合系数和远场载荷对其没有影响,裂纹长/孔径比和裂纹数量对无量纲场强因子的影响与考虑表面效应时一致.

(3) 随着耦合系数的增加无量纲能量释放率先轻微增大而后减小;随着声子场载荷的增加,无量纲能量释放率先轻微递减再递增;随着相位子场载荷的增加,无量纲能量释放率先轻微递增再递减;随着

裂纹长/孔径比的增加,无量纲能量释放率从1减小到0,其中在 $-2 < Lg(L/R) < 0$ 时下降迅速.

参考文献

- [1] Shechtman D, Blech I, Gratias D, et al. Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry [J]. *Physical Review Letters*, 1984, 53(20): 1951-1953.
- [2] 张利明, 董闯. 准晶材料性能及应用研究现状[J]. *材料导报*, 2000, 14(1): 22-24. (Zhang L M, Dong C. Current status of research on properties and applications of quasicrystals [J]. *Materials Reports*, 2000, 14(1): 22-24. (in Chinese))
- [3] 丁路芬, 苏广才. 准晶材料的研究现状及其前景展望[J]. *现代铸铁*, 2007, 2: 65-67. (Ding L F, Su G C. Present status of research and prospect forecast of quasicrystal materials[J]. *Modern Cast Iron*, 2007, 2: 65-67. (in Chinese))
- [4] 董闯. 准晶材料[M]. 北京: 国防工业出版社, 1998. (Dong C. *The Quasicrystals Material* [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1998. (in Chinese))
- [5] Zou Y, Kuczera P, Sologubenko A, et al. Superior room-temperature ductility of typically brittle quasicrystals at small sizes[J]. *Nature Communications*, 2016, 7: 12261.
- [6] 刘官厅, 何青龙, 郭瑞平. 一维六方准晶非周期平面内的平面应变理论[J]. *物理学报*, 2009, 58(S1): 118-123. (Liu G T, He Q L, Guo R P. The plane strain theory for one-dimensional hexagonal quasicrystals in aperiodical plane[J]. *Acta Physica Sinica*, 2009, 58(S1): 118-123. (in Chinese))
- [7] Liu G T, Yang L Y. Interaction between infinitely many dislocations and a semi-infinite crack in one-dimensional hexagonal quasicrystal[J]. *Chinese Physics B*, 2017, 26(9): 094601.
- [8] 常莉红, 时朋朋, 崔江彦. 一维六方准晶材料中双周期裂纹反平面问题[J]. *应用数学学报*, 2017, 40(4): 489-496. (Chang L L, Shi P P, Cui J Y. The anti-plane problem of a one-dimensional hexagonal quasicrystals with doubly periodic cracks[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2017, 40(4): 489-496. (in Chinese))
- [9] 马小丹, 李星, 赵雪芬. 一维六方准晶带裂纹的弹性半平面无摩擦接触问题研究[J]. *力学季刊*, 2017, 38(2): 281-288. (Ma X D, Li X, Zhao X F. On the frictionless contact problem of elastic half plane with cracks in one-dimensional hexagonal quasicrystals [J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2017, 38(2): 281-288. (in Chinese))
- [10] 崔江彦, 李星. 周期法向载荷下一维六方准晶非周期平面的裂纹问题[J]. *宁夏大学学报(自然科学版)*, 2018, 39(1): 26-31. (Cui J Y, Li X. Crack problem of a periodical plane in the one-dimensional hexagonal quasicrystals under periodic normal load[J]. *Journal of Ningxia University (Natural Science Edition)*, 2018, 39(1): 26-31. (in Chinese))
- [11] 吕鑫, 刘官厅. 一维六方准晶中平行螺型位错与有限长裂纹的相互作用[J]. *固体力学学报*, 2020, 41(1): 41-49. (Lv X, Liu G T. The interaction between parallel screw dislocations and a finite crack in one dimensional hexagonal quasicrystals[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2020, 41(1): 41-49. (in Chinese))
- [12] Dang H Y, Lv S Y, Fan C Y, et al. Analysis of anti-plane interface cracks in one-dimensional hexagonal quasicrystal coating[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2020, 81: 641-652.
- [13] Zhao M H, Fan C Y, Lu C S, et al. Analysis of interface cracks in one-dimensional hexagonal quasicrystal coating under in-plane loads[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2021, 243: 107534.
- [14] Fan C Y, Chen S, Zhang Q Y, et al. Fundamental solutions and analysis of an interfacial crack in a one-dimensional hexagonal quasicrystal bi-material[J]. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2020, 25(5): 1124-1139.
- [15] 张炳彩, 丁生虎, 张来萍. 一维六方准晶双材料中圆孔边共线界面裂纹的反平面问题[J]. *应用数学和力学*, 2022, 43(6): 639-647. (Zhang B C, Ding S H, Zhang L P. The anti-plane problem of collinear interface cracks emanating from a circular hole in 1D hexagonal quasicrystal bi-materials [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, 43(6): 639-647. (in Chinese))
- [16] 赵雪芬, 马园园. 一维六方准晶双材料界面共线裂纹

- 的反平面问题[J]. 宁夏大学学报(自然科学版), 2023, 44(2): 131-136. (Zhao X F, Ma Y Y. Anti-plane problem of interface collinear cracks in one-dimensional hexagonal quasicrystal bimetals [J]. Journal of Ningxia University (Natural Science Edition), 2023, 44(2): 131-136. (in Chinese))
- [17] Yu J, Guo J H. Analytical solution for a 1D hexagonal quasicrystal strip with two collinear mode-III cracks perpendicular to the strip boundaries [J]. Crystals, 2023, 13(4): 661.
- [18] Ma Y Y, Zhou Y T, Yang J, et al. Interface crack behaviors disturbed by Love waves in a 1D hexagonal quasicrystal coating-substrate structure [J]. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, 2023, 74(2): 61.
- [19] 杨娟, 徐燕, 师金华, 等. 功能梯度一维六方准晶中裂纹对 SH 波的散射[J]. 振动与冲击, 2023, 42(12): 249-255. (Yang J, Xu Y, Shi J H, et al. Scattering of the SH wave by a crack in functionally graded one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystal[J]. Journal of Vibration and Shock, 2023 42(12): 249-255. (in Chinese))
- [20] 赵雪芬, 卢绍楠, 马园园, 等. 一维六方准晶非周期平面内中心开口裂纹的平面热弹性问题[J]. 应用数学和力学, 2024, 45(3): 303-317. (Zhao X F, Lu S N, Ma Y Y, et al. The plane thermoelastic problem of a central opening crack in the 1D hexagonal quasicrystal non-periodic plane [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2024, 45(3): 303-317. (in Chinese))
- [21] Gurtin M E, Murdoch A I. A continuum theory of elastic material surfaces[J]. Archive for Rational Mechanics & Analysis, 1975, 57(4): 291-323.
- [22] Gurtin M E, Murdoch A I. Surface stress in solids [J]. International Journal of Solids and Structures, 1978, 14(6): 431-440.
- [23] Gurtin M E, Weismüller J, Larche F. A general theory of curved deformable interfaces in solids at equilibrium[J]. Philosophical Magazine A, 1998, 78(5): 1093-1109.
- [24] 魏刚, 肖万伸, 席俊平. 一维六方准晶中螺型位错偶极子与直线纳米裂纹的干涉效应[J]. 固体力学学报, 2018, 39(6): 606-613. (Wei G, Xiao W S, Xi J P. The Interaction between a screw dislocation dipole and a linear nano crack in one dimensional hexagonal quasicrystals [J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2018, 39(6): 606-613. (in Chinese))
- [25] Yang D S, Liu G T. Anti-plane problem of nano-cracks emanating from a regular hexagonal nano-hole in one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystals [J]. Chinese Physics B, 2020, 29(10): 104601.
- [26] 武志林, 刘官厅, 杨东升. 一维六方准晶中带两条纳米裂纹的圆形纳米孔的解析解[J]. 数学的实践与认识, 2021, 51(16): 164-172. (Wu Z L, Liu G T, Yang D S. Analytical solution of two nano-cracks emanating from circular nano-hole in one-dimensional hexagonal quasicrystals [J]. Mathematics in Practice and Theory, 2021, 51(16): 164-172. (in Chinese))
- [27] Zhao Z N, Guo J H. Surface effects on a mode-III reinforced nano-elliptical hole embedded in one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystals [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2021, 42(5): 625-640.
- [28] Wu Z L, Liu L G, Yang D S. Surface effect on two nanocracks emanating from an electrically semi-permeable regular $2n$ -polygon nanohole in one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystals under anti-plane shear [J]. International Journal of Modern Physics B, 2021, 35(32): 2150330.
- [29] Su M Y, Xiao J H, Feng G Y, et al. Mode-III fracture of a nanoscale cracked hole in one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystals [J]. International Journal of Mechanics and Materials in Design, 2022, 18: 423-433.
- [30] Su M Y, Xiao J H. Model III fracture analysis of a nanoscale elliptical hole with four cracks in one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystals [J]. Engineering Fracture Mechanics, 2022, 274: 108776.
- [31] 卢绍楠, 赵雪芬, 马园园. 电半渗透边界条件下一维六方压电准晶纳米弯折裂纹反平面问题研究[J]. 力学季刊, 2023, 44(2): 444-455. (Lu S N, Zhao X F, Ma Y Y. On anti-plane problem of nano-bending crack in one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystals with the electrically semi-permeable boundary condition [J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2023, 44(2): 444-455. (in Chinese))

- [32] Ma Y Y, Zhao X F, Zhao Y T, et al. Anti-plane problem of a nano-sharp crack in one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystals with the electrically semi-permeable condition[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2022, 93(4): 1423-1435.
- [33] Lu S N, Zhang B W, Ma Y Y, et al. Analytical solutions for the plane thermoelastic problem of a nano-open crack in one-dimensional hexagonal quasicrystal non-periodic plane [J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2023, 128: 104137.
- [34] Xin Y Y, Xiao J H. Fracture mechanics of an arbitrary position crack emanating from a nano-hole in one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystals [J]. *Acta Mechanica*, 2023, 234(4): 1409-1420.
- [35] Xin Y Y, Xiao J H. An analytic solution of an arbitrary location through-crack emanating from a nano-circular hole in one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystals [J]. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2024, 29(1): 71-82.
- [36] 赵雪芬, 马园园, 卢绍楠. 一维六方准晶中纳米尺度正三角形孔边裂纹的反平面问题[J]. *科学技术与工程*, 2023, 23(7): 2727-2733. (Zhao X F, Ma Y Y, Lu S N. Anti-plane problem of nano-cracks emanating from a regular triangular nano-hole in one dimensional hexagonal quasicrystals[J]. *Science Technology and Engineering*, 2023, 23(7): 2727-2733. (in Chinese))
- [37] 杨娟, 李星, 周跃亭. 一维六方压电准晶中圆孔边周期裂纹分析[J]. *振动与冲击*, 2019, 38(18): 62-71. (Yang J, Li X, Zhou Y T. Analysis of periodic cracks emanating from a circular hole in one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystals [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2019, 38(18): 62-71. (in Chinese))
- [38] 范天佑. 准晶数学弹性理论及应用[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1999. (Fan T Y. *Theory and Application of the Mathematic Elasticity About Quasicrystal* [M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1999. (in Chinese))
- [39] Guo J H, Lu Z X, Feng X. The fracture behavior of multiple cracks emanating from a circular hole in piezoelectric materials [J]. *Acta Mechanica*, 2010, 215(1-4): 119-134.
- [40] 冯国益, 肖俊华, 苏梦雨. 考虑表面效应时孔边均布径向多裂纹Ⅲ型断裂力学分析[J]. *应用数学和力学*, 2020, 41(4): 376-385. (Feng G Y, Xiao J H, Su M Y. Fracture mechanics analysis of mode-Ⅲ radial multi cracks on the edge of a hole with surface effects [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, 41(4): 376-385. (in Chinese))
- [41] Guo J H, Yu J, Si R. A semi-inverse method of a Griffith crack in one-dimensional hexagonal quasicrystals [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, 219(14): 7445-7449.
- [42] Li X Y, Li P D, Wu T H. Three-dimensional fundamental solutions for one-dimensional hexagonal quasicrystal with piezoelectric effect [J]. *Physics Letters*, 2014, 378: 826-834.

Fracture Mechanics of Periodic Type - III Cracks Emanating from a Nano-hole in One-dimensional Hexagonal Quasicrystals

Ming Tong^{1,2} Junhua Xiao^{1,2}

(¹ Department of Engineering Mechanics, Yanshan University, Qinhuangdao, 066004)

(² Hebei Key Laboratory of Mechanical Reliability for Heavy Equipments and Large Structures, Yanshan University, Qinhuangdao, 066004)

Abstract The material properties of quasicrystals are significantly affected by defects due to high brittleness. Understanding the fracture behavior of quasicrystals is crucial for material applications. In this paper, the fracture mechanics of one-dimensional hexagonal quasicrystals with periodic Type-III multiple cracks emanating from a nanoscale hole is investigated theoretically. Based on complex elasticity theory and the Gurtin-Murdoch surface elasticity theory, stress fields of a nano-hole with periodic multiple cracks, considering surface effects, are obtained using boundary value problems of analytic function theory and the conformal transformation technique. Analytical expressions for stress intensity factors and energy release rates of the phonon field and phase field at the crack tip under the same conditions are further derived. The effects of aperture size, number of periodic cracks, crack-length/aperture ratio, coupling coefficient between phonon field and phase field, and applied loads on dimensionless stress intensity factors and dimensionless energy release rate are discussed. Results indicate that the coupling coefficient, applied loads, and aperture size do not affect dimensionless stress intensity factors without surface effects. Larger aperture sizes show stronger size dependence on dimensionless stress intensity factors and dimensionless energy release rate when considering surface effects. An obvious coupling effect between the phonon field and the phase field is observed. The influence of the number of periodic cracks on dimensionless stress intensity factors and energy release rate is restricted by defect size. The effects of phonon field loads and phase field loads on dimensionless stress intensity factors and energy release rate differ. This work reveals the specific influence of surface effects on the fracture behavior of multi-cracks at the hole edge, offering significant academic insights into quasicrystal fracture mechanics.

Key words surface effect, surface elasticity theory, one-dimensional hexagonal quasicrystals, nanoscale periodic crack, stress intensity factor, energy release rate