

任意边界下石墨烯增强多孔圆柱壳的振动特性*

徐宏达 王宇** 张颖 贾小羽 李学辉

(辽宁科技大学机械工程与自动化学院, 鞍山, 114051)

摘要 为了研究任意边界石墨烯增强多孔复合材料(GPLRPC)圆柱壳的振动特性,提出了一种以盖根堡多项式作为容许函数的半解析法.基于 Halpin-Tsai 微观力学模型和开胞体理论得到 GPLRPC 圆柱壳的有效材料参数.利用人工弹簧技术模拟了壳体两端的边界条件和壳段之间的连续耦合.然后,基于一阶剪切变形理论,采用 Rayleigh-Ritz 方法推导出壳体结构的运动方程,求得 GPLRPC 圆柱壳的无量纲频率.数值算例验证了该方法的有效性和准确性,并讨论了边界条件、孔隙系数、孔隙类型、石墨烯分布模式、石墨烯质量分数、边界弹簧刚度和几何参数等因素对壳体结构振动特性的影响.结果表明:盖根堡多项式作为容许函数具有良好的收敛性和准确性;边界条件对圆柱壳的频率有不同的影响,GPL-A 分布模式和孔隙类型 II 的刚度增强效果最好;此外,平移弹簧对频率的影响大于旋转弹簧,圆柱壳长径比的影响较大,但径厚比的影响较小.研究结论可为此类结构的工程设计提供理论参考.

关键词 石墨烯增强,多孔复合材料,任意边界,盖根堡多项式,人工弹簧技术

DOI: 10.19636/j.cnki.cjasm42-1250/o3.2023.057

0 引言

将石墨烯片作为纳米填充物添加到泡沫金属中,形成了石墨烯增强多孔复合材料(Graphene Platelet Reinforced Porous Composite, GPLRPC),兼具石墨烯片的优异力学性能和多孔材料的轻质性^[1],因此受到广大学者的关注.圆柱壳应用于实际工程中,例如汽轮机和航空发动机机匣等^[2,3],将 GPLRPC 应用到圆柱壳结构中会有广泛的应用前景,同时近年来,复杂边界下的壳体振动特性是研究热点,因此对任意边界 GPLRPC 圆柱壳的振动特性展开研究具有重要的意义.

目前,大量学者对功能梯度石墨烯增强复合材料板壳结构的振动特性展开了研究,例如 Qin^[4]、Feng^[5]、沈慧申^[6]和徐巍^[7]等.关于 GPLRPC 相关结构的动力学研究,Kitipornchai 等^[8]率先对 GPLRPC 开展了研究,分析了 GPLRPC 梁结构的自由振动和弹性屈曲行为. Yang 等^[9]通过基于一阶剪切

变形理论来考虑横向剪切应变,采用切比雪夫-里兹法研究了 GPLRPC 板结构的屈曲和自由振动行为,并对石墨烯的质量分数、几何参数以及孔隙系数的影响进行了参数分析. Dong 等^[10]采用一阶剪切变形理论,研究了 GPLRPC 旋转圆柱壳的非线性自由振动. Wang 等^[11]考虑了不同的孔隙分布类型和石墨烯分布模式,对石墨烯增强金属泡沫圆柱壳进行了非线性振动分析. 黄小林等^[12]基于 Donnell 经典薄壳理论研究了弹性介质中含内部孔隙的石墨烯增强功能截锥壳的振动特性.

通过以上所述可知,目前对于 GPLRPC 圆柱壳的动力学研究较多,但关于讨论边界条件影响的文献较少;此外,现有研究中采用的 Rayleigh-Ritz 法,将盖根堡多项式作为容许函数的文献较少涉及,因此开展此壳体结构的振动特性研究具有重要意义和应用前景. 本文基于一阶剪切变形理论,利用人工弹簧技术模拟任意边界条件和壳段间的连续条件,将

* 国家自然科学基金项目(51775257,51775258)和辽宁省教育厅基金项目(LJKMZ20220637)资助.

2023-11-04 收到修改稿, 2023-11-21 网络首发.

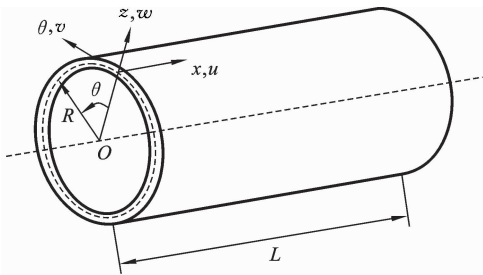
** 通讯作者. E-mail: wangzy801@163.com.

盖根堡多项式作为容许函数求解其圆柱壳的振动频率,验证所提出方法的有效性,讨论边界条件、孔隙系数、孔隙类型、石墨烯分布类型、石墨烯质量分数、边界弹簧刚度和几何参数等参数对壳体结构振动特性的影响。

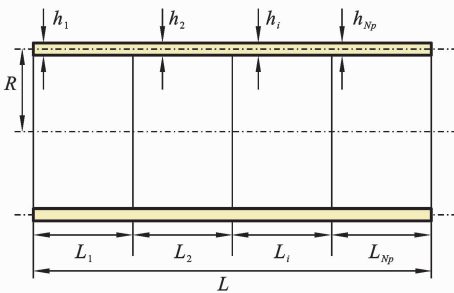
1 理论方法

1.1 GPLRPC 圆柱壳力学模型

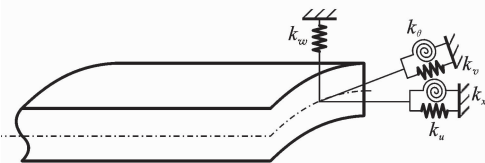
如图 1(a) 建立 GPLRPC 圆柱壳的力学模型,在壳体中面定义柱坐标系 (x, θ, z) , O 为坐标原点,轴向 x 、切向 θ 和径向 z 三个方向的位移分量分别由 u 、 v 和 w 表示,壳体中面半径为 R ,壳体总长度为 L ,如图 1(b) 所示,采用罚参数法^[13],每个壳段长



(a) GPLRPC 圆柱壳模型
(a) GPLRPC cylindrical shell model



(b) GPLRPC 圆柱壳截面图
(b) Cross-section of GPLRPC cylindrical shell



(c) 边界约束弹簧
(c) Boundary constrained springs

图 1 GPLRPC 圆柱壳模型及边界约束弹簧

Fig. 1 GPLRPC stepped cylindrical shells model and boundary constrained spring

度为 $L_1, L_2 \dots, L_{N_p}$, 每个壳段厚度为 $h_1, h_2 \dots, h_{N_p}$. 为了便于文中数学计算和表达,定义无量纲坐标 $\eta = x/L$, 因此 $\partial/\partial x = (1/L)\partial/\partial \eta$.

采用人工弹簧技术,壳体两端将定义五组弹簧,即三组平动弹簧以及两组旋转弹簧,如图 1(c) 所示,壳体左端 ($\eta=0$) 以及右端 ($\eta=1$) 的弹簧刚度系数分别表示为 $k_u^0, k_v^0, k_w^0, k_x^0, k_\theta^0$ 和 $k_u^1, k_v^1, k_w^1, k_x^1, k_\theta^1$, 调整壳体两端的弹簧刚度系数可以得到任意边界条件。

1.2 GPLRPC 圆柱壳的材料属性

沿厚度方向考虑 3 种孔隙分布类型^[1], 类型 I 和类型 II 为对称分布, 类型 III 为均匀分布, 如图 2 所示。

用孔隙系数 e_1, e_2 和 e_3 来表示孔隙的分布情况, 根据开胞体理论^[14], GPLRPC 圆柱壳 3 种孔隙分布类型的有效弹性模量 $E^i(z)$ 、密度 $\rho^i(z)$ 和泊松比 $\mu^i(z)$ 依次表示为:

$$E^i(z) = \begin{cases} E^i \left[1 - e_1 \cos\left(\frac{\pi z}{h_i}\right) \right] & \text{类型 I} \\ E^i \left\{ 1 - e_2 \left[1 - \cos\left(\frac{\pi z}{h_i}\right) \right] \right\} & \text{类型 II} \\ E^i e_3 & \text{类型 III} \end{cases} \quad (1)$$

$$\rho^i(z) = \begin{cases} \rho^i \left[1 - e_{m1} \cos\left(\frac{\pi z}{h_i}\right) \right] & \text{类型 I} \\ \rho^i \left\{ 1 - e_{m2} \left[1 - \cos\left(\frac{\pi z}{h_i}\right) \right] \right\} & \text{类型 II} \\ \rho^i e_{m3} & \text{类型 III} \end{cases} \quad (2)$$

$$\mu^i(z) = \mu^i \quad (3)$$

式中: 上标 i 表示第 i 壳段, E^i, ρ^i 和 μ^i 是无孔隙 GPLRPC 圆柱壳的弹性模量、密度和泊松比; e_1, e_2 和 e_3 分别表示孔隙分布类型 I、类型 II 和类型 III 的孔隙系数; e_{m1}, e_{m2} 和 e_{m3} 分别表示孔隙分布类型 I、类型 II 和类型 III 的密度系数。

基于 Halpin-Tsai 微观力学模型^[15], GPLRPC 圆柱壳的弹性模量 E^i 为:

$$E^i = \frac{3}{8} \left[\frac{1 + \xi_L \eta_L V_{\text{GPL}}^i(z)}{1 - \eta_L V_{\text{GPL}}^i(z)} \right] E_m + \frac{5}{8} \left[\frac{1 + \xi_w \eta_w V_{\text{GPL}}^i(z)}{1 - \eta_w V_{\text{GPL}}^i(z)} \right] E_m \quad (4)$$

式中: E_m 表示基体材料的弹性模量; $V_{\text{GPL}}^i(z)$ 表示石墨烯的体积分; η_L 和 η_w 表示与石墨烯以及基体材

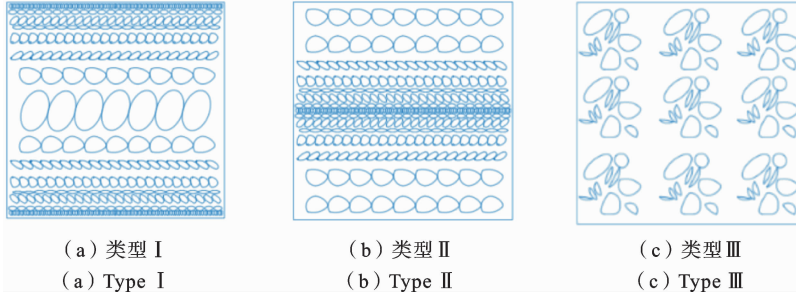


图 2 孔隙分布类型示意图

Fig. 2 Schematic diagram of porosity distribution types

料弹性模量相关的参数; ξ_L 和 ξ_W 表示与石墨烯长度 L_{GPL} 、宽度 w_{GPL} 和厚度 h_{GPL} 相关的参数; 分别表示为:

$$\eta^L = \frac{E_{GPL} - E_m}{E_{GPL} + \xi_L E_m}, \quad \eta^W = \frac{E_{GPL} - E_m}{E_{GPL} + \xi_W E_m} \quad (5)$$

$$\xi_L = 2 \frac{L_{GPL}}{h_{GPL}}, \quad \xi_W = 2 \frac{w_{GPL}}{h_{GPL}} \quad (6)$$

GPLRPC 圆柱壳密度 ρ^i 和泊松比 μ^i 表示为:

$$\rho^i = \rho_m [1 - V_{GPL}^i(z)] + \rho_{GPL} V_{GPL}^i(z) \quad (7)$$

$$\mu^i = \mu_m [1 - V_{GPL}^i(z)] + \mu_{GPL} V_{GPL}^i(z) \quad (8)$$

GPLRPC 圆柱壳的弹性模量和密度的关系如下式表示:

$$\frac{E^i(z)}{E^i} = \left[\frac{\rho^i(z)}{\rho^i} \right]^2 \quad (9)$$

通过式(9)可以建立不同孔隙分布类型的密度系数和孔隙系数之间的关系, 表示为:

$$\begin{cases} 1 - e_{m1} \cos\left(\frac{\pi z}{h_i}\right) = \sqrt{1 - e_1 \cos\left(\frac{\pi z}{h_i}\right)} \\ 1 - e_{m2} \left[1 - \cos\left(\frac{\pi z}{h_i}\right)\right] = \sqrt{1 - e_2 \left[1 - \cos\left(\frac{\pi z}{h_i}\right)\right]} \\ e_{m3} = \sqrt{e_3} \end{cases} \quad (10)$$

通过设置具有不同孔隙系数和石墨烯分布的壳体质量相等, 得出如下式表示:

$$\begin{aligned} & \int_0^{h_i/2} \sqrt{1 - e_1 \cos(\pi z/h_i)} \\ &= \int_0^{h_i/2} \sqrt{1 - e_2 [1 - \cos(\pi z/h_i)]} dz = \int_0^{h_i/2} \sqrt{e_3} dz \end{aligned} \quad (11)$$

此外, 本文还考虑了 3 种石墨烯的分布模式, 如图 3 所示. GPL-A 在壳的外表面和内表面都表现出高含量的石墨烯; GPL-B 在中表面表现出高含量的石墨烯, 并逐渐向两个表面递减; GPL-C 是均匀分布的. 3 种分布模式的石墨烯体积分分数分别为^[11]:

$$V_{GPL}^i(z) = \begin{cases} s_{i1} [1 - \cos(\pi z/h_i)] & \text{GPL-A} \\ s_{i2} \cos(\pi z/h_i) & \text{GPL-B} \\ s_{i3} & \text{GPL-C} \end{cases} \quad (12)$$

式中: s_{i1} , s_{i2} 和 s_{i3} 为石墨烯的体积分分数系数, $i=1, 2, 3$ 分别对应类型 I, 类型 II 和类型 III.

石墨烯的总体积分数为:

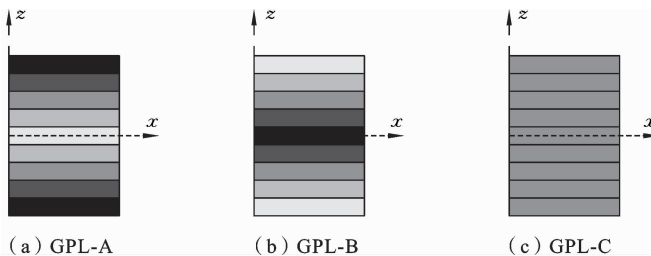


图 3 石墨烯的分布模式

Fig. 3 Distribution patterns of graphene

$$V_{\text{GPL}} = \frac{W_{\text{GPL}}}{W_{\text{GPL}} + (\rho_{\text{GPL}}/\rho_m)(1 - W_{\text{GPL}})} \quad (13)$$

式中: W_{GPL} 表示石墨烯的质量分数.

式(12)中的体积分数系数由下式求得:

$$V_{\text{GPL}} \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \frac{\rho^i(z)}{\rho^i} dz = \begin{cases} s_{i1}^1 \int_{-h_i/2}^{h_i/2} [1 - \cos(\pi z/h_i)] \frac{\rho^i(z)}{\rho^i} dz \\ s_{i2}^1 \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \cos(\pi z/h_i) \frac{\rho^i(z)}{\rho^i} dz \\ s_{i3}^1 \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \frac{\rho^i(z)}{\rho^i} dz \end{cases} \quad (14)$$

式中: e_1, e_2 和 e_3 分别表示孔隙分布类型 I、类型 II 和类型 III 的孔隙系数; e_{m1}, e_{m2} 和 e_{m3} 分别表示孔隙分布类型 I、类型 II 和类型 III 的密度系数.

2 GPLRPC 圆柱壳振动控制方程

基于一阶剪切变形理论, 圆柱壳上任意一点沿着 x, y 和 z 轴方向的位移表示如下:

$$u^i(\eta, \theta, z, t) = u_0^i(\eta, \theta, t) + z\phi_x^i(\eta, \theta, t) \quad (15a)$$

$$v^i(\eta, \theta, z, t) = v_0^i(\eta, \theta, t) + z\phi_\theta^i(\eta, \theta, t) \quad (15b)$$

$$w^i(\eta, \theta, z, t) = w_0^i(\eta, \theta, t) \quad (15c)$$

式中: u_0^i, v_0^i 和 w_0^i 为壳体中面位移, ϕ_x^i 和 ϕ_θ^i 分别表示壳体任意点处横截面绕 θ 轴和 x 轴的转角.

应变分量表示为:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^i \\ \epsilon_{\theta\theta}^i \\ \gamma_{x\theta}^i \\ \gamma_{xz}^i \\ \gamma_{\theta z}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^{0,i} \\ \epsilon_{\theta\theta}^{0,i} \\ \gamma_{x\theta}^{0,i} \\ \gamma_{xz}^{0,i} \\ \gamma_{\theta z}^{0,i} \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \kappa_{xx}^i \\ \kappa_{\theta\theta}^i \\ \kappa_{x\theta}^i \\ \kappa_{xz}^i \\ \kappa_{\theta z}^i \end{pmatrix} \quad (16)$$

式中: $\epsilon_{xx}^{0,i}, \epsilon_{\theta\theta}^{0,i}, \gamma_{x\theta}^{0,i}, \gamma_{xz}^{0,i}, \gamma_{\theta z}^{0,i}$ 表示中面应变分量; $\kappa_{xx}^i, \kappa_{\theta\theta}^i, \kappa_{x\theta}^i, \kappa_{xz}^i, \kappa_{\theta z}^i$ 表示中面曲率, 分别表示为:

$$\begin{pmatrix} N_x^i \\ N_\theta^i \\ N_{x\theta}^i \\ M_x^i \\ M_\theta^i \\ M_{x\theta}^i \\ Q_x^i \\ Q_\theta^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa A_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa A_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^{0,i} \\ \epsilon_{\theta\theta}^{0,i} \\ \gamma_{x\theta}^{0,i} \\ \kappa_{xx}^i \\ \kappa_{\theta\theta}^i \\ \kappa_{x\theta}^i \\ \gamma_{xz}^{0,i} \\ \gamma_{\theta z}^{0,i} \end{pmatrix} \quad (21)$$

式中: A_{ij}^i, B_{ij}^i 和 D_{ij}^i ($i, j=1, 2, 6$) 分别是拉伸刚度、

$$\begin{cases} \epsilon_{xx}^{0,i} = \frac{\partial u_0^i}{L \partial \eta}, & \epsilon_{\theta\theta}^{0,i} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v_0^i}{\partial \theta} + w_0^i \right) \\ \gamma_{x\theta}^{0,i} = \frac{\partial v_0^i}{L \partial \eta} + \frac{\partial u_0^i}{R \partial \theta}, & \gamma_{xz}^{0,i} = \phi_x^i + \frac{\partial w_0^i}{L \partial \eta} \\ \gamma_{\theta z}^{0,i} = \phi_\theta^i + \frac{\partial w_0^i}{R \partial \theta} - \frac{v_0^i}{R}, & \kappa_{xx}^i = \frac{\partial \phi_x^i}{L \partial \eta}, & \kappa_{\theta\theta}^i = \frac{\partial \phi_\theta^i}{R \partial \theta} \\ \kappa_{x\theta}^i = \frac{\partial \phi_x^i}{R \partial \theta} + \frac{\partial \phi_\theta^i}{L \partial \eta}, & \kappa_{xz}^i = 0, & \kappa_{\theta z}^i = 0 \end{cases} \quad (17)$$

利用广义胡克定律可以得到以下关系:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx}^i \\ \sigma_{\theta\theta}^i \\ \tau_{x\theta}^i \\ \tau_{xz}^i \\ \tau_{\theta z}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^i \\ \epsilon_{\theta\theta}^i \\ \gamma_{x\theta}^i \\ \gamma_{xz}^i \\ \gamma_{\theta z}^i \end{pmatrix} \quad (18)$$

式中: $\sigma_{xx}^i, \sigma_{\theta\theta}^i$ 表示壳体内任意一点沿 x, θ 方向上的正应力, $\tau_{x\theta}^i, \tau_{xz}^i, \tau_{\theta z}^i$ 分别表示 $x\theta, xz, \theta z$ 平面内的切应力; Q_{ij} 为包含材料参数的缩减刚度系数, 表达式为:

$$\begin{cases} Q_{11} = \frac{E(z)}{1 - \mu(z)^2} \\ Q_{12} = \frac{\mu(z)E(z)}{1 - \mu(z)^2} \\ Q_{66} = \frac{E(z)}{2[1 + \mu(z)]} \end{cases} \quad (19)$$

沿 x 和 θ 方向中面上的内力、内力矩和横向剪切力由式(20)表示:

$$\{N_x^i, N_\theta^i, N_{x\theta}^i\} = \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \{\sigma_{xx}^i, \sigma_{\theta\theta}^i, \tau_{x\theta}^i\} dz \quad (20a)$$

$$\{M_x^i, M_\theta^i, M_{x\theta}^i\} = \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \{\sigma_{xx}^i, \sigma_{\theta\theta}^i, \tau_{x\theta}^i\} z dz \quad (20b)$$

$$\{Q_x^i, Q_\theta^i\} = \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \kappa \{\tau_{xz}^i, \tau_{\theta z}^i\} dz \quad (20c)$$

式中, κ 为修正系数, 取值 5/6.

沿 x 和 θ 方向中面上的内力、力矩和横向剪切力与曲率的关系如下:

耦合刚度和弯曲刚度, 表示为:

$$\{A_{ij}^i, B_{ij}^i, D_{ij}^i\} = \int_{-h_i/2}^{h_i/2} Q_{ij} \{1, z, z^2\} dz \quad (22)$$

GPLRPC 圆柱壳的第 i 壳段动能 T^i 表示为：

$$T^i = \frac{L}{2} \int_0^{2\pi} \int_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} \left\{ I_0^i \left[\left(\frac{\partial u_0^i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0^i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0^i}{\partial t} \right)^2 \right] + 2I_1^i \left[\frac{\partial u_0^i}{\partial t} \frac{\partial \phi_x^i}{\partial t} + \frac{\partial v_0^i}{\partial t} \frac{\partial \phi_\theta^i}{\partial t} \right] + I_2^i \left[\left(\frac{\partial \phi_x^i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_\theta^i}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} R d\eta d\theta \quad (23)$$

式中：惯性项 I_0^i, I_1^i, I_2^i 分别表示为：

$$(I_0^i, I_1^i, I_2^i) = \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \rho(z) \{1, z, z^2\} dz \quad (24)$$

第 i 壳段应变能 U_ε^i 表示为：

$$U_\varepsilon^i = \frac{L}{2} \int_0^{2\pi} \int_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} \{ N_x^i \varepsilon_{xx}^{0,i} + N_\theta^i \varepsilon_{\theta\theta}^{0,i} + N_{x\theta}^i \gamma_{x\theta}^{0,i} + M_x^i \kappa_{xx}^i + M_\theta^i \kappa_{\theta\theta}^i + M_{x\theta}^i \kappa_{x\theta}^i + Q_x^i \gamma_{xx}^{0,i} + Q_\theta^i \gamma_{\theta\theta}^{0,i} \} R d\eta d\theta \quad (25)$$

边界弹簧所储存的弹性势能 U_b 为：

$$U_b = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{ k_u^0 (u_0^1)^2 + k_v^0 (v_0^1)^2 + k_w^0 (w_0^1)^2 + k_x^0 (\phi_x^1)^2 + k_\theta^0 (\phi_\theta^1)^2 \}_{\eta=0} R d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{ k_u^1 (u_0^{N_p})^2 + k_v^1 (v_0^{N_p})^2 + k_w^1 (w_0^{N_p})^2 + k_x^1 (\phi_x^{N_p})^2 + k_\theta^1 (\phi_\theta^{N_p})^2 \}_{\eta=1} R d\theta \quad (26)$$

相邻壳段之间的附加势能 U_s^i 表示为：

$$U_s^i = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{ k_u^c (u_0^i - u_0^{i+1})^2 + k_v^c \left(\frac{v_0^i - v_0^{i+1}}{v_0^{i+1}} \right)^2 + k_w^c (w_0^i - w_0^{i+1})^2 + k_x^c (\phi_x^i - \phi_x^{i+1})^2 + k_\theta^c (\phi_\theta^i - \phi_\theta^{i+1})^2 \} R d\theta \quad (27)$$

采用统一的盖根堡多项式作为容许函数，将 GPLRPC 圆柱壳的位移场展开为：

$$u_0^i = \sum_{m=1}^M U_m^i C_m^i(\eta) \cos(n\theta) \cos(\omega t) \quad (28a)$$

$$v_0^i = \sum_{m=1}^M V_m^i C_m^i(\eta) \sin(n\theta) \cos(\omega t) \quad (28b)$$

$$w_0^i = \sum_{m=1}^M W_m^i C_m^i(\eta) \cos(n\theta) \cos(\omega t) \quad (28c)$$

$$\phi_x^i = \sum_{m=1}^M \phi_m^i C_m^i(\eta) \cos(n\theta) \cos(\omega t) \quad (28d)$$

$$\phi_\theta^i = \sum_{m=1}^M \Theta_m^i C_m^i(\eta) \sin(n\theta) \cos(\omega t) \quad (28e)$$

式中： $U_m^i, V_m^i, W_m^i, \phi_m^i, \Theta_m^i$ 为未知系数， m 和 n 分别为轴向半波数和周向波数， ω 为固有角频率， M 为最大截断数， C_m^i 为盖根堡多项式，在区间 $[-1, 1]$ 之间

的递推关系^[17] 如式 (29) ($\alpha > -1/2, \alpha \neq 0$)，因为 $\eta \in [0, 1]$ ，使其 t 区间控制在 $[-1, 1]$ ，因此令 $t = 2\eta - 1$ 。定义 $\alpha = 1$ 。

$$C_0^\alpha(t) = 1 \quad (29a)$$

$$C_1^\alpha(t) = 2\alpha t \quad (29b)$$

$$C_i^\alpha(t) = \frac{1}{i} [2t(i + \alpha - 1)C_{i-1}^\alpha(t) - (i + 2\alpha - 2)C_{i-2}^\alpha(t)] \quad (29c)$$

取各能量表达式的最大值，采用 Rayleigh-Ritz 法得到拉格朗日能量方程表示为：

$$\Pi = \sum_{i=1}^{N_p} (T^i - U_\varepsilon^i) - \sum_{i=1}^{N_p-1} U_s^i - U_b \quad (30)$$

式中， N_p 表示壳段数。

对式(30)未知系数 q 求导，由下式表示：

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0, \quad q = \{q^u, q^v, q^w, q^x, q^\theta\} \quad (31)$$

其中，

$$\begin{aligned} q^u &= \{U_0^i, U_1^i, \dots, U_m^i, \dots, U_M^i\} \\ q^v &= \{V_0^i, V_1^i, \dots, V_m^i, \dots, V_M^i\} \\ q^w &= \{W_0^i, W_1^i, \dots, W_m^i, \dots, W_M^i\} \\ q^x &= \{\phi_0^i, \phi_1^i, \dots, \phi_m^i, \dots, \phi_M^i\} \\ q^\theta &= \{\Theta_0^i, \Theta_1^i, \dots, \Theta_m^i, \dots, \Theta_M^i\} \end{aligned} \quad (32)$$

通过式(31)得到 GPLRPC 圆柱壳振动控制方程为：

$$(\mathbf{K}_\varepsilon + \mathbf{K}_b + \mathbf{K}_s - \omega^2 \mathbf{M})q^T = 0 \quad (33)$$

式中： $\mathbf{K}_\varepsilon, \mathbf{K}_b, \mathbf{K}_s$ 和 \mathbf{M} 分别表示为势能矩阵、连接刚度矩阵、边界刚度矩阵和质量矩阵。

3 模型收敛性和有效性验证

3.1 模型参数

首先验证本文方法在求解 GPLRPC 圆柱壳振动特性方面的收敛性和合理性。连接弹簧刚度值取值为 $k_u^c = k_v^c = k_w^c = k_x^c = k_\theta^c = 10^{14}$ ^[16]，石墨烯片的长度 $L_{GPL} = 2.5 \mu\text{m}$ ，宽度 $w_{GPL} = 1.5 \mu\text{m}$ ，厚度 $h_{GPL} = 1.5 \text{nm}$ ，材料参数取值如表 1 所示。

GPLRPC 圆柱壳尺寸为 $L/R = 5, R/h_1 = 50, h_1 = h_2, L_1 = L_2$ 。定义壳体无量纲频率为 $\omega^* = \omega R \sqrt{(1 - \mu_m^2) \rho_m / E_m}$ 。

表 1 圆柱壳的材料属性

Table 1 Material properties of cylindrical shells

参数	石墨烯片	泡沫金属铜
弹性模量(GPa)	1010	130
密度(kg/m ³)	1062.5	8960
泊松比	0.186	0.34

3.2 收敛性和有效性验证

本文引入了人工弹簧技术,可以随意改变边界弹簧的刚度值,图 4 为壳体无量纲频率随边界弹簧

刚度值的变化.从图 4 可以看出,当弹簧刚度值小于 10⁵时,壳体的无量纲频率几乎没有变化,可以定义为自由边界条件;当弹簧刚度值在 10⁵-10¹²之间时,无量纲频率迅速增加,这一段可看作弹性边界条件;当弹簧刚度值高于 10¹²时,无量纲频率几乎没有变化,被认为是固支边界条件.为了在后续研究中更方便地表达,用不同的字母表示不同的边界条件,F 代表自由边界,S 代表简支边界,C 是固支边界,E1、E2 和 E3 是三种不同的弹性边界.不同的边界条件和相应的刚度值如表 2 所示.

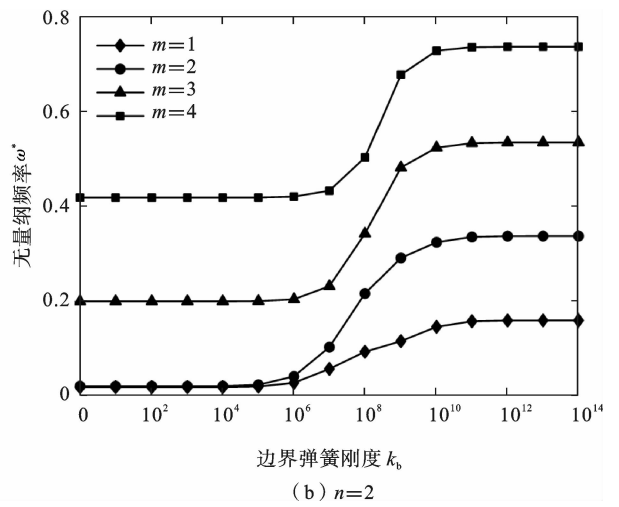
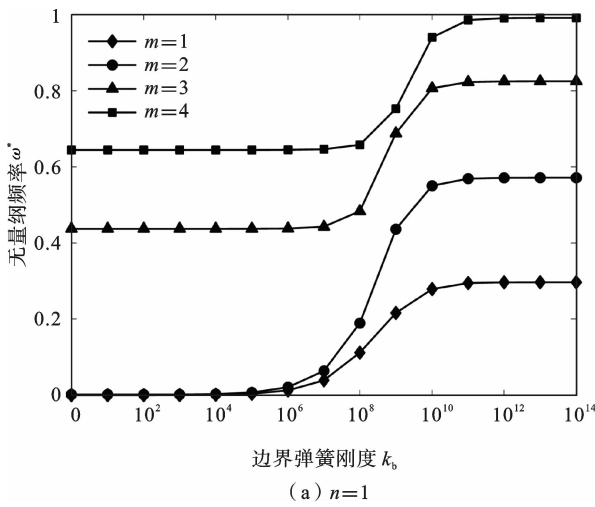


图 4 圆柱壳无量纲频率随边界弹簧刚度值的变化

Fig. 4 Variation of the dimensionless frequency of cylindrical shells with the values of the boundary spring stiffness

表 2 不同边界条件的弹簧刚度值

Table 2 Spring stiffness values with different boundary conditions

边界条件	k_u^0, k_u^1	k_v^0, k_v^1	k_w^0, k_w^1	k_x^0, k_x^1	k_θ^0, k_θ^1
F	0	0	0	0	0
S	0	10 ¹²	10 ¹²	0	0
C	10 ¹²	10 ¹²	10 ¹²	10 ¹²	10 ¹²
E1	10 ⁹	10 ¹²	10 ¹²	10 ¹²	10 ¹²
E2	10 ¹²	10 ⁹	10 ¹²	10 ¹²	10 ¹²
E3	10 ⁹	10 ⁹	10 ¹²	10 ¹²	10 ¹²

采用盖根堡多项式作为容许函数,需要对振型函数展开项截断数进行分析,不同边界下截断数对壳体无量纲频率收敛性的分析如图 5 所示.由图 5

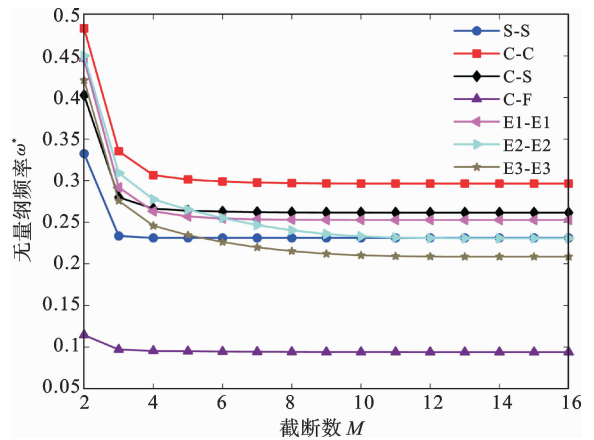


图 5 截断数对圆柱壳振动特性的影响

Fig. 5 Effect of truncation number on vibration characteristics of cylindrical shells

可以看出,当截断数 $M=12$ 时,频率计算结果已经达到收敛,说明盖根堡多项式具有良好的收敛性.文中截断数均取 $M=12$.

本文采用罚参数法分析 GPLRPC 圆柱壳,需要考虑壳段数对收敛性的影响,不同边界下 3 种孔隙分布类型不同壳段数对 GPLRPC 圆柱壳无量纲频率的影响如表 3 所示,可以看出,壳段数在 $N_p=2$ 就具有较好的收敛性,因此下文研究取壳段数 $N_p=2$.

表 3 壳段数对圆柱壳振动特性的影响

Table 3 Effect of the number of shell segments on the vibration characteristics of cylindrical shells

孔隙分布 类型	壳段数 N_p				
	2	3	4	5	6
类型 I	0.2965	0.2965	0.2965	0.2965	0.2965
类型 II	0.2967	0.2967	0.2967	0.2967	0.2967
类型 III	0.2964	0.2964	0.2964	0.2964	0.2964

为了验证本文方法的有效性,对 S-S 边界条件下 GPLRPC 圆柱壳的文献[1]进行验证,其中 $h_1=h_2$, $(m,n)=(1,1)$,通过文献[1]的验证如表 4 所示,材料参数如表 1 所示.可以发现,分析结果与文献结果最大误差为 0.32%,具有良好的一致性,适于分析 GPLRPC 圆柱壳的振动特性.

表 5 GPLRPC 圆柱壳固有频率有限元对比

Table 5 Comparison of natural frequency finite elements of GPLRPC cylindrical shells

边界条件	(m,n)	固有频率(Hz)		误差(%)
		有限元法	本文方法	
S-S	(1,3)	48.90	47.83	2.19
	(1,2)	63.20	62.37	1.31
	(1,4)	72.41	71.70	0.98
	(2,4)	101.87	99.86	1.97
C-C	(1,3)	69.10	69.04	0.09
	(1,4)	78.78	78.76	0.03
	(1,2)	102.44	102.30	0.14
	(1,5)	114.37	114.28	0.08

表 4 GPLRPC 圆柱壳无量纲频率对比

Table 4 Dimensionless frequency comparison of GPLRPC cylindrical shells

孔隙分布类型	e_1	文献[1]	本文	误差(%)
类型 I	0.2	0.2272	0.2273	0.04
	0.4	0.2189	0.2190	0.05
	0.6	0.2099	0.2100	0.05
类型 II	0.2	0.2274	0.2276	0.09
	0.4	0.2198	0.2205	0.32
	0.6	—	—	—
类型 III	0.2	0.2271	0.2272	0.04
	0.4	0.2180	0.2183	0.14
	0.6	0.2074	0.2077	0.14

对于 GPLRPC 圆柱壳,对 4 种经典边界下的前 4 阶固有频率和有限元法进行验证,如表 5 所示.从中看出,两者最大误差为 2.19%,误差在合理范围内,说明此方法适合 GPLRPC 圆柱壳的振动特性分析.为了更加清晰地反映 GPLRPC 圆柱壳的振动特性,取 C-C 边界下的前 3 阶振型图如图 6 所示,可以发现,振型图以周向模态振型变化为主,可以清晰地看出前三阶的周向波数分别为 3、4 和 2.

边界条件	(m, n)	固有频率(Hz)		误差(%)
		有限元法	本文方法	
C-S	(1,3)	58.10	57.43	1.15
	(1,4)	75.08	74.58	0.67
	(1,2)	82.96	82.46	0.60
	(2,4)	109.35	108.29	0.97
C-F	(1,2)	26.00	26.03	0.11
	(1,3)	37.33	37.37	0.12
	(1,1)	60.61	60.54	0.12
	(1,4)	68.31	68.30	0.01

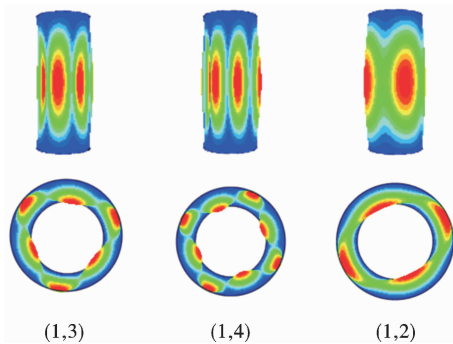


图 6 C-C 边界下的前 3 阶振型

Fig. 6 The first third-order mode shapes under C-C boundary

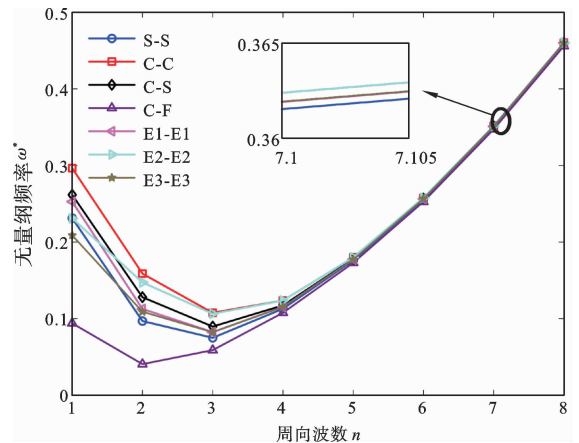


图 7 不同边界条件 GPLRPC 圆柱壳频率随周向波数的变化

Fig. 7 Variation of GPLRPC cylindrical shell frequency with circumferential wave number under different boundary conditions

4 数值结果与讨论

4.1 边界条件的影响

不同边界条件下 GPLRPC 圆柱壳频率随周向波数的变化如图 7 所示. 可以看出, 7 种边界条件都随着周向波数的增大呈现先减小后增大的趋势, 表明 $m=1, n=1$ 不是所有模态振型中频率最小的, 最低频率集中在 $n=2$ 或 $n=3$ 时; 随着周向波数的增大, 不同边界下的壳体频率有逐渐接近的趋势, 说明边界条件对壳体频率的影响逐渐减小. 由图 7 还可以发现, 当 $n \leq 3$ 时, C-C 边界下的壳体频率最高, 而当 $n > 3$ 时, 从局部放大图中可以看出, E2-E2 弹性边界具有最大的壳体频率.

4.2 孔隙系数和分布模式的影响

给定石墨烯分布模式为 GPL-C, 不同边界条件下各孔隙分布类型和不同孔隙系数的壳体无量纲频率如表 6 所示. 可以发现, 不同边界条件下的壳体频率有所不同, C-C 边界条件下频率最大; 3 种孔隙分布类型中, 类型 II 的频率最大, 具有最大结构刚度; 同时壳体频率随着孔隙系数的增大而减小, 这是由于较高的孔隙系数表示壳体中有较密集和较大的孔隙, 削弱了圆柱壳结构的刚度.

表 6 不同边界条件下 GPLRPC 圆柱壳的无量纲频率

Table 6 Dimensionless frequencies of GPLRPC cylindrical shells with different boundary conditions

边界条件	孔隙分布类型	ω^*		
		$e_1=0.1$	$e_1=0.3$	$e_1=0.5$
S-S	类型 I	0.2312	0.2233	0.2146
	类型 II	0.2313	0.2240	0.2175
	类型 III	0.2312	0.2229	0.2133
C-C	类型 I	0.2965	0.2869	0.2762
	类型 II	0.2965	0.2876	0.2794
	类型 III	0.2965	0.2865	0.2747
C-S	类型 I	0.2617	0.2530	0.2434
	类型 II	0.2617	0.2537	0.2464
	类型 III	0.2616	0.2526	0.2420
C-F	类型 I	0.0939	0.0908	0.0873
	类型 II	0.0939	0.0910	0.0884
	类型 III	0.0939	0.0906	0.0867
E1-E1	类型 I	0.2528	0.2464	0.2394
	类型 II	0.2528	0.2470	0.2420
	类型 III	0.2527	0.2460	0.2382
E2-E2	类型 I	0.2307	0.2279	0.2247
	类型 II	0.2304	0.2272	0.2247
	类型 III	0.2307	0.2274	0.2233
E3-E3	类型 I	0.2084	0.2060	0.2039
	类型 II	0.2085	0.2059	0.2041
	类型 III	0.2084	0.2058	0.2027

给定孔隙分布类型为类型 I, C-C 边界下 3 种石墨烯分布类型下壳体频率随孔隙系数的变化如图 8 所示, 由图 8 看出, GPL-A 分布模式下壳体频率最高, 具有最佳的刚度增强效果, 其次为 GPL-C、GPL-B 分布模式, 造成 3 种不同石墨烯分布模式壳体频率产生差异的主要原因是石墨烯片的弹性模量不同造成的. 工程中可以选取外壁和内壁石墨烯含量多的圆柱壳作为最佳刚度增强效果的结构.

4.3 石墨烯质量分数的影响

C-C 边界条件下石墨烯的质量分数对壳体频率的影响如图 9 所示, 频率随着石墨烯质量分数的增大而增大, 当石墨烯质量分数为 1% 时频率最大, 说明石墨烯对壳体结构的刚度具有明显的增强效果. 这是因为石墨烯质量分数的增大导致 GPLRPC 弹性模量的增大, 从而增加了壳体结构的固有频率和刚度.

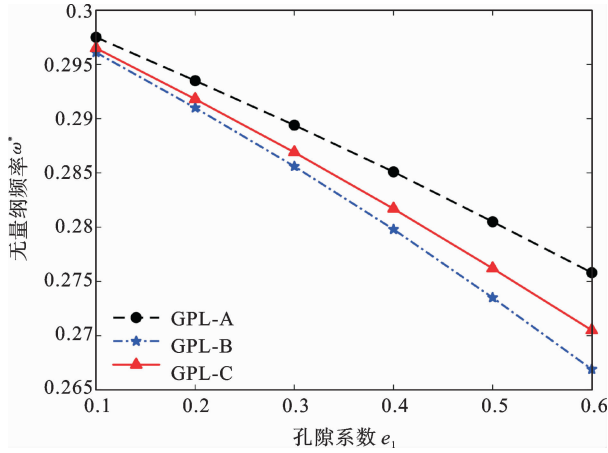


图 8 不同石墨烯分布类型对圆柱壳振动特性的影响

Fig. 8 Effect of different graphene distributions on the vibration characteristics of cylindrical shells

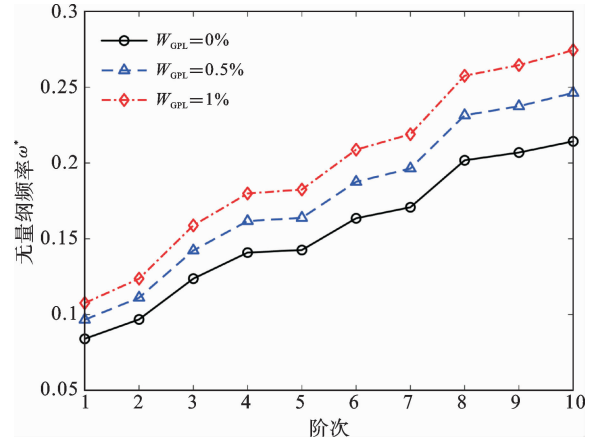


图 9 石墨烯质量分数对圆柱壳振动特性的影响

Fig. 9 Effect of graphene mass fraction on the vibration characteristics of cylindrical shell

4.4 边界弹簧刚度的影响

为了研究边界弹簧刚度值的影响,设置平动和旋转弹簧刚度值从 0 增加到 10^{14} ,当平移或旋转弹簧刚度值增加时,另一组弹簧的刚度保持不变,计算各个刚度值的 GPLRPC 圆柱壳无量纲频率如图 10

所示.从图 10 看出,频率变化经历三个阶段,在开始阶段,频率保持不变且频率较低;第二阶段频率明显增加;最后阶段,频率再次保持稳定不变.此外还可以发现,平动弹簧对频率的影响较大,旋转弹簧对频率的影响较小.

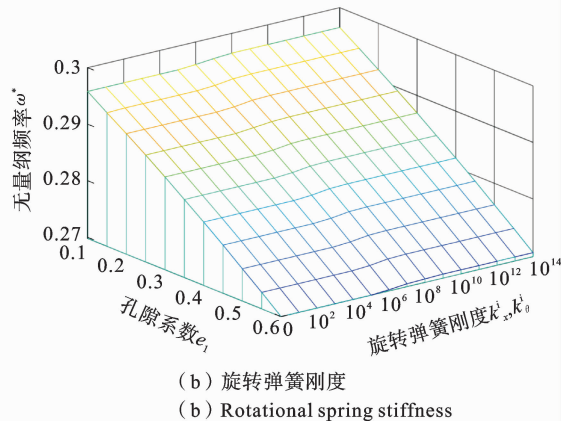
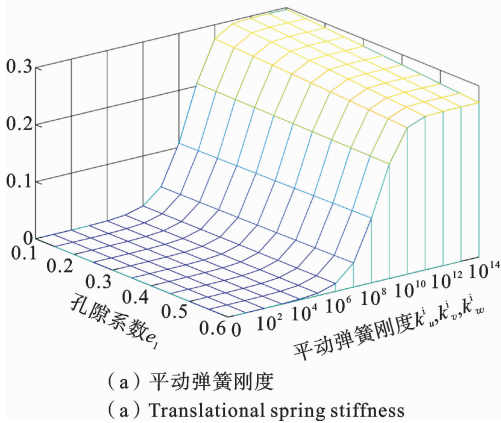


图 10 边界弹簧刚度值对 GPLRPC 阶梯圆柱壳无量纲频率的影响

Fig. 10 Effect of boundary spring stiffness values on the dimensionless frequency of GPLRPC cylindrical shell

4.5 几何参数的影响

图 11 为 C-C 边界条件下圆柱壳几何参数对壳体振动特性的影响.由图 11 可知,随着圆柱壳长径比的增大,壳体频率降低,长径比对圆柱壳的振动特性具有较大影响;径厚比在长径比 $L/R \leq 2$ 时对壳体频率有所影响,但当长径比 $L/R > 2$,径厚比对圆

柱壳振动特性影响较小.

5 结论

基于开胞体理论和一阶剪切变形壳理论,以 GPLRPC 圆柱壳为研究对象,提出了一种以盖根堡

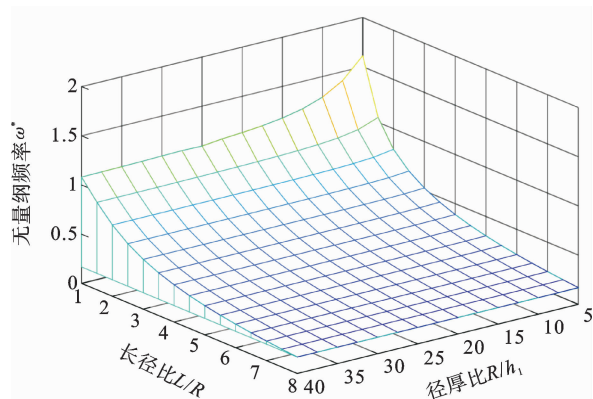


图 11 圆柱壳几何参数对圆柱壳振动特性的影响

Fig. 11 Effect of cylindrical shell geometric parameters on the vibration characteristics of cylindrical shells

多项式为容许函数的半解析法,该方法具有良好的收敛性和准确性,通过确定不同边界下的边界弹簧刚度值,从而得到任意边界下的壳体频率,主要结论如下:

(1) 不同边界条件下壳体频率都随着周向波数的增大呈现先减小后增大的趋势,且随着周向波数的增大频率有逐渐接近的趋势;不同边界条件下的 GPLRPC 圆柱壳的频率有所不同,C-C 边界条件下频率最大;GPL-A 分布模式和孔隙分布类型 II 具有最佳的刚度增强效果。

(2) 孔隙系数对壳体频率的影响显著,孔隙系数越大,频率越小;石墨烯质量分数越大,频率越大,微量的石墨烯能对壳体刚度具有较大的增强效果。

(3) 边界弹簧刚度对壳体频率具有明显影响,平动弹簧对频率的影响较大,旋转弹簧对频率的影响较小。

(4) 圆柱壳频率随着长径比的增大而减小,而径厚比对圆柱壳振动特性的整体影响较小. 本文研究可提供数据支撑和理论参考,工程中对此类结构可进行主动设计。

参考文献

[1] Dong Y H, Li Y H, Chen D, Yang J. Vibration characteristics of functionally graded graphene reinforced porous nanocomposite cylindrical shells with spinning motion [J]. Composites Part B: Engineer-

ing, 2018, 145: 1-13.

- [2] 王宇, 谷月, 李晖, 韩冰. 高速旋转薄壁圆柱壳的行波共振特性研究[J]. 振动与冲击, 2016, 35(05): 222-227. (Wang Y, Gu Y, Li H, Han B. Travelling wave resonance characteristics of a high-speed rotating thin cylindrical shell [J]. Journal of Vibration and Shock, 2016, 35(05): 222-227. (in Chinese))
- [3] 王延庆, 郭星辉, 常海红, 巴颖. 旋转薄壁圆柱壳振型进动的非线性振动特性[J]. 固体力学学报, 2009, 30(03): 267-279. (Wang Y Q, Guo X H, Chang H H, Ba Y. Nonlinear vibration characteristics of rotating thin-walled circular cylindrical shell with precession of vibration mode [J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2009, 30(03): 267-279. (in Chinese))
- [4] Qin Z Y, Safaei B, Pang X J, Chu F L. Traveling wave analysis of rotating functionally graded graphene platelet reinforced nanocomposite cylindrical shells with general boundary conditions [J]. Results in Physics, 2019, 15: 102752.
- [5] Feng C, Kitipornchai S, Yang J. Nonlinear bending of polymer nanocomposite beams reinforced with non-uniformly distributed graphene platelets (GPLs) [J]. Compos B Eng, 2017, 110: 132-40.
- [6] Shen H S, Xiang Y, Fan Y, Hui D. Nonlinear vibration of functionally graded graphene-reinforced composite laminated cylindrical panels resting on elastic foundations in thermal environments [J]. Composites Part B Engineering, 2018, 136: 177-86.
- [7] 徐巍, 王立峰, 蒋经农. 基于应变梯度有限元的单层石墨烯振动研究[J]. 固体力学学报, 2014, 35(05): 441-450. (Xu W, Wang L F, Jiang J N. Finite element analysis of strain gradient on the vibration of single-layered graphene sheets [J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2014, 35(05): 441-450. (in Chinese))
- [8] Kitipornchai S, Chen D, Yang J. Free vibration and elastic buckling of functionally graded porous beams reinforced by graphene platelets [J]. Materials & Design, 2017, 116: 656-665.
- [9] Yang J, Chen D, Kitipornchai S. Buckling and free vibration analyses of functionally graded graphene reinforced porous nanocomposite plates based on Chebyshev-Ritz method [J]. Composite Structures, 2018,

- 193: 281-294.
- [10] Dong Y H, Zhu B, Wang Y, Li Y H, Yang J. Non-linear free vibration of graded graphene reinforced cylindrical shells: Effects of spinning motion and axial load [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2018, 437: 79-96.
- [11] Wang Y Q, Ye C, Zu J W. Nonlinear vibration of metal foam cylindrical shells reinforced with graphene platelets [J]. *Aerospace Science and Technology*, 2019, 85: 359-370.
- [12] 黄小林, 李粮杰, 张燕宁, 郝稀奇. 弹性介质中多孔石墨烯增强复合材料截锥壳的振动[J]. *河南科技大学学报(自然科学版)*, 2023, 44(02): 8-16+24+117+5. (Huang X L, Li L J, Zhang Y N, Hao X Q. Vibration of graphene reinforced porous truncated conical composite shells in elastic medium [J]. *Journal of Henan University of Science and Technology (Natural Science)*, 2023, 44(02): 8-16+24+117+5. (in Chinese))
- [13] 李海超, 庞福振, 李玉慧, 缪旭弘. 复杂边界条件圆柱壳自由振动特性分析[J]. *振动工程学报*, 2020, 33(01): 56-63. (Li H C, Pang F Z, Li Y H, Miao X H. Free vibration characteristics analysis of circular cylindrical shell under complex boundary conditions [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2020, 33(01): 56-63. (in Chinese))
- [14] Roberts A P, Garboczi E J. Elastic moduli of model random three-dimensional closed-cell cellular solids [J]. *Acta Materialia*, 2001, 49(2): 189-197.
- [15] Rafiee M A, Rafiee J, Wang Z, Song H, Yu Z Z, Koratkar N. Enhanced mechanical properties of nanocomposites at low graphene content [J]. *ACS nano*, 2009, 12: 3.
- [16] Guo C, Liu T, Bin Q, Wang Q S, Wang A. Free vibration analysis of coupled structures of laminated composite conical, cylindrical and spherical shells based on the spectral-Tchebychev technique [J]. *Composite Structures*, 2022, 281: 114965-.
- [17] Khan S, Al-Gonah A A, Yasmin G. Generalized and mixed type Gegenbauer polynomials [J]. *Journal of Mathematical Analysis & Applications*, 2012, 390(1): 197-207.

Vibration Characteristics of Graphene-reinforced Porous Cylindrical Shells with Arbitrary Boundary Conditions

Hongda Xu Yu Wang Ying Zhang Xiaoyu Jia Xuehui Li

(School of Mechanical Engineering and Automation, University of Science and Technology Liaoning, Anshan, 114051)

Abstract To investigate the vibration characteristics of graphene-platelet-reinforced porous composite (GPLRPC) cylindrical shells under arbitrary boundary conditions, a semi-analytical method using Gegenbauer polynomials as admissible functions is proposed in this paper. First, the effective material properties of the GPLRPC cylindrical shell are derived based on the Halpin-Tsai micromechanical model and open-cell body theory. The artificial spring technique is utilized to simulate the boundary conditions at both ends of the shell and continuous coupling conditions between shell segments. Then, based on the first-order shear deformation shell theory, the motion equations of the structure are derived and its dimensionless frequencies are obtained with the Rayleigh-Ritz method. Numerical calculations are performed to analyze the effects of boundary conditions, porosity coefficients, porosity types, graphene distribution patterns, graphene mass fractions, boundary spring stiffness, and geometric parameters on the vibration characteristics of the shell structure. The results show that Gegenbauer polynomials have excellent convergence and accuracy as admissible functions. It is also found that boundary conditions have different effects on the frequency of cylindrical shells, and the GPL-A distribution pattern and Type-II pore distribution exhibit the best stiffness enhancement effect. Additionally, it is observed that the influence of translational springs on frequency is greater than rotational springs, and the effect of cylindrical shell length-to-diameter ratio is greater, but the effect of diameter-to-thickness ratio is less. Overall, applying graphene to cylindrical shells has a wide range of applications, and the research results can provide data support and theoretical reference for the engineering design.

Key words graphene-reinforced, porous composites, arbitrary boundary conditions, Gegenbauer polynomial, artificial spring technology