

# 面内周期性结构多分辨率拓扑优化设计<sup>\*</sup>

邹胤康 李少华 邱文科<sup>\*\*</sup> 夏凉<sup>\*\*\*</sup>

(华中科技大学智能制造装备与技术全国重点实验室, 武汉, 430074)

**摘要** 复合材料在微观尺度上具有复杂的结构形式, 对其进行结构分析设计需要精细化有限元网格剖分, 导致计算规模庞大. 面内周期性结构作为一种常见的复合材料结构形式, 在宏观尺度上可以承受任意方向载荷, 但是其性能表征困难, 设计分析难度较大. 本文基于厚板假设和多分辨率网格策略, 建立了面内周期性结构的高效拓扑优化方法. 首先, 利用粗糙网格对宏观结构进行解耦分析, 求解微观边值条件, 进行非均质单胞的力学性能等效表征; 其次, 根据均匀化等效性能求解宏观边值条件, 利用精细网格进行设计变量更新和密度变量映射. 一方面, 考虑面外剪切变形的厚板假设使双尺度拓扑优化设计更符合实际承载场景; 另一方面, 利用多分辨率建模策略, 在不牺牲优化构型分辨率的前提下, 避免有限元计算量过大导致可求解问题规模受限的问题.

**关键词** 面内周期性结构, 厚板假设, 多分辨率网格, 双尺度拓扑优化

**DOI:** 10.19636/j.cnki.cjasm42-1250/o3.2024.015

## 0 引言

由微观单胞在平面内周期性排列的复合材料板作为一种常见的结构形式, 在航空航天、汽车工业等各种工业领域应用广泛, 不仅可以承受面内载荷, 还可以承受与平面呈任意夹角的面外载荷<sup>[1,2]</sup>. 为了精确且便捷地模拟各类微观单胞力学性能, 学者们提出了大量理论模型和实验测试方法<sup>[3]</sup>, 而对于微观结构的定制化设计大多处于经验设计阶段. 随着增材制造技术的发展, 利用拓扑优化技术实现面内周期性结构复杂微观构型的设计和制造逐步成为可能<sup>[4-6]</sup>. 连续体结构拓扑优化通过优化算法寻求一定约束条件下设计域内的最佳材料分布形式, 将材料利用率最大化. 经过几十年的发展, 目前代表性算法有均匀化法<sup>[7,8]</sup>、基于密度场的 SIMP (Solid isotropic material with penalization) 方法<sup>[9]</sup>、ESO/BESO (Evolutionary structural optimization/Bi-directional evolutionary structural optimization) 方法<sup>[10,11]</sup>、

水平集方法<sup>[12,13]</sup>和移动组元法<sup>[14]</sup>等. 根据设计对象和优化目标的不同, 针对面内周期性结构的连续体拓扑优化设计的研究主要包括微结构性能定制设计和宏微观多尺度设计.

微结构设计通过对周期性点阵材料微结构进行拓扑优化设计, 可以获得体积模量最大、剪切模量最大、负泊松比等特定性能. Kato 等<sup>[15]</sup>基于 SIMP 方法提出了双尺度解耦分析方法, 研究了二维周期性微结构刚度最大化问题. Zhang 等<sup>[16]</sup>进一步扩展该方法, 对初始结构进行优化得到单元密度场, 再依据密度场填充不同类型单胞, 该方法得到的优化结构具有较好的刚度和吸能属性. Xia 等<sup>[17]</sup>发布了基于能量均匀化的二维微结构设计 MATLAB 开源代码, 给出了适用多种问题的周期性边界条件格式, 大大降低了该领域的研究门槛, Gao 等人<sup>[18]</sup>随后将其扩展到三维问题求解. 宏微观多尺度设计的每一次迭代都需借助多尺度计算方法建立耦合关系, 并分析结构宏观响应. Liu 等<sup>[19]</sup>提出了一种双尺度拓扑优化方法, 在宏观尺度上采用 PAMP (Porous aniso-

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金项目(11972166)资助.

2024-04-15 收到修改稿, 2024-04-25 网络首发.

<sup>\*\*</sup> 通讯作者. E-mail: wenke\_q@hust.edu.cn.

<sup>\*\*\*</sup> 通讯作者. E-mail: xialiang@hust.edu.cn.

tropic material with penalization) 插值模型, 微观尺度上采用 SIMP 模型, 以最小柔度为优化目标实现宏微观结构一体化设计. Huang 等<sup>[20]</sup> 首次使用 BE-SO 方法设计多孔材料的周期性微观结构, 以获得最大体积和剪切模量, 该方法使用离散变量, 优化结构边界清晰, 且随后将其扩展到电磁渗透率<sup>[21]</sup>、粘弹性行为<sup>[22]</sup> 等优化问题. Zong 等<sup>[23]</sup> 通过可变的连续切割曲面, 利用曲面和基本微结构构型相交, 基于 VCUT (Variable Cutting) 参数化水平集方法实现了边界连续的结构拓扑优化设计. Liu 等<sup>[24]</sup> 利用多对曲面相交产生多个虚拟结构用于生成优化结构, 将 VCUT 方法扩展到 M-VCUT 用于微结构优化设计, 并将该方法应用于薄板微结构设计<sup>[25]</sup>. Xia 等<sup>[26]</sup> 基于 FE<sup>2</sup> 方法考虑非线性多尺度结构并行优化问题, 并利用模型降阶方法加速计算. 上述方法在建立二维/三维非均质模型时均采用全向周期性假设, 这一理论基础对面内周期性结构求解带来难以忽视的影响. Terada 等<sup>[27]</sup> 基于面内周期性假设提出了一种双尺度边界问题的求解方法, 宏观尺度上采用厚板模型, 微观尺度上采用三维实体模型. Nishi 等<sup>[28]</sup> 基于这一理论模型提出了双尺度拓扑优化方法, 采用梯度法更新单胞拓扑构型, 但是受商业软件限制, 该方法可求解问题规模不大, 需要额外进行后处理得到边界清晰的优化构型.

拓扑优化框架要求在消耗尽可能小的计算成本下获得高分辨率的优化结果, 而这一目标通常取决于材料插值模型、优化建模策略、自由度数量、有限元求解器和后处理等诸多因素<sup>[29]</sup>. 基于密度场的 SIMP 方法将密度变量用有限元网格离散, 为了得到高分辨率设计和光滑边界需要加密网格, 其弊端是大大增加了有限元分析的计算量, 尤其在三维问题中, 细化网格带来的计算量激增<sup>[30]</sup>. 为了在计算成本可控的前提下提高求解精度, 通常采用的方法有多分辨率拓扑优化方法<sup>[31]</sup>、扩展多尺度有限元方法<sup>[32]</sup>、并行计算等. 多分辨率拓扑优化方法 (Multi-resolution topology optimization, MTOP) 通过将有限元分析网格与离散密度场解耦, 利用粗糙网格完成有限元分析, 精细网格描述设计变量和密度变量空间, 可以显著减少有限元计算量, 并将该方法扩展到自适应网格细化方法<sup>[33]</sup> (Adaptive multireso-

lution topology optimization, AMTOP), 进一步提升计算效率. Park 等<sup>[34]</sup> 将多分辨率拓扑优化方法用于多材料设计, 首先采用多分辨率拓扑优化方法生成具有不同弹性模量的微观结构, 再从微观结构库中选择合适的微观结构替换固体材料, 且随后将该方法应用于 3D 打印骨植入物设计<sup>[35]</sup>. Xu 等<sup>[36]</sup> 提出了一种用于功能梯度结构拓扑优化的等几何分析方法, 并采用多分辨率方法缩减计算规模, 实现高效等几何拓扑优化. 扩展多尺度有限元方法 (Extended multiscale finite element method, EMs-FEM) 规避了均匀化框架中的尺度分离和微观结构周期性假设, 从而无需在微观尺度上精确求解, 而直接在宏观尺度上实现结构力学响应的模拟, 也是一种广受重视的多尺度算法.

面内周期性结构的微观单胞设计需要考虑宏微观耦合分析和位移平衡条件, 致使有限元过程反复调用参与迭代, 从而导致计算量增加, 可求解问题规模受限. 目前的面内周期性微结构设计流程大多为获取密度变量的分布趋势后, 通过后处理重构三维模型, 使优化构型边界清晰化. 而目前大部分研究采用较低分辨率的密度网格进行优化设计, 结构边界清晰度不高, 在模型重构过程中需引入更多的人工交互来清晰化边界, 且重构过程所导致的性能误差难以量化. 因此, 本文将多分辨率拓扑优化方法拓展至面内周期性结构的微结构设计, 基于面内周期性结构的厚板假设, 通过宏微观位移场耦合分析, 提出了一种微观单胞的等效力学性能表征和双尺度拓扑优化方法, 以实现宏观板结构的力学性能最大化, 并借助多分辨率网格划分策略在缩减有限元求解规模的同时获得高分辨率的设计结果, 实现优化问题的高效精确求解. 全文安排如下: 第 2 节基于厚板理论建立面内周期性单胞的双尺度分析和等效表征模型; 第 3 节借助多分辨率网格划分策略定义拓扑优化列示和相应的灵敏度计算方式; 第 4 节通过两类算例分别验证等效性能表征和双尺度优化方法的有效性, 并展示多分辨率方法对缩减计算规模和减少迭代时间的优势; 第 5 节总结全文.

## 1 面内周期性结构等效性能表征

面内周期性结构的承载性能均匀化表征通常基

于 Kirchhoff 薄板理论,而对于面外剪切变形不可忽略的结构,如高超声速飞行器的热防护结构或船舶船壳中的船体侧壁、船底等应用场景中,板厚通常较大且受力工况复杂,需要借助 Mindlin 厚板理论进行宏微观分析。Mindlin 厚板理论是 Kirchhoff 薄板理论的扩展,与 Kirchhoff 薄板理论相比,除了两者适用模型的几何尺寸不同外,更在于厚板理论考虑了面外剪切载荷对整体结构的影响,面外剪切载荷的考虑与否直接影响了等效性能表征的精度及等

效宏观板有限元计算的准确性。由于 Mindlin 厚板理论考虑了面外剪切变形的存在,结构中面法线虽始终保持直线,但不再垂直于中面<sup>[37]</sup>。本节基于 Mindlin 厚板理论对面内周期性结构进行宏微观双尺度位移场与本构关系的耦合分析,并提出了微观周期性边界条件,使微观应变与宏观应变/曲率保持一致、等效均质板的局部应变能密度与微观单胞的平均应变能相同,从而实现微观应力与宏观等效应力/弯矩的耦合映射关系,如图 1 所示。

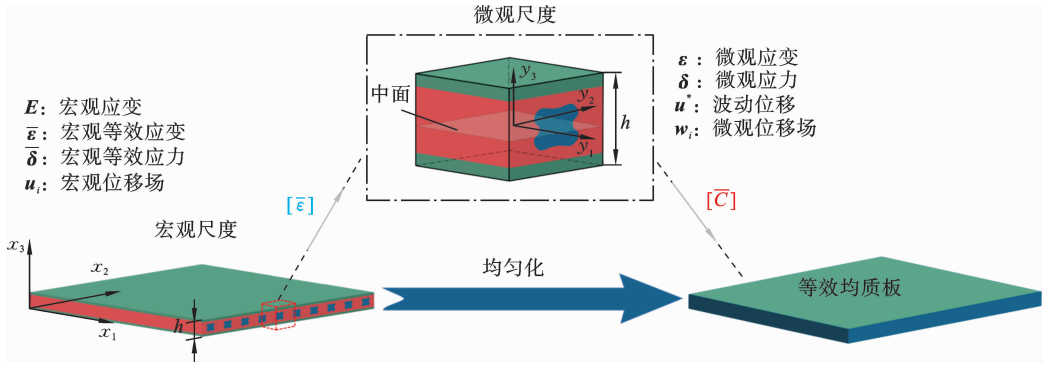


图 1 面内周期性微观单胞均匀化示意图

Fig. 1 Homogenization for composite plate with in-plane periodicity

### 1.1 宏观尺度本构模型

考虑面外剪切变形的宏观尺度位移场如图 2 所示,其解析形式为:

$$\begin{cases} u_1 = u_1^0(x_1, x_2) - x_3 \varphi_1(x_1, x_2) \\ u_2 = u_2^0(x_1, x_2) - x_3 \varphi_2(x_1, x_2) \\ u_3 = u_3^0(x_1, x_2) \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $x_i (i=1 \sim 3)$  为宏观坐标,  $u_i (i=1 \sim 3)$  为宏观板位移,  $u_i^0 (i=1 \sim 3)$  是中面的宏观位移,  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  分别为绕轴  $x_1$  和轴  $x_2$  的角度。

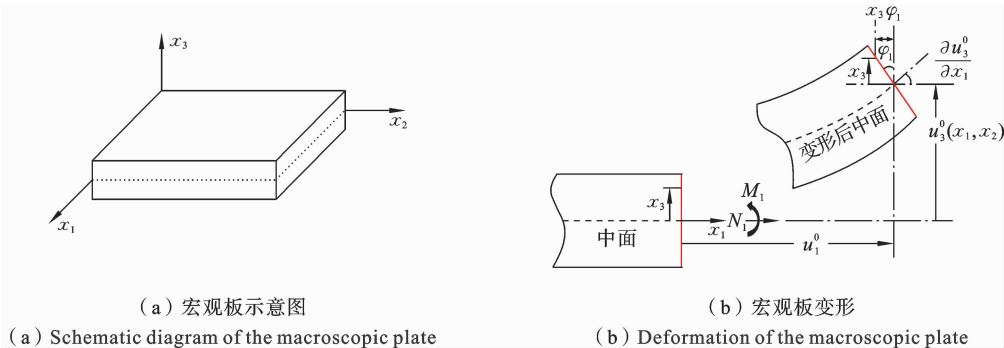


图 2 等效应力/弯矩与宏观板变形示意图

Fig. 2 Resultant stress and moment, and deformation of macroscale plate

宏观板结构的应变关系遵循 Mindlin 板理论,即式(1)各项对相应坐标求偏导,同时由于宏微观尺

度坐标满足尺度分离假设,满足线弹性材料的应变-位移关系,在均匀化框架下,有宏观应变  $E$  为:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= [E_{11}, E_{22}, E_{33}, 2E_{12}, 2E_{23}, 2E_{31}]^T \\ &= \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}, \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right]^T \\ &= [\bar{\epsilon}_1 + x_3 \bar{\epsilon}_4, \bar{\epsilon}_2 + x_3 \bar{\epsilon}_5, 0, \bar{\epsilon}_3 + x_3 \bar{\epsilon}_6, \bar{\epsilon}_7, \bar{\epsilon}_8]^T \quad (2) \end{aligned}$$

式中,  $\bar{\epsilon}_i$  为宏观等效应变, 其中  $\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2$  为面内法向应变,  $\bar{\epsilon}_3$  为面内剪切应变,  $\bar{\epsilon}_4, \bar{\epsilon}_5$  为弯曲曲率,  $\bar{\epsilon}_6$  为扭转曲率,  $\bar{\epsilon}_7, \bar{\epsilon}_8$  为面外剪切应变, 且与平板绕轴角度相关, 即:

$$\begin{aligned} \{\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, \bar{\epsilon}_3, \bar{\epsilon}_4, \bar{\epsilon}_5, \bar{\epsilon}_6, \bar{\epsilon}_7, \bar{\epsilon}_8\} &= \left\{ \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2^0}{\partial x_2}, \frac{\partial u_3^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1}, \right. \\ &\quad \left. -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}, \frac{\partial u_3^0}{\partial x_2} - \varphi_2, \frac{\partial u_3^0}{\partial x_1} - \varphi_1 \right\} \quad (3) \end{aligned}$$

通过求解宏观应力与应变的关系, 可得材料的宏观本构矩阵  $\mathbf{D}_H$ , 用于表征面内周期性单胞的等效力学性能. 结合平面应力假设和经典层合板理论, 微观单胞的本构方程可以写作:

$$[\bar{\sigma}] = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \times \bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{D}_H \times \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (4)$$

其中中,  $\sigma_i (i=1 \sim 8)$  为宏观等效应力, 矩阵为  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}$  均为  $3 \times 3$  矩阵,  $A_{ii}, B_{ii}, D_{ii} (i=1, 2, 6)$  分别用于表征面内拉伸刚度、面内拉伸-弯曲耦合刚度、面内弯曲刚度,  $H_{ii} (i=1, 2)$  为面外横向剪切刚度.

### 1.2 微观尺度本构模型

面内周期性结构在宏观尺度上存在方向  $x_1$  和  $x_2$  的周期性, 微观单胞的坐标形式如图 3 所示.

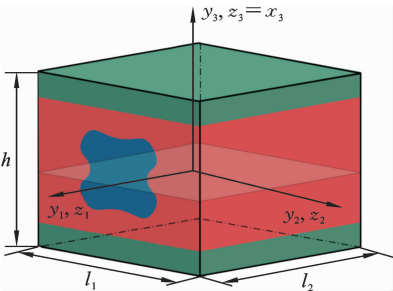


图 3 微观单胞示意图

Fig. 3 Microscopic unit cell of composite plate

微观位移场根据宏观应变和微观坐标的耦合关系, 可得:

$$\{\mathbf{w}_i\} = \bar{\mathbf{y}} \boldsymbol{\epsilon} + \{\mathbf{u}_i^*\} \quad (5)$$

其中中,  $\{\mathbf{w}_i\}$  为微观位移场,  $\{\mathbf{u}_i\} = \{u_1^*, u_2^*, u_3^*\}^T$

是由单胞非均质性引起的位移波动量.  $\bar{\mathbf{y}}$  和  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$  分别定义为:

$$\bar{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} y_1 & 0 & 0 & \frac{y_2}{2} & 0 & y_3 \\ 0 & y_2 & 0 & \frac{y_1}{2} & y_3 & 0 \\ 0 & 0 & y_3 & 0 & y_2 & y_1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\epsilon}} &= \left\{ \bar{\epsilon}_1 + z_3 \bar{\epsilon}_4, \bar{\epsilon}_2 + z_3 \bar{\epsilon}_5, 0, \bar{\epsilon}_3 + z_3 \bar{\epsilon}_6, \bar{\epsilon}_7 - \frac{z_1}{2} \bar{\epsilon}_6, \right. \\ &\quad \left. \bar{\epsilon}_8 - \frac{z_2}{2} \bar{\epsilon}_6 \right\}^T \quad (7) \end{aligned}$$

其中中,  $z_i$  为微观单胞在宏观尺度上的坐标,  $y_i$  为与  $z_i$  在数值上相等的独立变量.

微观应变  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$  由微观位移场求得:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \bar{\mathbf{z}} \cdot \bar{\boldsymbol{\epsilon}} + \partial_y \mathbf{u}^* \quad (8)$$

其中中,  $\bar{\mathbf{z}}$  和  $\partial_y$  分别定义为:

$$\bar{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & z_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{z_1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{z_2}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\partial_y = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial y_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_1} \end{bmatrix}^T \quad (10)$$

因此, 微观单胞的本构方程为:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{C} \cdot (\bar{\mathbf{z}} \cdot \bar{\boldsymbol{\epsilon}} + \partial_y \mathbf{u}^*) \quad (11)$$

其中中,  $\boldsymbol{\sigma}$  为微观应力,  $\mathbf{C}$  为微观单胞的弹性矩阵, 仅与构成微观单胞的材料常数有关.

### 1.3 周期性边界条件

Xia 等<sup>[38,39]</sup> 提出了一种利用位移边界条件将单位测试应变施加到微观单胞边界上的方法, 借助相对面位移差为常数的性质, 消去了由单胞非均质性引起的位移波动量, 实现基于应力应变的等效均匀化求解. 根据方程(8)和方程(9), 以周期性位移边界条件的形式对微观单胞施加 8 组单位测试应变, 施加在边界面  $\partial Y_{[\pm 1]}$  和边界面  $\partial Y_{[\pm 2]}$  上的位移约束分

别为：

$$\partial Y_{[\pm 1]} : \begin{cases} \Delta w_1 = (\bar{\epsilon}_1 + z_3 \bar{\epsilon}_4) l_1 \\ \Delta w_2 = \frac{1}{2} (\bar{\epsilon}_3 + z_3 \bar{\epsilon}_6) l_1 \\ \Delta w_3 = \left( \bar{\epsilon}_8 - \frac{z_2^-}{2} \bar{\epsilon}_6 \right) l_1 \end{cases} \quad (12)$$

$$\partial Y_{[\pm 2]} : \begin{cases} \Delta w_1 = \frac{1}{2} (\bar{\epsilon}_3 + z_3 \bar{\epsilon}_6) l_2 \\ \Delta w_2 = (\bar{\epsilon}_2 + z_3 \bar{\epsilon}_5) l_2 \\ \Delta w_3 = \left( \bar{\epsilon}_7 - \frac{z_1^-}{2} \bar{\epsilon}_6 \right) l_2 \end{cases} \quad (13)$$

以测试应变  $\bar{\epsilon}_4$  为例,该应变状态旨在求解微观单胞抵抗弯曲变形的能力,此时  $\bar{\epsilon}_4 = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = 1$ , 边界的周期性位移边界条件为：

$$\partial Y_{[\pm 1]} : \begin{cases} \Delta w_1 = z_3 l_1 \\ \Delta w_2 = 0 \\ \Delta w_3 = 0 \end{cases}, \quad \partial Y_{[\pm 2]} : \begin{cases} \Delta w_1 = 0 \\ \Delta w_2 = 0 \\ \Delta w_3 = 0 \end{cases} \quad (14)$$

以测试应变  $\bar{\epsilon}_6$  为例,该应变状态旨在求解微观单胞抵抗扭转变形的能力,此时  $\bar{\epsilon}_6 = -\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\right) = 1$ , 边界的周期性位移边界条件为：

$$\partial Y_{[\pm 1]} : \begin{cases} \Delta w_1 = 0 \\ \Delta w_2 = \frac{z_3}{2} l_1 \\ \Delta w_3 = -\frac{z_2}{2} l_1 \end{cases}, \quad \partial Y_{[\pm 2]} : \begin{cases} \Delta w_1 = \frac{z_3}{2} l_2 \\ \Delta w_2 = 0 \\ \Delta w_3 = -\frac{z_1}{2} l_2 \end{cases} \quad (15)$$

在施加面外横向剪切测试应变时,由于宏观广义应变受绕轴角度的影响,导致微观平衡问题的解是不确定的,且位移边界条件无法限制单元的刚体旋转<sup>[40]</sup>. 因此,在求解面外横向剪切刚度时,需要额外施加约束条件以避免刚体旋转：

$$\bar{\epsilon}_7 : \iiint y_3 w_2 dy_1 dy_2 dy_3 = 0 \quad (16)$$

$$\bar{\epsilon}_8 : \iiint y_3 w_1 dy_1 dy_2 dy_3 = 0 \quad (17)$$

对单胞分别施加上述 8 组位移边界条件和相应约束进行有限元分析,通过对有限元结果进行后处理,计算宏观广义等效应力,最后通过求解本构方程,得到微观单胞的等效均质材料的弹性矩阵,用于表征其宏观尺度等效力学性能. 由于面内周期性单胞的体积分可以转化为边界面上的表面积分,宏

观广义等效应力可改写为：

$$\begin{cases} \bar{N}_{\alpha\beta} = \frac{1}{l_\gamma} \int_{\partial Y_{[\alpha]}} t_\beta^{[\alpha]} dS = \frac{\bar{F}_{\alpha\beta}}{l_\gamma} \\ \bar{M}_{\alpha\beta} = \frac{1}{l_\gamma} \int_{\partial Y_{[\alpha]}} z_3 t_\beta^{[\alpha]} dS = \frac{\bar{G}_{\alpha\beta}}{l_\gamma} \\ \bar{V}_{\alpha 3} = \frac{1}{l_\gamma} \int_{\partial Y_{[\alpha]}} t_3^{[\alpha]} dS = \frac{\bar{F}_{\alpha 3}}{l_\gamma} \end{cases} \quad (18)$$

其中,  $t_\beta^{[\alpha]}$  为边界面  $\partial Y_{[\alpha]}$  上微观应力  $\sigma_{\alpha j}$  的  $\beta$  方向分量,即：

$$t_\beta^{[\alpha]} = \sigma_{\alpha j} n_j^{[\alpha]} \quad (\beta = 1, 2; j = 1, 2, 3) \quad (19)$$

其中,  $n_j^{[\alpha]}$  为边界面  $\partial Y_{[\alpha]}$  上的单位基向量.

## 2 多分辨率拓扑优化

基于密度场的拓扑优化框架将密度变量用有限元网格离散,为了得到高分辨率设计和光滑边界需要加密网格,将导致计算量激增,在三维拓扑优化问题中尤为严重. 多分辨率拓扑优化技术的核心思想是对计算效率影响最大的有限元计算过程采取粗离散,达到缩减计算规模、提升计算效率的目的,对设计变量单元和密度变量单元采取细离散,并通过投影法实现耦合和灵敏度分析.

### 2.1 多分辨率网格建模

Nguyen 等<sup>[31]</sup> 提出了多分辨率拓扑优化方法,采用多层级网格划分策略,即利用粗糙网格完成有限元分析,即有限元网格/位移网格;中等网格用于优化迭代计算,即设计变量网格;精细网格用于表示材料密度分布和计算刚度矩阵,即密度变量网格,如图 4 所示. 其中,设计变量网格和密度变量网格均在有限元网格范围内均匀分布. 通过设计变量网格与单元密度网格间的投影映射关系,形成高分辨率的拓扑优化结果,从而有效提升优化计算效率与优化结果的品质<sup>[41]</sup>.

为了精确计算位移网格的单元刚度矩阵,将密度网格中心作为位移网格单元的高斯积分点：

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \left( \sum_{i=1}^{N_{\text{nod}}} N_i(x) \rho_i \right)^p \mathbf{B}^T \mathbf{D}_H \mathbf{B} d\Omega \cong \sum_{g=1}^{N_n} \left( \sum_{i=1}^{N_{\text{nod}}} N_i(x) \rho_i \right)^p \mathbf{K}_g^0 \quad (20)$$

其中,  $N_{\text{nod}}$  为位移单元节点数,  $N_n$  为位移单元高斯

积分点数,在图 4 所示的多分辨率网格划分策略中,

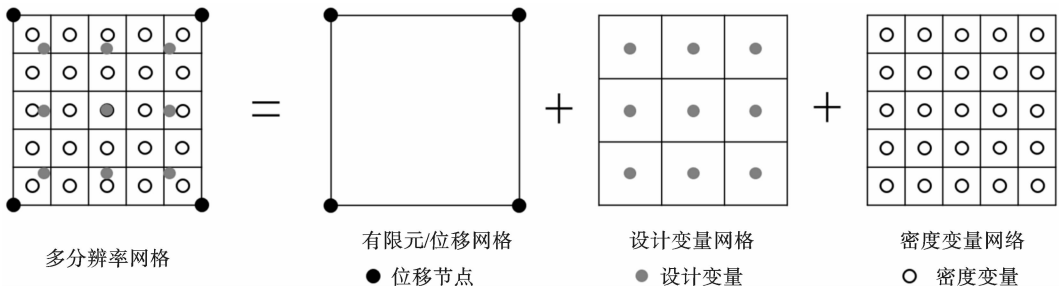


图 4 多分辨率网格划分策略

Fig. 4 Multiresolution meshing strategy

$N_n$  取值为 25.  $\mathbf{B}$  为应变矩阵,  $\mathbf{D}_H$  为均匀化等效计算所得的材料本构矩阵,  $\rho_i$  为单元密度变量,  $p$  为惩罚因子.

为了避免数值不稳定和棋盘效应的产生,采用投影法保证网格独立性<sup>[42]</sup>,使用与设计变量网格相关联的设计变量计算密度网格中的单元密度<sup>[43,44]</sup>:

$$\rho_i = f(d_n) = \frac{\sum_{n \in S_i} d_n \Delta\omega}{\sum_{n \in S_i} \Delta\omega} \quad (21)$$

其中,  $d_n$  为设计变量.  $S_i$  为以密度单元为圆心,过滤半径  $r_{min}$  为半径的圆形成的子域,如图 5 所示,其中,为了实现稳定的计算结果,过滤半径/位移单元尺寸需不小于 0.75,与传统变密度法相比,多分辨率方法对过滤半径的限制更为松弛、对优化细节的处理也更稳定<sup>[31]</sup>.  $\Delta\omega$  为设计变量对应点与密度变

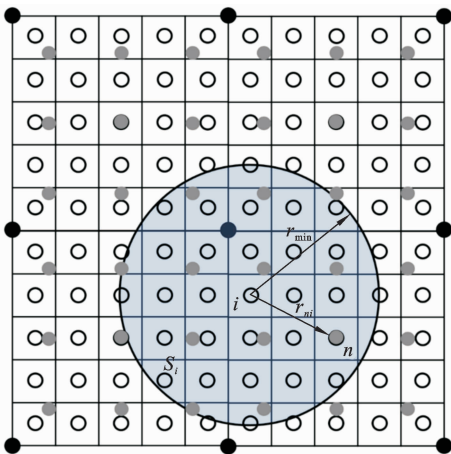


图 5 投影函数示意图

Fig. 5 Projection function

量对应点的距离,即:

$$\Delta\omega = \begin{cases} \frac{r_{min} - r_{ni}}{r_{min}} & (\text{if } r_{ni} \leq r_{min}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (22)$$

## 2.2 拓扑优化模型与灵敏度分析

以宏观结构柔度最小为优化目标和材料体积分数为优化约束,建立面内周期性结构的拓扑优化模型.假设宏观结构由单一类型微观单胞阵列而来,其结构优化模型为:

$$\begin{aligned} \min_d \quad & c(\rho, \mathbf{u}) = \mathbf{f}^T \mathbf{u} \\ \text{s. t.} \quad & \rho = f(\mathbf{d}) \\ & \mathbf{K}(\rho) \mathbf{u} = \mathbf{f} \\ & V(\rho) = \int_{\Omega} \rho dV \leq V_s \end{aligned} \quad (23)$$

其中,  $\mathbf{d}$  为设计变量向量,  $c$  为宏观结构柔顺度,  $\mathbf{f}$  为宏观载荷向量,  $\mathbf{u}$  为宏观结构位移向量,  $V_s$  为体积分数约束.

根据优化列式(23),目标函数对设计变量的灵敏度由伴随法可得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial d_n} &= \frac{\partial (\mathbf{f}^T \mathbf{u} - \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{f}))}{\partial d_n} = \\ & (\mathbf{f}^T - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial d_n} - \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial d_n} \mathbf{u} \end{aligned} \quad (24)$$

令伴随向量  $\boldsymbol{\lambda}$  满足  $\mathbf{f}^T - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K} = 0$ , 结合平衡方程可知,当  $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{u}$  时,消除式中的隐式微分项.在 MTOP 算法框架内,由投影法进一步推导得:

$$\frac{\partial c}{\partial d_n} = \frac{\partial c}{\partial \rho_i} \cdot \frac{\partial \rho_i}{\partial d_n} = -\mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_i} \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \rho_i}{\partial d_n} \quad (25)$$

体积约束对设计变量的灵敏度为:

$$\frac{\partial V}{\partial d_n} = \frac{\partial V}{\partial \rho_i} \cdot \frac{\partial \rho_i}{\partial d_n} = - \frac{\partial \left( \sum_n \rho V_i \right)}{\partial \rho_i} \cdot \frac{\partial \rho_i}{\partial d_n} \quad (26)$$

其中,式(25)和式(26)中单元密度对设计变量的灵敏度由式(21)可知:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial d_n} = \frac{\Delta \omega}{\sum_{n \in S_i} \Delta \omega} \quad (27)$$

### 2.3 算法流程

基于多分辨率网格划分策略,本文发展了一种适用于面内周期性结构宏微观一体化设计方法,其算法流程归纳如下:

- (1) 基于 Mindlin 厚板假设建立多分辨率网格模型,定义优化参数;
- (2) 基于有限元网格施加单位测试应变,求解微观单胞边值条件,得到微观单胞均匀化力学性能;
- (3) 组装宏观板整体刚度矩阵,求解宏观板边值条件,得到宏观板位移场;
- (4) 基于设计变量网格和密度变量网格完成灵敏度分析,更新设计变量;

(5) 重复步骤(2)、(3)、(4),直至优化迭代过程收敛.

## 3 数值算例

为了验证本文所提方法的有效性和优势,本节首先选取经典单胞进行均匀化计算,将等效本构矩阵作为宏观板材料输入商业有限元软件,对比等效模型和精细模型有限元分析结果,以验证等效过程的有效性;随后,基于多分辨率网格划分策略求解平板弯曲问题的最小柔度优化问题,并与基于 SIMP 法的宏微观一体化设计结果和单次迭代时间进行比较.

### 3.1 均匀化性能验证

宏观模型为微观单胞以面内周期性排列而成,考虑两种不同拓扑构型的微观单胞,外围轮廓尺寸均为  $20 \times 20 \times 20$  mm 的正六面体,用于表示材料分布的密度网格也均为  $20 \times 20 \times 20$ ,如图 6 所示.单胞为均质材料,材料属性参数设定为:弹性模量  $E = 5$  GPa,泊松比  $\nu = 0.3$ .

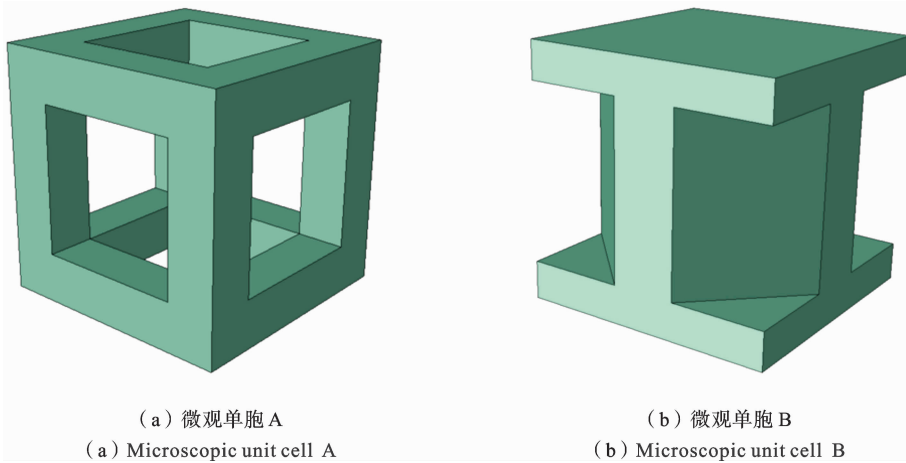


图 6 两种用于验证的微观单胞

Fig. 6 Two unit cell models for verification

单胞 A 为正六面体桁架单胞,单胞外围尺寸  $L_A = 20$  mm,桁架尺寸  $l_A = 4$  mm;单胞 B 为蜂窝板单胞,单胞外围尺寸  $L_B = 20$  mm,上下板厚  $h_B = 3$  mm,蜂窝芯层截面构型及离散建模如图 7 所示.

采用第 2 节提出的等效性能表征平台计算两种微观单胞的等效本构矩阵如表 1 所示,由于两种单胞均为对称结构,不存在由非对称性引起的拉伸-

弯曲耦合刚度,则拉伸-弯曲耦合刚度矩阵  $\mathbf{B}$  为  $\mathbf{0}$  矩阵.分析两种单胞的拉伸刚度矩阵  $\mathbf{A}$ 、弯曲刚度矩阵  $\mathbf{D}$  和面外横向剪切刚度矩阵  $\mathbf{H}$  得:单胞 A 的抗弯能力明显优于抗拉能力和抗扭转能力,表明桁架结构单胞抵抗轴向载荷的能力显著优于其抵抗切向载荷的能力;单胞 B 复杂的内部构型为结构抗拉能力和抗弯能力均带来明显改善,但抵抗面外横向剪

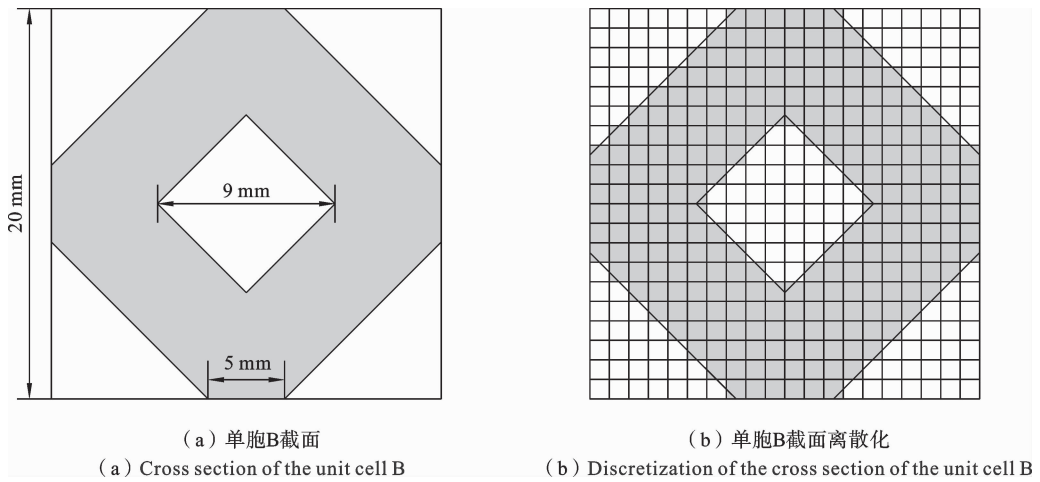


图 7 微观单胞 B 截面构型及离散化

Fig. 7 Configuration and discretization of unit cell model B

表 1 微观单胞等效刚度

Table 1 Stiffnesses of homogeneous unit cells

	拉伸刚度矩阵 <b>A</b> ( $\times 10^6$ N/m)	拉伸-弯曲 耦合刚度矩阵 <b>B</b> ( $\times 10^6$ N/m)	弯曲刚度矩阵 <b>D</b> ( $\times 10^6$ N/m)	面外横向 剪切刚度矩阵 <b>H</b> ( $\times 10^6$ N/m)
单胞 A	$\begin{bmatrix} 7.36 & 1 & 0 \\ 1 & 7.36 & 0 \\ 0 & 0 & 0.87 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 469.69 & 68.33 & 0 \\ 68.33 & 469.69 & 0 \\ 0 & 0 & 101.12 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5.56 & 0 \\ 0 & 5.56 \end{bmatrix}$
单胞 B	$\begin{bmatrix} 22.9 & 8.1 & 0 \\ 8.1 & 22.9 & 0 \\ 0 & 0 & 9.1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1152.9 & 350.2 & 0 \\ 350.2 & 1152.9 & 0 \\ 0 & 0 & 424.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{bmatrix}$

切载荷的能力与单胞 A 相比有所削弱。

将均匀化等效计算得到的本构矩阵作为板壳结构的材料属性输入商业软件 ABAQUS, 考虑如图 8 所示的相同边界条件, 其中均布载荷为  $10 \text{ N/m}^2$ . 对比由微观单胞按  $10 \times 10$  周期性阵列的宏观精细模型和等效均匀化模型的有限元分析结果, 以验证等效均匀化过程的有效性, 有限元分析结果如图 9 所示。

在一端固定, 一端受压工况下, 均匀化计算后的有限元分析结果 U3 方向(即 Z 方向)最大位移与精细模型有限元结果差异均在 5% 以内, 分别为 4.92% 和 1.37%, 位移分布形式相同, 由此可验证等效均匀化计算的有效性和可靠性。

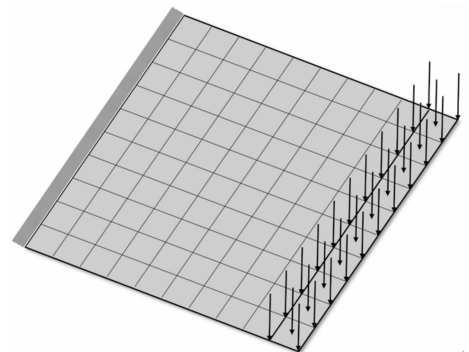


图 8 验证算例模型及边界条件

Fig. 8 Model and boundary conditions of the numerical example for verification

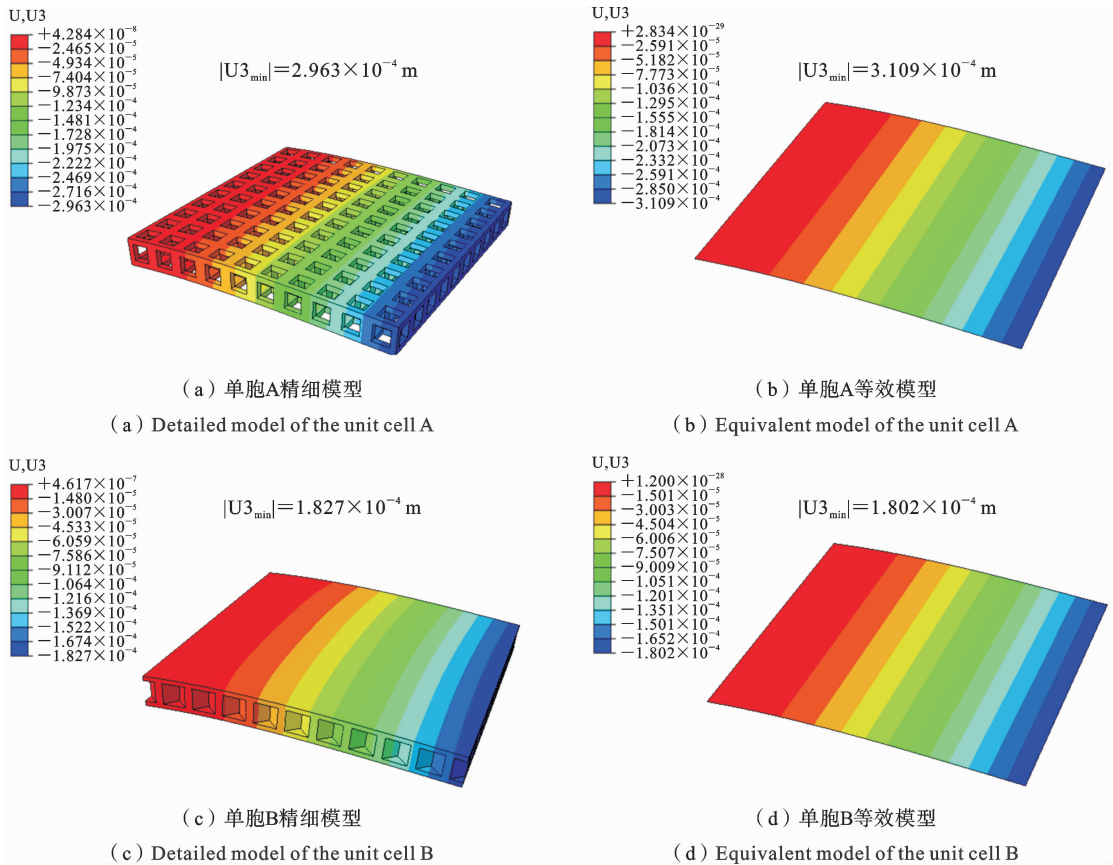


图 9 有限元分析结果对比(U3 方向位移)

Fig. 9 FEA results (U3-axis deformation)

### 3.2 宏观板面外载荷拓扑优化

考虑如图 10(a)所示的宏观板结构的柔顺度

最小化问题,分别采用基于三维周期性的 SIMP 方法、基于面内周期性的 SIMP 方法和基于面内周期

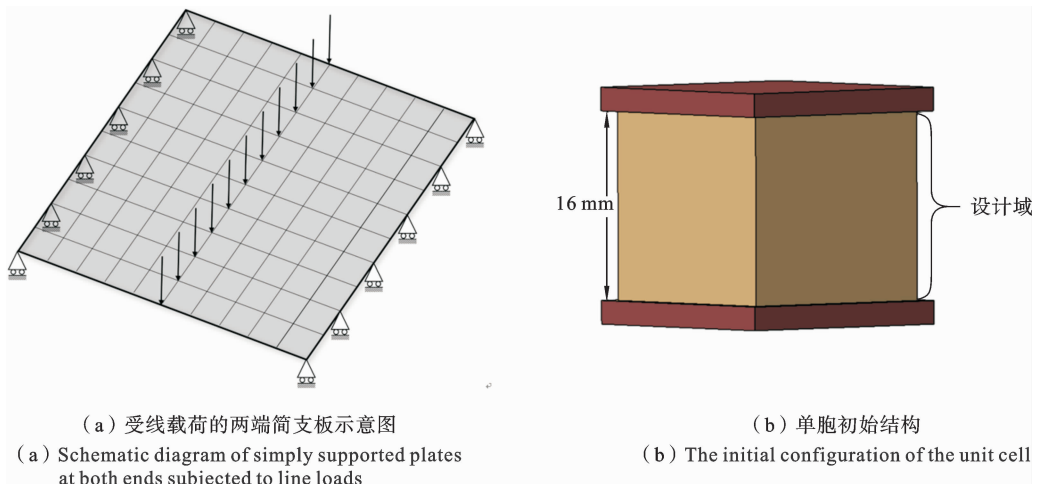


图 10 宏观板面外载荷拓扑优化示意图

Fig. 10 Topology optimization of macroscopic plate under out-of-plane load

性的多分辨率拓扑优化方法,比较三种方法的优化结果、可求解问题规模和平均单次迭代时间,以验证本文所提方法的有效性和高效性.不失一般性,所有几何、材料及载荷参数均采用无量纲形式.其中,宏观板由图 10(b)所示单胞按  $10 \times 10$  周期性阵列所得,两端简支,中线受面外线载荷  $q=1$ ,体积分数约束  $\bar{V}=50\%$ ,材料弹性模量  $E_0=1$ ,  $E_{\min}=10^{-9}$ ,泊松比  $\nu=0.3$ ,惩罚因子  $p=3$ ,最小过滤半径  $r_{\min}=5$ .计算环境均为 Intel(R) Core (TM) i7-7700 3.60 GHz CPU,32.0 GB RAM,

Windows 10 OS, MATLAB R2020b.

分别采用三维周期性 SIMP 方法、面内周期性 SIMP 方法和本文提出的面内周期性多分辨率拓扑优化方法求解优化问题,得到的优化构型如图 11 所示.值得注意的是,三维周期性 SIMP 方法与面内周期性方法由于力学基本假设不同,两者优化构型具有明显差异,而面内周期性 SIMP 方法和本文提出的面内周期性多分辨率拓扑优化方法求解的优化构型相同.

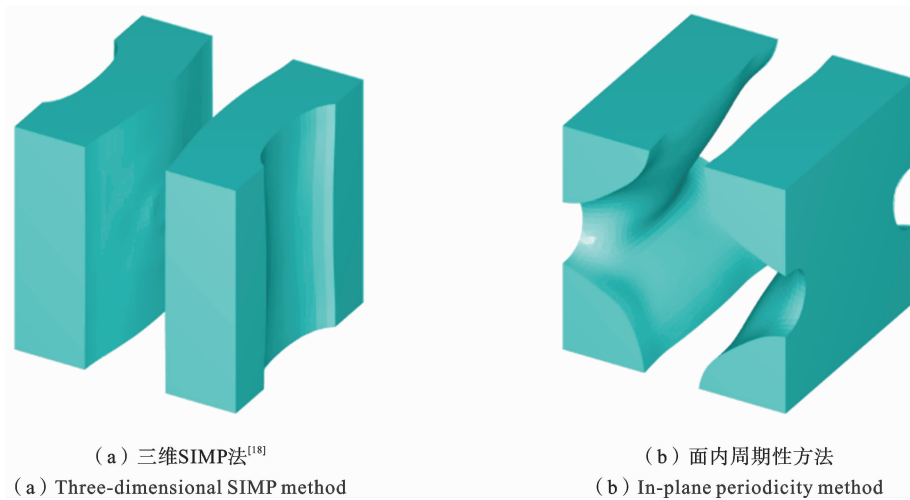


图 11 拓扑优化构型

Fig. 11 Optimal topological features

表 2 主要指标对比

Table 2 Comparison of main parameters

	密度网格	位移网格	迭代次数	平均单次迭代时间(s)
三维 SIMP <sup>[18]</sup>		$30 \times 30 \times 30$	200	72.76
面内 SIMP		$30 \times 30 \times 30$	409	336.55
面内多分辨率	$30 \times 30 \times 30$	$10 \times 10 \times 10$	183	47.55
		$5 \times 5 \times 5$	194	57.34

表 2 分别给出了上述三种方法的求解规模、迭代次数和迭代时间等主要指标.值得注意的是,三维周期性 SIMP 方法与面内周期性方法由于力学基本假设不同,两者优化构型具有明显差异.基于面内周期性 Mindlin 假设的拓扑优化方法由于其复杂的有

限元计算过程导致单次迭代时间明显增加,可求解问题的规模也因此受限.采用不同位移网格规模的多分辨率拓扑优化结果相同,且引入多分辨率网格策略的拓扑优化方法在平均单次迭代时间上具有明显优势,但是并非密度网格和位移网格比例越大,即

位移网格越粗糙,迭代速度越快,原因在于使用过于粗糙的位移网格会导致密度网格耦合过程的循环次数增多,迭代时间增加.以网格规模  $60 \times 60 \times 60$  的密度网格为例,选取不同的位移网格数量,研究密度网格和位移网格的相对比例对迭代时间的影响,平均单次迭代时间与位移网格粗糙程度的关系如图 12 所示.当采用单一分辨率精细网格,即密度网格与位移网格规模比例为 1 时,平均单次迭代时间较长;当采用多分辨率网格策略时,平均单次迭代时间明显缩短,但是当位移网格过于粗糙,即密度网格与位移网格规模比例为 30 时,平均单次迭代时间受循环进程的影响有所增加.

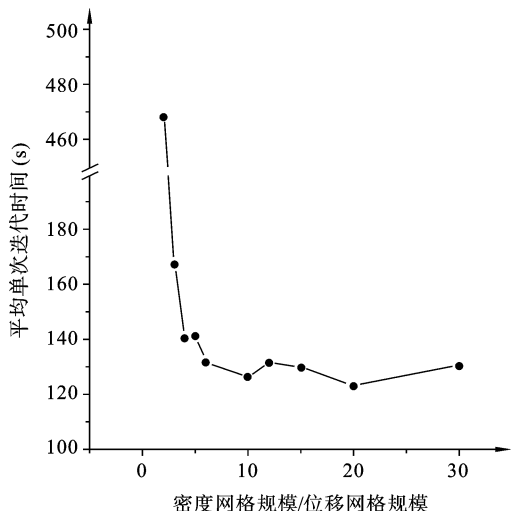


图 12 位移网格粗糙程度对迭代时间的影响

Fig. 12 The influence of roughness of displacement mesh on iteration time

图 13 为微观单胞拓扑优化的迭代过程及其对应的目标值变化情况,位移网格规模为  $10 \times 10 \times 10$ ,目标函数和体积分数在迭代过程中无明显振荡,且在优化末段实现收敛,证明基于面内周期性 Mindlin 假设进行微观单胞优化设计的稳定性.对于两端简支的宏观板,由于仅受单一方向面外载荷,

材料沿平行于载荷面的方向随着迭代进展被逐步去除,最终优化构型在垂直于载荷面方向呈现类似“X”型结构,能够较好抵抗面外剪切载荷.

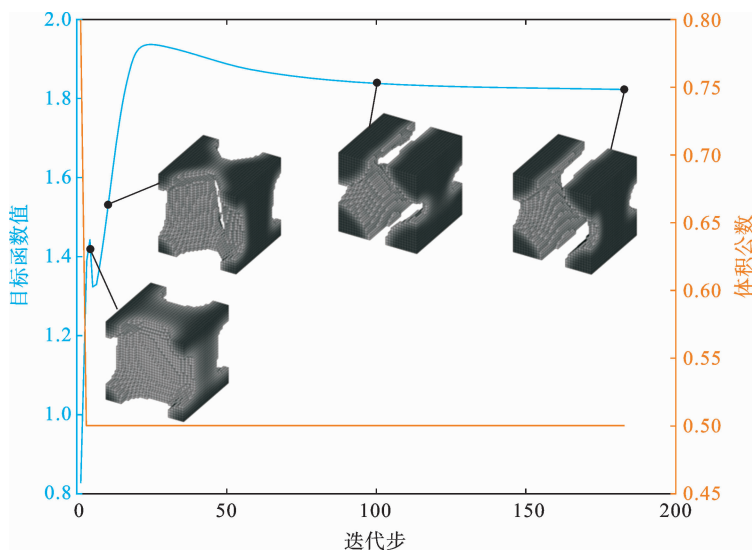


图 13 微观单胞优化迭代

Fig. 13 Iteration history of microscopic unit cell

## 4 结论

本文基于面内周期性 Mindlin 假设和多分辨率拓扑优化方法,发展了一种适用于面内周期性结构宏微观一体化设计的高效拓扑优化方法,通过数值

算例验证了所提方法对可求解问题规模和计算效率的积极影响.与传统三维微结构设计相比,本文所提方法具有理论更贴近实际,均匀化过程概念简明、迭代计算高效等优点.同时,本文所提方法主要关注经典周期点阵结构,对于应用更加广泛的广义周期点阵结构,可以通过引入映射函数进行扩展.后续计划

重构光滑界面网格,通过增材制造完成代表性样件制备,开展力学实验量化验证优化方法性能.此外,基于多分辨率策略提出的拓扑优化平台有望进一步扩展至多相材料拓扑优化设计,通过引入隔热材料,在解决多相材料热应力匹配问题的基础上,实现广义面内周期性结构承载/隔热一体化设计,为厚板零件设计提供有力参考.

### 参考文献

- [1] Lopez C, Burggraeve S, Lietaert P, et al. Model-based, multi-material topology optimization taking into account cost and manufacturability [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2020, 62(1): 1-23.
- [2] 张秋月, 安鲁陵, 岳烜德, 等. 基于遗传算法的飞机复合材料结构装配压紧力大小与布局的优化[J]. *复合材料学报*, 2019, 36(6): 1546-1557. (Zhang Q Y, An L L, Yue X D, et al. Optimization of size and layout of pressing force for composite airframe structure assembly based on genetic algorithm [J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2019, 36(6): 1546-1557. (in Chinese))
- [3] Shi S, Wang Y, Yan L, et al. Coupled ablation and thermal behavior of an all-composite structurally integrated thermal protection system; Fabrication and modeling [J]. *Composite Structures*, 2020, 251: 112623.
- [4] 闫晓磊, 陈佳文, 张树忠, 等. 基于骨架提取的拓扑优化最小尺寸精确控制[J]. *工程力学*, 2021, 38(5): 239-246. (Yan X L, Chen J W, Zhang S Z, et al. Precise control of minimum length scale in topology optimization based on skeleton extraction [J]. *Engineering Mechanics*, 2021, 38(5): 239-246. (in Chinese))
- [5] Bai J T, Zuo W J. Multi-material topology optimization of coated structures using level set method [J]. *Composite Structures*, 2022, 300: 116074.
- [6] Han D, Lee H. Recent advances in multi-material additive manufacturing: Methods and applications [J]. *Current Opinion in Chemical Engineering*, 2020, 28(6): 158-166.
- [7] Bendsoe M P, Kikuchi N. Generating optimal topologies in optimal design using a homogenization method [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering*, 1988, 71(2): 197-224.
- [8] Bendsoe M P, Sigmund O. Material interpolations in topology optimization [J]. *Archive of Applied Mechanics*, 1999, 69: 635-654.
- [9] Sigmund O. A 99 line topology optimization code written in Matlab [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2001, 21: 120-127.
- [10] Xie Y M, Steven G P. A simple evolutionary procedure for structural optimization [J]. *Computers & Structures*, 1993, 49: 885-896.
- [11] Querin O M, Steven G P, Xie Y M. Evolutionary structural optimisation (ESO) using a bidirectional algorithm [J]. *Engineering Computations*, 1998, 15: 1031-1048.
- [12] Wang M Y, Wang X. A level set method for structural topology optimization [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2003, 192(1-2): 227-246.
- [13] Allaire G, Jouve F, Toader A. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method [J]. *Journal of Computational Physics*, 2004, 194(1): 363-393.
- [14] Guo X, Zhang W, Zhong W. Doing topology optimization explicitly and geometrically—a new moving morphable components based framework [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2014, 81(8): 1-12.
- [15] Kato J, Yachi D, Terada K, et al. Topology optimization of micro-structure for composites applying a decoupling multi-scale analysis [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2014, 49(4): 595-608.
- [16] Zhang J, Yanagimoto J. Topology optimization of microlattice dome with enhanced stiffness and energy absorption for additive manufacturing [J]. *Composite Structures*, 2021, 255: 112889.
- [17] Xia L, Breitkopf P. Design of materials using topology optimization and energy-based homogenization approach in Matlab [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2015, 52(6): 1229-1241.
- [18] Gao J, Li H, Gao L, et al. Topological shape optimization of 3D micro-structured materials using energy-based homogenization method [J]. *Advances in En-*

- gineering Software, 2018, 116: 89-102.
- [19] Liu L, Yan J, Cheng G D. Optimum structure with homogeneous optimum truss-like material [J]. Computers & Structures, 2008, 86(13-14): 1417-1425.
- [20] Huang X, Radman A, Xie Y M. Topological design of microstructures of cellular materials for maximum bulk or shear modulus [J]. Computational Materials Science, 2011, 50(6): 1861-1870.
- [21] Huang X, Xie Y M, Jia B, et al. Evolutionary topology optimization of periodic composites for extremal magnetic permeability and electrical permittivity [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2012, 46: 385-398.
- [22] Huang X, Zhou S, Sun G, et al. Topology optimization for microstructures of viscoelastic composite materials [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2015, 283: 503-516.
- [23] Zong H, Liu H, Ma Q, et al. VCUT level set method for topology optimization of functionally graded cellular structures [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2019, 354: 487-505.
- [24] Liu H, Zong H, Shi T, et al. M-VCUT level set method for optimizing cellular structures [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2020, 367: 113154.
- [25] Liu H, Chen L, Shi T, et al. M-VCUT level set method for the layout and shape optimization of stiffeners in plate [J]. Composite Structures, 2022(Aug.): 293.
- [26] Xia L, Breitkopf P. A reduced multiscale model for nonlinear structural topology optimization [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2014, 280: 117-134.
- [27] Terada K, Hirayama N, Yamamoto K, et al. Numerical plate testing for linear two-scale analyses of composite plates with in-plane periodicity [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2016, 105(2): 111-137.
- [28] Nishi S, Terada K, Kato J, et al. Two-scale topology optimization for composite plates with in-plane periodicity [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2018, 113(8): 1164-1188.
- [29] 江旭东, 马佳琪, 熊志, 等. 基于多分辨率-多边形单元建模策略的多材料结构动刚度拓扑优化方法[J]. 工程力学, 2022, 40: 1-14. (Jiang X D, Ma J Q, Xiong Z, et al. Topology optimization of multi-material structures for dynamic stiffness using polygonal multiresolution scheme [J]. Engineering Mechanics, 2022, 40: 1-14. (in Chinese))
- [30] 黄孟成, 霍文栋, 刘畅, 等. 基于模板的子结构多分辨率拓扑优化[J]. 力学进展, 2021, 51(4): 901-909. (Huang M C, Huo W D, Liu C, et al. Substructuring multi-resolution topology optimization with template [J]. Advances in Mechanics, 2021, 51(4): 901-909. (in Chinese))
- [31] Nguyen T H, Paulino G H, Song J, et al. A computational paradigm for multiresolution topology optimization (MTOP) [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2010, 41: 525-539.
- [32] Liu H, Yang D, Wu J, et al. An open-source Matlab implementation for elastic analyses of heterogeneous materials using the extended multiscale finite element method [J]. International Journal for Multiscale Computational Engineering, 2022, 20(1): 19-43.
- [33] Nguyen T H, Paulino G H, Song J, et al. Improving multiresolution topology optimization via multiple discretizations [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2012, 92(6): 507-530.
- [34] Park J, Sutradhar A. A multi-resolution method for 3D multi-material topology optimization [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2015, 285: 571-586.
- [35] Park J, Zobaer T, Sutradhar A. A two-scale multi-resolution topologically optimized multi-material design of 3D printed craniofacial bone implants [J]. Micromachines, 2021, 12(2): 101.
- [36] Xu M, Xia L, Wang S, et al. An isogeometric approach to topology optimization of spatially graded hierarchical structures [J]. Composite Structures, 2019, 225: 111171.
- [37] Mindlin R D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates [J]. Journal of Applied Mechanics, 1951, 18(1): 31-38.
- [38] Xia Z, Zhang, Ellyin F. A unified periodical boundary conditions for representative volume elements of composites and applications [J]. International Journal of Solids and Structures, 2003, 40(8): 1907-1921.

- [39] Xia Z, Zhou C, Yong Q, et al. On selection of repeated unit cell model and application of unified periodic boundary conditions in micro-mechanical analysis of composites [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, 43(2): 266-278.
- [40] Geers M G D, Coenen E W C, Kouznetsova V G. Multi-scale computational homogenization of structured thin sheets [J]. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 2007, 15(4): S393.
- [41] Sanders E D, Pereira A, Aguiló M A, et al. PolyMat: an efficient Matlab code for multi-material topology optimization [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2018, 58: 2727-2759.
- [42] Diaz A, Sigmund O. Checkerboard patterns in layout optimization [J]. *Structural Optimization*, 1995, 10: 40-45.
- [43] Guest J K, Prevost J H, Belytschko T. Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, 61(2): 238-254.
- [44] Almeida S R M, Paulino G H, Silva E C N. A simple and effective inverse projection scheme for void distribution control in topology optimization [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2009, 39: 359-371.

## Multi-resolution Topology Optimization Method for Composite Structures with In-plane Periodicity

Yinkang Zou    Shaohua Li    Wenke Qiu    Liang Xia

(*State Key Laboratory of Digital Manufacturing Equipment and Technology, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, 430074*)

**Abstract** At a microscopic level, composite materials exhibit intricate structural designs, necessitating detailed finite element mesh discretization for their analysis and design, leading to extensive computational demands. While the in-plane periodic structure, a typical composite structure, can sustain various directional forces at a macroscopic level, defining its performance remains challenging and its design and analysis are complex. This paper introduces a method for optimizing the topology of in-plane periodic structures based on thick plate theory and a multi-resolution meshing strategy. Initially, a coarse mesh is used to distinguish between macro and micro configurations, address the micro boundary value problem, and perform a similar analysis of the mechanical characteristics of the irregular single cell; subsequently, the macroscopic boundary value problems are solved using uniform equivalent properties, and a fine mesh is employed to revise the design variables and chart the density variables. It is found that assuming a thick plate that accounts for out-of-plane shear deformation makes the two-scale topology optimization design closer to real load-bearing scenarios. Employing a multi-resolution meshing strategy circumvents the issue of limited solvable problem size caused by excessive finite element computation, while maintaining the resolution of the optimized configuration.

**Key words** in-plane periodic structures, thick plate theory, multi-resolution mesh, two-scale topology optimization