

# 含唇口次生两不对称裂纹的 一维六方压电准晶体的反平面剪切问题\*

郭怀民<sup>1\*\*</sup> 赵国忠<sup>1</sup> 刘官厅<sup>2</sup> 姜丽娟<sup>1</sup>

(<sup>1</sup> 包头师范学院数学科学学院, 包头, 014030)(<sup>2</sup> 内蒙古师范大学数学科学学院, 呼和浩特, 010022)

**摘要** 利用复变函数法和 Stroh 算法研究了反平面载荷作用下一维六方准晶压电材料中唇口次生裂纹的断裂问题, 首次构造了唇口次生两不对称裂纹的缺陷力学模型, 推出了含唇口次生两不对称裂纹的无限大区域到单位圆外部区域的保角变换公式, 得到了裂尖处的场强度因子和能量释放率的解析表达式. 数值算例揭示了缺陷尺寸, 特别是唇口高度和裂纹长度对场强度因子和能量释放率的影响. 结果表明: 增加裂纹两边的长度会促进裂纹的扩展, 增加唇口的高度, 会抑制裂纹的扩展. 最后, 在给定条件下, 这些解析结果可以简化为其它的缺陷模型的解, 比如唇口次生单裂纹和唇口次生两对称裂纹的解, 同时还可以退化为经典的 Griffith 裂纹和唇口无次生裂纹的解, 以上结果与理论分析的结论是一致的.

**关键词** 准晶压电, 唇口次生裂纹, 场强度因子, 能量释放率, 解析解

**DOI:** 10.19636/j.cnki.cjasm42-1250/o3.2023.051

## 0 引言

准晶是介于晶体和非晶体的新型凝聚态物质. 谢赫特曼由于在准晶研究方面的突破性贡献<sup>[1]</sup> 而于 2011 年获得诺贝尔化学奖, 准晶具有压电效应、高强度、耐磨性、表面不沾性、耐氧化和腐蚀、不易与其他物质发生反应等特殊性质<sup>[2-4]</sup>. 作为特殊材料, 准晶被广泛应用于航空航天、军工、武器系统和医疗器械的制造. 此外, 准晶能够将热能转化为电能, 可作为热电材料将热能转化为电能, 从而可利用它们制作热能回收装置. 比如, 有些科学家利用准晶材料将汽车尾气转化为电能, 日常生活中将准晶用来制作不粘锅.

准晶材料在制造和使用过程中常常出现一些缺陷, 比如椭圆孔、圆孔、唇形孔口、位错、夹杂等, 以及由这些孔口产生的次生裂纹, 这些缺陷的存在使得准晶这种脆性材料在制造和使用过程中往往会发生

断裂失效. 因此, 近年来准晶材料的安全问题成为诸多学者关注的热点话题. 为了解决边界值问题, Liu 等<sup>[5]</sup> 列出了一维六方准晶中广义解和弹性场的控制方程, Zhang 等<sup>[6]</sup> 给出了一维正方准晶压电中平面弹性问题的广义解. 随后, Guo 和 Liu<sup>[7]</sup> 求得了圆孔次生两不对称裂纹问题的解析解, Guo 和 Lu<sup>[8-9]</sup> 解决了椭圆孔次生两对称裂纹问题, 得到了有关的解析解. Wang 和 Pan<sup>[10]</sup> 得到了一维六方准晶和二维八角准晶的缺陷问题的解析解. Altay 和 Dökmeçi<sup>[11]</sup> 研究了准晶压电体中的基本方程. Li 等<sup>[12]</sup> 给出了准晶压电材料中的三维基本方程和基本解. Li 等<sup>[13]</sup> 应用傅里叶变换技术研究了一维六方准晶体中具有多条 Griffith 裂纹的断裂特性. Sun 等<sup>[14]</sup> 调查了压电效应下一维准晶板的扭曲问题. Hu 等<sup>[15]</sup> 考虑了带压电效应的一维六方准晶材料的混合边界值问题. Zahra 和 Mahdi<sup>[16]</sup> 揭示了正交各向异性板的断裂响应, 导出了最大应变能释放率准则. Zhao 和 Guo<sup>[17]</sup> 讨论了一维六方准晶材料中孔

\* 国家自然科学基金项目(12162027, 12361076), 内蒙古自然科学基金项目(2021MS01001)和包头师范学院科研项目(BSYKJ2021-ZY03)资助.

2023-09-23 收到修改稿, 2023-10-12 网络首发.

\*\* 通讯作者. E-mail: gming99@126.com.

洞内部的表面效应和介电特性. Zhou 和 Li<sup>[18-20]</sup> 以及 Zhou<sup>[21]</sup> 应用傅里叶变换技术求解了一维六方压电准晶中反平面剪切和平面内电场作用下的运动裂纹问题, 币型介电裂纹引起的电弹性行为, 垂直于边界的共线裂纹的断裂问题以及运动位错等问题. 基于唇形裂纹这一经典的缺陷模型, 刘等<sup>[22]</sup> 研究了磁电弹性材料中唇形孔口的断裂问题; 钟和刘<sup>[23]</sup> 根据点群的对称性和线性压电效应, 研究了准晶压电材料中唇形裂纹的反平面问题, 利用柯西积分理论得到了裂尖处场强度因子和能量释放率的解析式; 于等<sup>[24]</sup> 利用复积分法发展了压电复合材料中唇形裂纹在电可通及电不可通边界条件下的复势法, 得到了 III 型唇形裂纹的解析表达式. 然而, 对于唇形孔口次生两不对称裂纹这一更切合实际的缺陷模型较以往的唇形裂纹模型有本质的难度, 至今仍未构造过, 该缺陷模型在准晶压电材料中的断裂问题研究是非常有意义的.

本文研究一维六方准晶压电材料中唇口次生两不对称裂纹的断裂问题, 首先利用复变函数方法, 推导出了一个新的保角变换公式, 然后利用 Cauchy 积分公式和 Matlab 计算软件为工具, 求得了场强度因子和能量释放率的封闭形式解, 结合数值算例分析了孔高和裂纹长度、材料参数对场强度因子和能量释放率的影响. 以上结论可以拓展到唇口次生单裂纹解和唇口次生两对称裂纹的解, 还可以退化为经典的 Griffith 裂纹解和经典的唇形裂纹解.

## 1 准晶材料的控制方程

假定一维六方准晶压电材料的极化方向是沿准周期的  $x_3$ -方向,  $x_1$ - $x_2$  面为各向同性平面, 变形将不会沿准周期方向变化. 为了研究唇口次生裂纹问题, 考虑与准周期方向垂直的周期平面弹性问题, 几何方程<sup>[25]</sup> 可以写成如下形式

$$\epsilon_{3j} = \epsilon_{j3} = u_{3,j}/2, \quad \omega_{3j} = \omega_{j3}, \quad E_j = -\varphi_j \quad (1)$$

在不考虑电荷密度和体力情况下, 场强度控制方程为

$$\sigma_{3j,j} = 0, \quad H_{3j,j} = 0, \quad D_{j,j} = 0 \quad (2)$$

以及本构关系

$$\begin{cases} \sigma_{3j} = C_{44} u_{3,j} + R_3 \omega_{3,j} + e_{15} \varphi_j \\ H_{3j} = R_3 u_{3,j} + K_2 \omega_{3,j} + d_{15} \varphi_j \\ D_j = e_{15} u_{3,j} + d_{15} \omega_{3,j} - \lambda_{11} \varphi_j \end{cases} \quad (3)$$

其中  $j=1, 2$ ;  $u_{3,j}, \epsilon_{3j}, \varphi$  分别表示声子场位移、应变和电势;  $\omega_{3,j}$  表示相位子场位移;  $\sigma_{ij}, H_{ij}, D_j$  分别表示声子场应力、相位子场应力和电位移;  $C_{44}, R_3$  分别表示声子场弹性张量和压电耦合张量,  $e_{15}$  表示声子场压电张量;  $d_{15}$  和  $\lambda_{11}$  分别表示相位子场压电张量和介电张量,  $K_2$  表示相位子场弹性张量.

由式(3)和式(2)得

$$\mathbf{B}_0 \nabla^2 \mathbf{u} = 0 \quad (4)$$

其中  $\nabla^2$  表示三维拉普拉斯算子, 且

$$\mathbf{u} = [u_3, \omega_3, \varphi], \quad \mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} C_{44} & R_3 & e_{15} \\ R_3 & K_2 & d_{15} \\ e_{15} & d_{15} & -\lambda_{11} \end{bmatrix} \quad (5)$$

广义位移  $\mathbf{u}$  可表示为

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}f(z) + \overline{\mathbf{A}f(z)}, \quad z = x_1 + ix_2 \quad (6)$$

其中  $\mathbf{A}$  表示  $3 \times 3$  单位矩阵,  $f(z)$  表示待定的复向量函数,  $\overline{(\ )}$  表示复共轭.

为了建立反平面变形的 Stroh 公式<sup>[24]</sup> 可表示为

$$[\sigma_{31}, H_{31}, D_1]^T = - \sum_{,1}, \quad [\sigma_{32}, H_{32}, D_2]^T = - \sum_{,2} \quad (7)$$

式(3)结合式(7)可得

$$\begin{cases} - \sum_{,2} = \mathbf{B}_0 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \mathbf{B}_0 \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1} \\ \sum_{,1} = \mathbf{B}_0 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \mathbf{B}_0 \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_2} \end{cases} \quad (8)$$

对式(8)中的两式之一的两边进行积分, 并引进广义应力函数向量  $\sum$ , 可得如下结果

$$\sum = \mathbf{B}f(z) + \overline{\mathbf{B}f(z)} \quad (9)$$

其中  $\mathbf{B} = i\mathbf{B}_0$

## 2 应力强度因子和解析解

现在考虑准晶压电体中含唇口次生两不对称裂纹的缺陷模型, 如图 1. 假设唇口两边的次生裂纹长度分别为  $L_1, L_2$ , 材料基体受到无穷远处电场、声子场以及相位子场机械载荷的反平面剪切应力的影响.

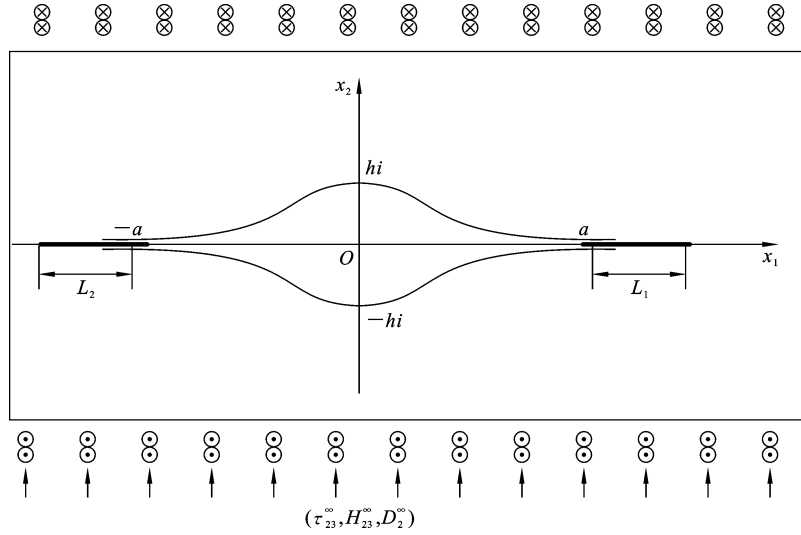


图 1 一维六方准晶压电体中唇口次生两不对称裂纹模型

Fig. 1 The model of Two unsymmetrical secondary rips from a lip-shaped orifice in 1D hexagonal PE QCs

### 2.1 保角变换公式

在公式(4)中  $|B_0| \neq 0$ , 引入复势函数<sup>[7]</sup>为:

$$f(z) = c^\infty z + f_0(z) \quad (10)$$

式中,  $c^\infty$  是与远场有关的复常数向量,  $f_0(z)$  是待定的解析函数向量,  $f_0(\infty) = 0$ .

将式(6)和(9)关于  $x_1$  求导得

$$u_{,1} = \mathbf{A}F(z) + \overline{\mathbf{A}F(z)} \quad (11)$$

$$\sum_{,1} = \mathbf{B}F(z) + \overline{\mathbf{B}F(z)} \quad (12)$$

其中  $F(z)$  表示  $df(z)/dz$ , 将(10)结合(11)和(12), 且让  $z \rightarrow \infty$ , 得到

$$u_{,1}^\infty = \mathbf{A}c^\infty + \overline{\mathbf{A}c^\infty} \quad (13)$$

$$\sum_{,1}^\infty = \mathbf{B}c^\infty + \overline{\mathbf{B}c^\infty} \quad (14)$$

其中

$$\sum_{,1}^\infty = (\sigma_{32}^\infty, H_{32}^\infty, D_2^\infty)^T, \quad u_{,1}^\infty = (\epsilon_{31}^\infty, \omega_{31}^\infty, -E_1^\infty) \quad (15)$$

在力电条件下, 唇口边裂纹的边界条件为

$$\mathbf{B}f(z) + \overline{\mathbf{B}f(z)} = \int_s t_s ds, \quad t_s = (t_3, h_3, -D_n)^T \quad (16)$$

其中  $h_3, t_3$  分别表示相位子场和声子场的反平面剪应力,  $D_n$  表示电位移沿边界的法向分量, 应用电非渗透型边界条件, 如果唇口边裂纹不受力, 式(16)变为

$$\mathbf{B}f(z) + \overline{\mathbf{B}f(z)} = 0 \quad (17)$$

将式(10)代入(17)得到

$$\mathbf{B}f_0(z) + \overline{\mathbf{B}f_0(z)} = -(\mathbf{B}c^\infty z + \overline{\mathbf{B}c^\infty z}) \quad (18)$$

为了得到复向量函数  $f_0(z)$ , 构造如下的保角变换公式(推导过程见附录)

$$z = \omega(\zeta) = \frac{a\rho}{2} \left\{ \mu(\zeta) - \frac{m}{\mu(\zeta)} + \frac{\mu(\zeta)}{\rho^2 [\mu^2(\zeta) - m]} \right\} \quad (19)$$

其中

$$\mu(\zeta) = \left\{ \epsilon_1(\zeta+1)^2 + \epsilon_2(\zeta-1)^2 + [(\epsilon_1^2-1)(\zeta+1)^4 + 2(\epsilon_1\epsilon_2+1)(\zeta-1)^2 + (\epsilon_2^2-1)(\zeta-1)^4]^{1/2} \right\} / 4\zeta \quad (20)$$

$$\epsilon_i = \frac{(1+l_i)^2 + b^2 + b + (1+l_i)\sqrt{l_i^2 + 2l_i + b^2}}{(1+b)(1+l_i + \sqrt{l_i^2 + 2l_i + b^2})} \quad (i=1,2)$$

公式(19)将  $z$ -平面上带两不对称裂纹的唇口外部区域映射到  $\zeta$ -平面上单位圆的外部区域, 且

$$\omega(1) = a + L_1 = \frac{a}{2} \left( 1 + l_1 + \frac{1}{1+l_1} \right)$$

$$\omega(-1) = -(a + L_2) = -\frac{a}{2} \left( 1 + l_2 + \frac{1}{1+l_2} \right)$$

由式(18)得到

$$\mathbf{B}f_0(\sigma) + \overline{\mathbf{B}f_0(\sigma)} = -[\mathbf{B}c^\infty \omega(\sigma) + \overline{\mathbf{B}c^\infty \omega(\sigma)}] \quad (21)$$

其中  $\sigma$  是单位圆周上的复变量, 且  $f_0(\sigma) = f_0[\omega(\sigma)]$ , 由式(19)和(21)发现  $\overline{\omega(\sigma)} = \omega(\sigma)$ , 由式(14)和

(21)得到

$$\mathbf{B}f_0(\sigma) + \overline{\mathbf{B}f_0(\sigma)} = - \sum_{,1}^{\infty} \omega(\sigma) \quad (22)$$

下面利用 Muskhelishvili 理论在公式(22)两边同乘

以  $\frac{d\sigma}{2\pi i(\sigma-\zeta)}$ , 并且沿单位圆周积分得到

$$\overline{\mathbf{B}f_0(\zeta)} = - \sum_{,1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau} \frac{\omega(\sigma)}{\sigma-\zeta} d\sigma, \quad |\zeta| < 1 \quad (23)$$

在公式(22)两边对变量  $\zeta$  求导可得

$$\frac{1}{\zeta^2} \overline{\mathbf{B}F_0(\zeta)} = \sum_{,1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau} \frac{\omega'(\sigma)}{\sigma-\zeta} d\sigma \quad (24)$$

其中  $F_0(\zeta) = df_0(\zeta)/d\zeta$ , 对公式(19)求导得  $\omega'(\zeta)$

$$v = \sqrt{(\epsilon_1^2 - 1)(1 + \zeta)^4 + 2(\epsilon_1 \epsilon_2 + 1)(1 - \zeta^2)^2 + (\epsilon_2^2 - 1)(1 - \zeta)^4}$$

$\omega'(\zeta)$  在单位圆外解析, 利用柯西积分公式得到

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\tau} \frac{\omega'(\sigma)}{\sigma-\zeta} d\sigma = \omega'(\infty) = \frac{a\rho(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{4} \quad (27)$$

由式(25)和式(27)得到

$$\mathbf{B}F_0 = \frac{a\rho(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{4\zeta^2} \quad (28)$$

### 2.2 场强度因子

作为一个重要的物理量, SIF 向量可以定义如下

$$\kappa = [K_{\text{III}}^{\sigma}, K_{\text{III}}^H, K_{\text{III}}^D] = \lim_{z \rightarrow z_1} \sqrt{2\pi(z - z_1)} \sum_{,1}^{\infty} \quad (29)$$

其中  $K_{\text{III}}^{\sigma}$ ,  $K_{\text{III}}^H$  和  $K_{\text{III}}^D$  分别表示声子场、相位子场和电场强度因子.

将公式(12)代入(29)得到

$$\kappa = [K_{\text{III}}^{\sigma}, K_{\text{III}}^H, K_{\text{III}}^D] = \lim_{z \rightarrow z_1} \sqrt{2\pi(z - z_1)} \mathbf{B}F_0(z) \quad (30)$$

在  $\zeta$  平面上, 利用洛必达法则计算, 式(30)化为

$$\kappa = 2 \sqrt{2\pi} \lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{\sqrt{\omega(\zeta) - \omega(1)} \mathbf{B}F_0(\zeta)}{\omega'(\zeta)} = 2 \sqrt{\pi} \lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{\mathbf{B}F_0(\zeta)}{\sqrt{\omega''(\zeta)}} \quad (31)$$

$$K = \frac{\sqrt{a\rho(\epsilon_1 + \epsilon_2)}}{\sqrt{\left[1 + \frac{m}{(\epsilon_1 + \sqrt{\epsilon_1^2 - 1})^2} - \frac{(\epsilon_1 + \sqrt{\epsilon_1^2 - 1})^2 + m}{\rho^2 [(\epsilon_1 + \sqrt{\epsilon_1^2 - 1})^2 - m]^2}\right]} \cdot \frac{(\epsilon_1 + \sqrt{\epsilon_1^2 - 1})}{\sqrt{\epsilon_1^2 - 1}}} \quad (35)$$

### 2.3 能量释放率

由文献[25, 26], 关于能量释放率的  $G$  积分可表示为

$$G = \frac{K_{\text{III}}^{\sigma} K_{\text{III}}^S + K_{\text{III}}^{\sigma} K_{\text{III}}^S - K_D K_E}{2} \quad (36)$$

如下

$$\omega'(\zeta) = \frac{a\rho}{2} \left\{ 1 + \frac{m}{\mu^2(\zeta)} - \frac{\mu^2(\zeta) + m}{\rho^2 [\mu^2(\zeta) - m]^2} \right\} \mu'(\zeta) \quad (25)$$

对式(20)求导得到

$$\mu'(\zeta) = \frac{\zeta^2 - 1}{4\zeta^2} \left\{ \epsilon_1 + \epsilon_2 + \frac{u}{v} \right\} \quad (26)$$

其中

$$u = (\epsilon_1^2 - 1)(1 + \zeta)^2 + 2(\epsilon_1 \epsilon_2 + 1)(\zeta^2 + 1) + (\epsilon_2^2 - 1)(1 - \zeta)^2$$

将公式(24)和(25)代入公式(31), 经过复杂计算得到

$$\kappa = \frac{a\rho(\epsilon_1 + \epsilon_2)\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega''(1)}} \begin{pmatrix} \sigma_{32}^{\infty} \\ H_{32}^{\infty} \\ D_2^{\infty} \end{pmatrix} \quad (32)$$

由公式(25)和(26)得到

$$\omega''(1) = \frac{a\rho}{4} \left\{ 1 + \frac{m}{(\epsilon_1 + \sqrt{\epsilon_1^2 - 1})^2} - \frac{(\epsilon_1 + \sqrt{\epsilon_1^2 - 1})^2 + m}{\rho^2 [(\epsilon_1 + \sqrt{\epsilon_1^2 - 1})^2 - m]^2} \right\} \frac{(\epsilon_1 + \sqrt{\epsilon_1^2 - 1})(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{\sqrt{\epsilon_1^2 - 1}} \quad (33)$$

另一方面, 式(32)可表示为

$$\kappa = \sqrt{\pi} \begin{pmatrix} \sigma_{32}^{\infty} \\ H_{32}^{\infty} \\ D_2^{\infty} \end{pmatrix} K \quad (34)$$

其中  $K$  表示无量纲应力强度因子, 经计算可表示为

其中  $K_{\text{III}}^S$  和  $K_{\text{III}}^{\sigma}$  分别表示声子场的应变强度因子和应力强度因子;  $K_{\text{III}}^{\sigma}$  和  $K_{\text{III}}^S$  分别表示相位子场的应力强度因子和应变强度因子;  $K_E$  和  $K_D$  分别表示电场强度因子和电位移强度因子. 由式(3), 以上应力强度因子有如下关系

$$\begin{cases} K_{\parallel}^{\text{III}} = C_{44} K_{\parallel}^{\text{S}} + R_3 K_{\perp}^{\text{S}} - e_{15} K_E \\ K_{\perp}^{\text{III}} = R_3 K_{\parallel}^{\text{S}} + K_2 K_{\perp}^{\text{S}} - d_{15} K_E \\ K_D = e_{15} K_{\parallel}^{\text{S}} + d_{15} K_{\perp}^{\text{S}} + \lambda_{11} K_E \end{cases} \quad (37)$$

将公式(37)代入(36),进一步计算得到

$$G = \frac{1}{2} (K_{\parallel}^{\text{S}}, K_{\perp}^{\text{S}}, K_E) \begin{pmatrix} C_{44} & R_3 & -e_{15} \\ R_3 & K_2 & -d_{15} \\ -e_{15} & -d_{15} & -\lambda_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{\parallel}^{\text{S}} \\ K_{\perp}^{\text{S}} \\ K_E \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (K_{\parallel}^{\text{III}}, K_{\perp}^{\text{III}}, K_D) \begin{pmatrix} C_{44} & R_3 & e_{15} \\ R_3 & K_2 & d_{15} \\ e_{15} & d_{15} & -\lambda_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{\parallel}^{\text{III}} \\ K_{\perp}^{\text{III}} \\ K_D \end{pmatrix} \quad (38)$$

公式(38)表明能量释放率受场强度因子和材料常数的影响,由公式(36)-(38)可得

$$G = \frac{\pi}{2 \det \mathbf{B}_0} \cdot \Pi \cdot K^2 \quad (39)$$

其中

$$\det \mathbf{B}_0 = -C_{44} K_2 \lambda_{11} + 2R_3 e_{15} d_{15} - K_2 e_{15}^2 + R_3^2 \lambda_{11} -$$

$$K = \frac{\sqrt{2a\rho\varepsilon}}{\sqrt{\left[1 + \frac{m}{(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1})^2} - \frac{(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1})^2 + m}{\rho^2 [(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1})^2 - m]^2}\right]} \cdot \frac{(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1})}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}} \quad (40)$$

(2) 如果  $L_2 \rightarrow 0$ , 令  $\varepsilon = \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 1$ , 公式(35)变为

只有唇口右边次生裂纹时的无量纲强度因子

$$K = \frac{\sqrt{a\rho(1+\varepsilon)}}{\sqrt{\left[1 + \frac{m}{(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1})^2} - \frac{(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1})^2 + m}{\rho^2 [(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1})^2 - m]^2}\right]} \cdot \frac{(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1})}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}} \quad (41)$$

(3) 如果唇口的高度  $h \rightarrow 0$ , 则  $m \rightarrow 0$ , 公式(35)简化为

$$K = \sqrt{\frac{2a + L_1 + L_2}{2}} \quad (42)$$

(4) 如果  $L_1 \rightarrow 0, L_2 \rightarrow 0$ , 同时  $h \rightarrow 0, m \rightarrow 0$ , 则式(35)可简化为

$$K = \sqrt{a} \quad (43)$$

公式(42)和(43)都是经典的 III 型裂纹的经典解<sup>[8]</sup>.

(5) 当  $L_1 \rightarrow 0, L_2 \rightarrow 0, \varepsilon_2 = \varepsilon_1 \rightarrow 1$  时, 公式(19)可简化为

$$z = \omega(\zeta) = \frac{a\rho}{2} \left[ \frac{1}{\zeta} - m\zeta + \frac{\zeta}{\rho^2(1-m\zeta^2)} \right] \quad (44)$$

公式(44)与文献[22]中的变换公式是一致的.

特别是  $\omega(-1) = -a, \omega(1) = a, \omega(i) = -$

$\frac{2ma}{1-m^2}i, \omega(-i) = \frac{2ma}{1-m^2}i$ , 利用数学软件 Math-

$$\begin{aligned} & C_{44} d_{15}^2 \\ \Pi = & (K_2 \lambda_{11} + d_{15}^2) (\sigma_{32}^\infty)^2 + (C_{44} \lambda_{11} + e_{15}^2) (H_{32}^\infty)^2 - \\ & (C_{44} K_2 - R_3^2) (D_2^\infty)^2 - 2(R_3 \lambda_{11} + e_{15} d_{15}) \sigma_{32}^\infty H_{32}^\infty - \\ & 2(R_3 d_{15} - K_2 e_{15}) \sigma_{32}^\infty D_2^\infty + 2(C_{44} d_{15} - R_3 e_{15}) \cdot \\ & H_{32}^\infty D_2^\infty \end{aligned}$$

$K$  由式(35)确定. 以上结果表明, 如果相位子场消失, 可变为压电复合材料中唇口次生裂纹的反平面问题的解析解; 如果电场消失, 目前的结果可变为—维六方准晶中唇口次生裂纹反平面问题的解析解.

附注: 公式(35)表示无量纲强度因子, 它确定了唇口次生两不对称裂纹的场强度和能量释放率. 在特殊的极限条件下, 可以得到一些新的缺陷模型

(1) 如果唇口两边的裂纹长度相等, 即  $L_1 = L_2$ , 则  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ , 得到

ematica 12.3, 对式(35)求极限运算可得

$$K = \frac{\sqrt{a}(1-\beta + \sqrt{\beta^2 + 1})}{2} \quad (45)$$

其中  $\beta = \frac{h}{a} = \frac{2m}{1-m^2}$ . 式(45)与文献[22]的结果完全一致.

### 3 数值算例

为了与文献的结果进行比较, 分析唇口次生裂纹的几何参数对应力强度因子和能量释放率的影响, 选择如下的材料参数<sup>[26]</sup>:

$$C_{44} = 50 \text{ GPa}, \quad R_3 = 1.2 \text{ GPa}$$

$$K_2 = 0.3 \text{ GPa}, \quad e_{15} = -0.138 \text{ C/m}^2$$

$$d_{15} = -0.160 \text{ C/m}^2, \quad \lambda_{11} = 82.6 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / (\text{N} \cdot \text{m}^2)$$

$$G_{cr} = 5.0 \text{ N/m}$$

其中  $C$  表示电荷单位库伦,  $N$  表示力的单位牛顿,  $G_{cr}$  表示标准能量释放率.

首先讨论几何参数对 SIF 和能量释放率的影响, 通过给出一些特殊值对公式(39), (40)和(50)作图 2-图 9. 图 2 表示了当  $a=0.01\text{ m}$ ,  $h=0.005\text{ m}$  时,  $K$  随唇口右裂纹长度的变化曲线. 图像表明, 由于缺陷的对称性, 唇口两侧裂纹长度增大时,  $K$  都是变大的. 图 3 表示当  $a=0.01\text{ m}$ ,  $L_1=0.005\text{ m}$  时  $K$  随唇口高度  $h$  的变化曲线, 表明当唇口高度  $h$  增大时  $K$  逐渐变小; 当一侧裂纹长度为零时,  $K$  随唇口高度  $h$  的增大先增大后减小最后逐渐趋于常数, 反之也是成立的; 当一侧裂纹长度不变, 另一侧裂纹长度  $L_2 > 0$  时,  $K$  随唇口高度  $h$  的增大一直减小逐

渐趋于常数. 因此, 增加唇口的高度往往会抑制裂纹的扩展, 增加唇口两边次生裂纹的长度会促进裂纹的扩展.

图 4 中的图像表示当唇口两边的次生裂纹长度都为零时  $K$  随唇口高度  $h$  的变化曲线, 该曲线显示, 随着唇口高度  $h$  的不断增大,  $K$  不断减小最后趋于一稳定的常数, 该结果与文献[22]的相应结果一致, 从而验证了结果的正确性. 图 3 与图 4 的结果是相一致的, 由此可知, 唇口两侧裂纹长度的伸长都会促进材料的断裂. 图 5 描述了能量释放率随声子场载荷的变化规律, 随着声子场载荷的增大, 能量释放率逐渐变大, 从而促使裂纹扩展, 与文献[27]的结论基本一致.

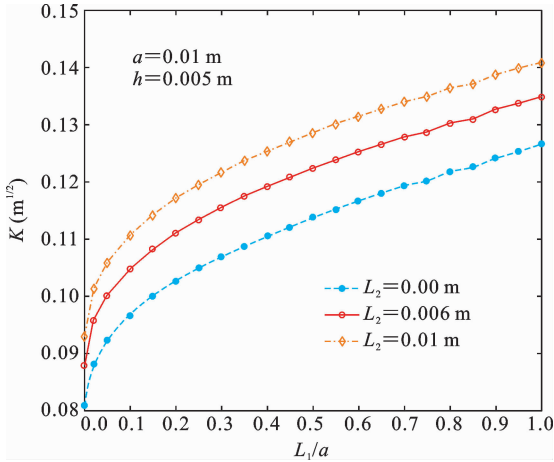


图 2  $K$  随  $L_1/a$  的变化规律

Fig. 2 Change of  $K$  with a ratio  $L_1/a$

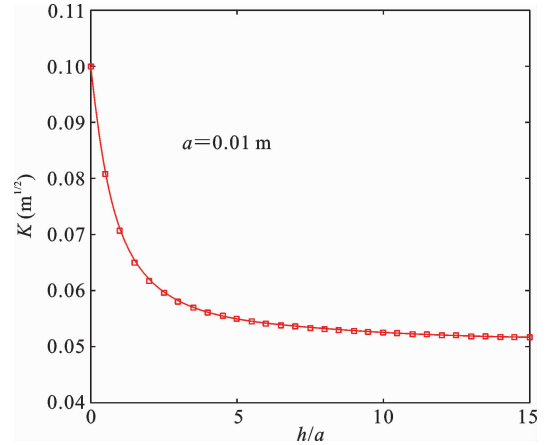


图 4 唇口中  $K$  随  $h/a$  的变化曲线

Fig. 4 Change of  $K$  with ratio  $h/a$  of lip-shape

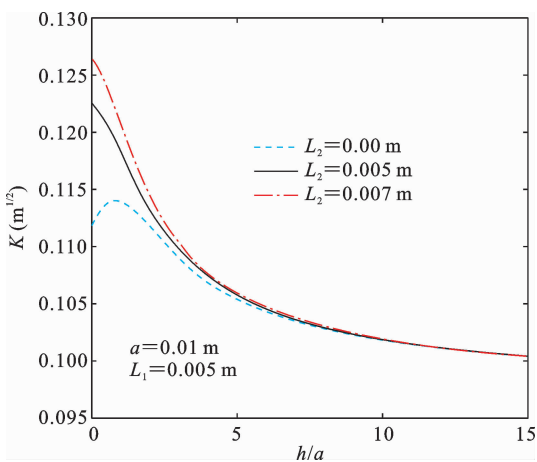


图 3  $K$  随  $h/a$  的变化规律

Fig. 3 Change of  $K$  with a ratio  $h/a$

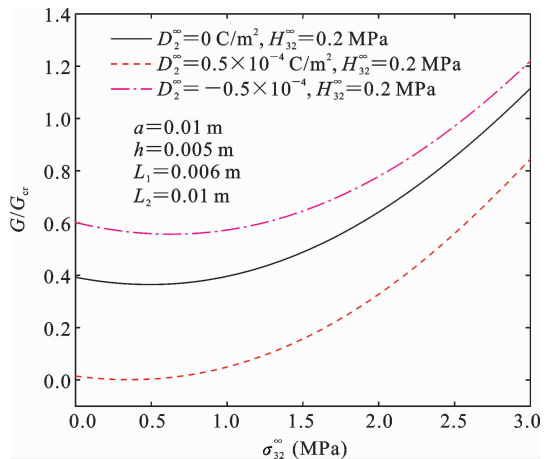


图 5 声子场应力  $\sigma_{32}^{\infty}$  对能量释放率  $G$  的作用

Fig. 5 Influence of phonon field load  $\sigma_{32}^{\infty}$  upon energy release rate  $G$

当  $D_{32}^{\infty} = 0 \text{ C/m}^2$  时,材料退化为一维六方准晶材料,图 6 表示了此时声子场应力  $\sigma_{32}^{\infty}$  对能量释放率  $G$  的影响规律. 由图可以看出,当声子场应力变大时,能量释放率不断变大,当声子场不变时,增加缺陷的几何尺寸能量释放率也变大. 在声子场应力不变时,唇口两边裂纹长度的增加会使能量释放率增强. 图 7 描了相位子场应力  $H_{32}^{\infty}$  对能量释放率  $G$  的影响规律. 由图可知,当相位子场应力变大时,能量释放率也不断变大,当相位子场应力不变时,增加缺陷的几何尺寸可使能量释放率变大;当相位子场应力  $H_{32}^{\infty} < 5 \text{ MPa}$  时,几何尺寸对能量释放率的影响可以忽略不计,而当  $H_{32}^{\infty}$  不断变大时,几何尺寸对能量释放率的影响越来越明显. 因此,以上两图可以看出,机械载荷与缺陷尺寸的变大往往促进裂纹的扩展,与经典的结论相一致.

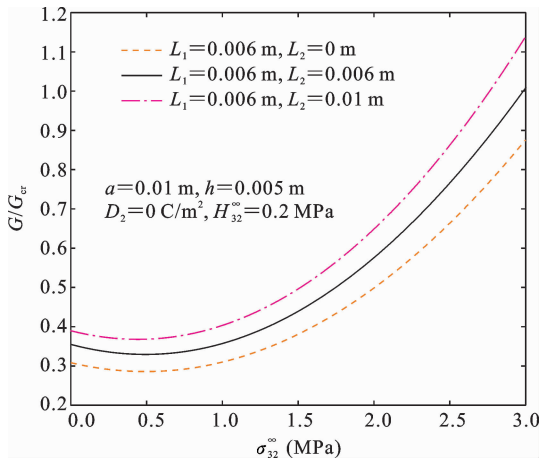


图 6  $D_{32}^{\infty} = 0 \text{ C/m}^2$  时声子场应力  $\sigma_{32}^{\infty}$  对能量释放率  $G$  的影响  
Fig. 6 As  $D_{32}^{\infty} = 0 \text{ C/m}^2$ , influence of phonon field load  $\sigma_{32}^{\infty}$  upon energy release rate  $G$

图 8 描述了在给定的唇口裂纹的几何参数  $a = 0.01 \text{ m}$ ,  $h = 0.005 \text{ m}$ ,  $L_1 = 0.006 \text{ m}$ , 和应力载荷  $H_{32}^{\infty} = 0.4 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{32}^{\infty} = 0.5 \text{ MPa}$ ,  $D_2^{\infty} = 0.5 \times 10^{-4} \text{ C/m}^2$  下标准能量释放率随准晶耦合系数  $R_3$  的变化曲线,由图可以看出,随着准晶系数  $R_3$  的增大能量释放率先缓慢变大然后迅速变大;当  $R_3$  一定时,次生裂纹越长,能量释放率越大. 图 9 揭示了相位子场弹性常数  $K_2$  对标准能量释放率的影响规律. 由图可以看出,随着弹性常数  $K_2$  的不断增大,能量释放

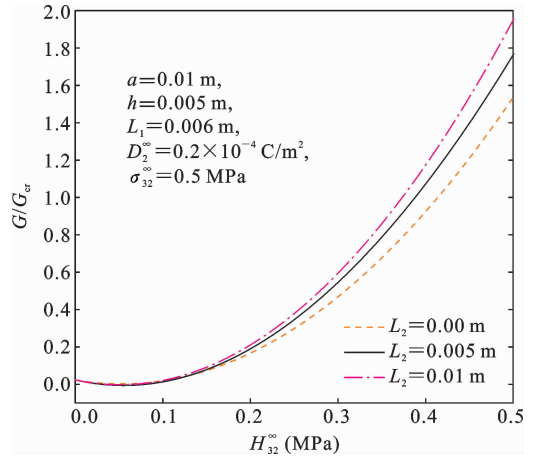


图 7 相位子场应力  $H_{32}^{\infty}$  对能量释放率  $G$  的作用  
Fig. 7 Influence of phase load  $H_{32}^{\infty}$  upon energy release rate

率不断减小;当相位子场弹性常数不变时,几何尺寸越大,能量释放率也越大. 由此可知,弹性常数越大,材料越稳定,裂纹越不易扩展.

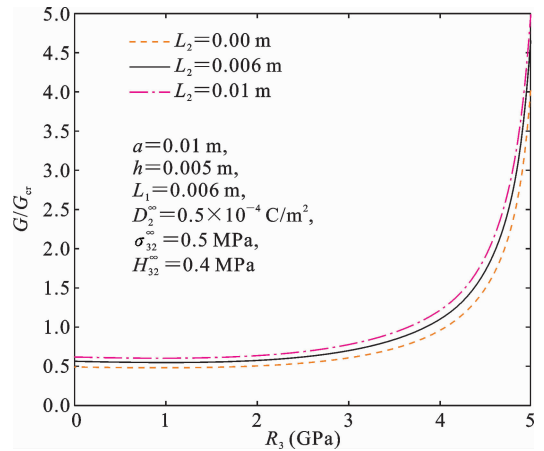


图 8 准晶耦合系数  $R_3$  对能量释放率的影响规律  
Fig. 8 Influence of quasicrystal coupling coefficient  $R_3$  on energy release rate

图 10 和图 11 描述了缺陷的宏观尺寸对能量释放率的影响. 在给定的机械载荷和电载荷的条件下,能量释放率随两边次生裂纹的变长不断增大. 当一边裂纹  $L_2 = 0$  时,随唇口高度  $h$  的增大,能量释放率先增大然后逐渐减小,最后趋向于一个常数. 当裂纹长度  $L_2 > 0$  时,能量释放率随唇口高度  $h$  的增大始终减小;增加唇口两边裂纹的长度可以促使裂纹扩展,增加唇口的高度反而抑制裂纹的扩展.

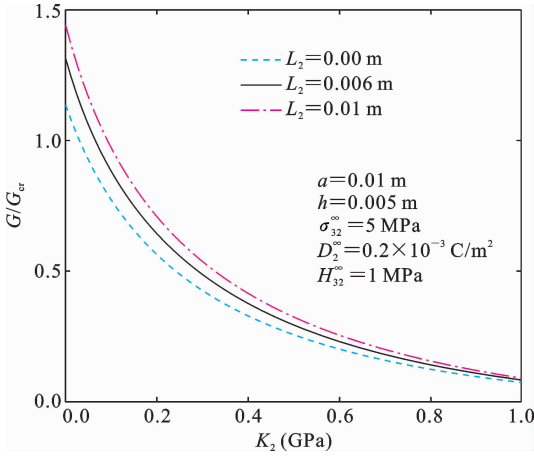


图 9 相位子场弹性常数  $K_2$  对能量释放率的影响  
Fig. 9 Influence of phase elastic constant  $K_2$  on energy release rate

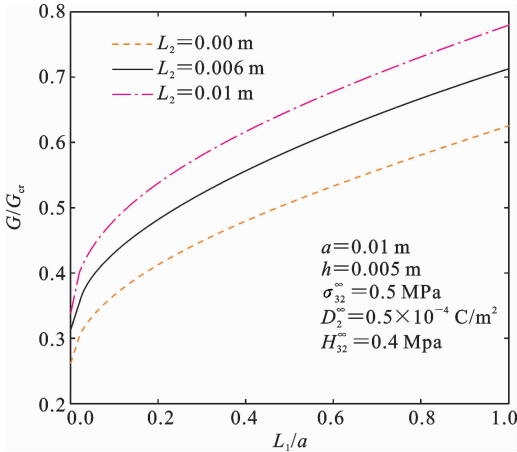


图 10 裂纹长度对能量释放率  $G$  的作用  
Fig. 10 Effect of rip length upon energy release rate  $G$

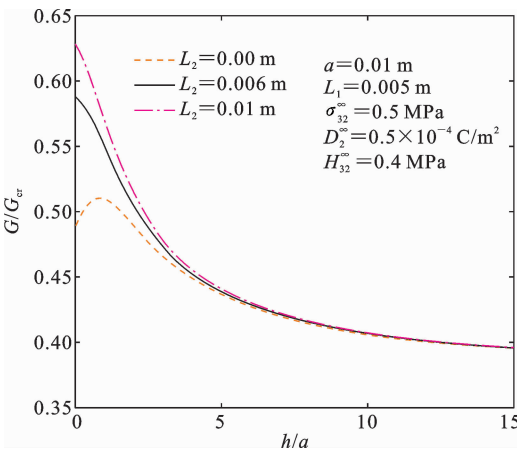


图 11  $h/a$  对能量释放率  $G$  的作用  
Fig. 11 Impact of the ratio  $h/a$  upon energy release rate  $G$

由文献[28],对上述计算结果可做理论分析如下.

唇口作为 V 型切口,若张角是  $2\theta$ ,平面应变和平面应力状态下的特征距离分别为

$$R_\theta^1 = \frac{(1+\alpha)(5-8\alpha)}{4\pi} \left( \frac{K_\theta}{\tau_u} \right)^2, \quad R_\theta^2 = \frac{5-3\alpha}{4\pi} \left( \frac{K_\theta}{\tau_u} \right)^2$$

其中  $\tau_u$  表示拉伸强度,  $K_\theta$  表示平均断裂韧度.

在线弹性断裂力学中,应变能密度可表示为

$$Q = \frac{1}{2E} [\tau_r^2 + \tau_\theta^2 - 2\alpha\tau_r\tau_\theta + 2(1+\alpha)\tau_\theta^2]$$

裂纹尖端一定体积的截面积为

$$S = \int_0^{R_\theta} \int_{-\theta}^{\theta} r dr d\varphi = (R_\theta^i)^2 \theta \quad (i = 1, 2)$$

平均应变能密度可表示为

$$\bar{Q} = \frac{\int_0^{R_\theta} \int_{-\theta}^{\theta} Q r dr d\varphi}{S} = \frac{K_{10}^2 I_{A1}(\theta) + K_{20}^2 I_{A2}(\theta)}{ER_\theta} \quad (46)$$

当平均应变能密度达到材料的临界值  $Q_c = \frac{\tau_u^2}{2E}$

时材料往往会发生断裂. 由式(46)可以看出当唇口高度  $h$  变大时,切口张角  $2\theta$  也变大,平均应变能密度变小,裂尖处反而不易发生断裂,与图 3 和图 10 的结论是一致的.

## 4 结论

本文应用复变函数方法,结合 Muskhelishvili 理论,在断裂力学中建立了唇口次生两不对称裂纹模型,讨论了一维六方准晶压电材料中该缺陷模型的反平面剪切问题. 得到了右侧裂纹端点处的应力强度因子和能量释放率的解析解. 在特殊条件下,可以进一步推广到只在唇口一边有次生裂纹、唇口两边有两条等长的次生裂纹的解析解,这些结果还可以退化成已有的结果,例如经典的 Griffith 裂纹解、无次生裂纹的唇口裂纹解. 数值算例阐明了唇口尺寸和裂纹长度对能量释放率和场强度因子的作用规律. 结论可归结如下:

(1) 当唇口两边次生裂纹的长度不断变长时,裂纹端点处的场强度因子和能量释放率都会不断变大,从而促进裂纹的扩展;当缺陷的几何尺寸固定时,电场和机械载荷强度的增大总是促进裂纹的

扩展.

(2) 由剪应力对称性可知,当唇口一侧的次生裂纹的长度为零时,随着唇口高度的增加,另一侧裂尖处的应力强度因子和能量释放率先变大到达极值点后渐渐变小,慢慢趋向于一个稳定的常数;当唇口一边的裂纹长度较大且唇口变高时,另一侧裂尖处场强度因子和能量释放也都会逐渐变小,从而抑制

裂纹的扩展.当唇口的高度变得足够大时,唇口两侧的边裂纹对场强度因子和能量释放率的影响可以忽略不计.

(3) 结果表明,如果相位子场消失,本文结果变为压电复合材料中唇形裂纹反平面问题的解析解;如果电场消失,该结果变为一维六方准晶中唇形裂纹反平面问题的解析解.

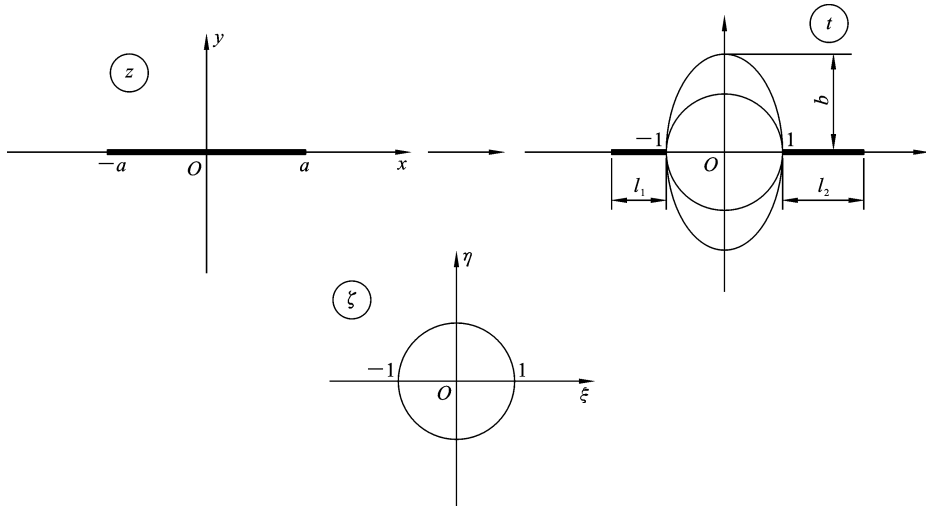


图 12 由含唇口带两不对称次生裂纹的无限大平面到单位圆外部区域的保角变换

Fig. 12 Conformal transformation from the exterior of the lip-shaped orifice with two lips to the exterior region of the unit circle

### 附录 保角变换公式的推导

由  $z$ -平面上含直裂纹  $(-a, a)$  外部区域的无限大平面到单位圆外部区域的变换公式如下

$$z = \frac{a}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right) \quad (A1)$$

受到文献[8]的启发,从椭圆孔次生两不对称裂纹的外部区域到单位圆外部区域的拱形变换公式为

$$t = \rho \left[ \mu(\zeta) - \frac{m}{\mu(\zeta)} \right] \quad (A2)$$

其中  $m = \frac{b-1}{b+1}$ ,  $\rho = \frac{1}{1-m}$  ( $0 \leq m < 1$ )

将(A2)代入(A1),得到

$$z = \omega(\zeta) = \frac{a\rho}{2} \left\{ \mu(\zeta) - \frac{m}{\mu(\zeta)} + \frac{\mu(\zeta)}{\rho^2 [\mu^2(\zeta) - m]} \right\}$$

### 参考文献

[1] Shechtman D, Blech I, et al. Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry[J]. Physics Review Letters. 1984, 53: 1951-1953.

[2] Yang W G, Wang R, Ding, D H, and Hu C Z. Elastic strains induced by electric fields in QCs[J]. Journal of Physics: Condensed Matter, 1995, 7: L499-L502.

[3] Rao R M K, Rao H P and Chaitanya B S K. Piezoelectricity in QCs: a group-theoretical study[J]. Prana-Journal of Physics, 2007, 68: 481-487.

[4] Hu C Z, Yang W, Wang R and Ding D H. Point groups and elastic properties of two-dimensional QCs [J]. Acta Crystallographica, 2014, 52: 251-256.

[5] Liu G T, Fan T Y and Guo R P. Governing equations and general solutions of plane elasticity of one-di-

- mensional QCs[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2004, 41: 3949-3959.
- [6] Zhang L L, Zhang Y M, Gao Y. General solutions of plane elasticity of one-dimensional orthorhombic quasicrystals with piezoelectric effect[J]. *Physics Letters A*, 2014, 378: 2768-2776.
- [7] Guo J H, Liu G T. Analytic solutions of the problem of a circular hole with asymmetric cracks in one-dimensional hexagonal quasicrystals[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica-English Series*, 2007, 30: 1066-1075.
- [8] Guo, J H, Lu Z X. Exact solutions for the anti-plane problem of two asymmetrical cracks emanating from an elliptical hole in a piezoelectric material[J]. *International Journal of Solids and Structure*, 2009, 46: 3799-3809.
- [9] Guo J H, Lu Z X. Fracture behavior of two non-symmetrical collinear cracks emanating from an elliptical hole in a piezoelectric material front[J]. *Frontier of Mechanical Engineering*, 2011, 6: 296-300.
- [10] Wang X and Pan E. Analytical solutions for some defect problems in 1D hexagonal and 2D octagonal quasicrystals[J]. *Pramana-Journal of Physics*, 2008, 93: 911-933.
- [11] Altay G, Dökmeçi M C. On the fundamental equations of piezoelectricity of quasicrystal media[J]. *International Journal of Solids & Structures*, 2012, 49: 3255-3262.
- [12] Li X Y, Li P D, Wu T H, Shi MX, and Zhu Z W. Three-dimensional fundamental solutions for one-dimensional of hexagonal quasicrystal with piezoelectric effect[J]. *Physics Letters A*, 2014; 378(10): 826-834.
- [13] Li Y S, Multiple collinear Griffith cracks in a one-dimensional hexagonal quasicrystalline layer[J]. *Acta Mechanica*, 2016, 227(12): 3671-3686.
- [14] Sun T Y, Guo J H, et al, Static deformation of a multilayered one-dimensional hexagonal quasicrystal plate with piezoelectric effect[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, 39: 18.
- [15] Hu K Q, Meguid S A, Zhong Z, et al. Partially debonded circular inclusion in one-dimensional quasicrystal material with piezoelectric effect[J]. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 2020, 16: 749-766.
- [16] Zahra, K, Mahdi, F, Examining the effect of crack initiation angle on fracture behavior of orthotropic materials under mixed-mode I / II loading[J]. *International Journal of Solids and Structure*, 2022, 2566:1-33.
- [17] Zhao Z, Guo J H, Surface effects on a mode-III reinforced nano-elliptical hole embedded in one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystals[J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2021, 42: 625-640.
- [18] Zhou Y B, Li X F. A Yoffe-type moving crack in one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystals [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2019, 65: 148-163.
- [19] Zhou Y B, Li X F. Fracture analysis of an infinite 1D hexagonal piezoelectric quasicrystal plate with a penny-shaped dielectric crack[J]. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 2019, 76: 224-234.
- [20] Zhou Y B, Li X F. Two collinear mode-III cracks in one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystal strip[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2018, 189: 133-147.
- [21] Zhou X F. Exact solution of two collinear cracks normal to the boundaries of a 1D layered hexagonal piezoelectric quasicrystal[J]. *Philosophical Magazine: Structure and Properties of Condensed Matter*, 2018, 98: 1780-1798.
- [22] 刘鑫, 郭俊宏, 于静. 磁电弹性材料中唇形裂纹反平面问题[J]. *内蒙古大学学报(自然科学版)*, 2016, 47: 38-45. (Liu X, Guo J H, Anti-plane problem of a lip-shaped crack in a magnetoelectric-elastic material [J]. *Journal of Inner Mongolia University (Natural Science Edition)*, 2016, 47: 37-45. (in Chinese))
- [23] 钟海英, 刘官厅. 一维六方准晶压电材料中唇形裂纹反平面问题的解析解[J]. *固体力学学报*, 2015, 36(2): 179-184. (Zhong H Y, Liu G T. Anti-plane analytic solutions of problem about a lip-shape crack in piezoelectricity of one-dimensional hexagonal quasicrystals[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2015, 36(2): 179-184. (in Chinese))
- [24] 于静, 郭俊宏, 邢永明. 压电复合材料中III型唇形裂

- 纹问题的解析解[J]. 复合材料学报, 2014(5): 1357-1363. (Yu J, Guo J H, Xing Y M. Analytical solutions of model III lip-shape crack in piezoelectric composites[J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2014(5): 1357-1363. (in Chinese))
- [25] Yu J, Guo J H, Pan E, et al. General solutions of plane problem in one-dimensional quasicrystal piezoelectric materials and its application on fracture mechanics. Applied Mathematics and Mechanics, 2015, 36: 793-814.
- [26] Ding, D H, Yang W G, Hu C Z, Wang R H. Generalized elasticity theory of quasicrystals[J]. Physics Review B, 1993, 48: 7003-7010.
- [27] Yang D S, Liu G T. Anti-plane problem of nano-cracks emanating from a regular hexagonal nano-hole in one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystals[J]. Physics Review B, 2020, 29(10): 104601.
- [28] 郭怀民, 高明, 赵国忠. 磁电弹性体中唇形运动裂纹问题分析[J]. 力学季刊, 2017, 38: 518-526. (Guo H M, Gao M, Zhao G Z. Analysis for a lip-shaped moving cracks in magneto-electroelastic body [J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2017, 38: 518-526. (in Chinese))

# The Anti-plane Shear Problem of a Lip-Shaped Orifice with Two Asymmetric Edge Rips in the One-Dimensional Hexagonal Piezoelectric Quasicrystal Material

Huaimin Guo<sup>1</sup> Guozhong Zhao<sup>1</sup> Guanting Liu<sup>2</sup> Lijuan Jiang<sup>1</sup>

(<sup>1</sup>College of Mathematics Science, Baotou Teacher's College, Baotou, 104030)

(<sup>2</sup>College of Mathematics Science, Inner Mongolia Normal University, Hohhot, 010022)

**Abstract** Defects play a crucial role in understanding the physical and mechanical behavior of materials. In this study, the fracture problem of an infinite one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystal material matrix containing secondary asymmetric straight cracks with lip-shaped pores is investigated. A defect mechanics model of secondary asymmetric cracks with lip-shaped pores is constructed for the first time. Utilizing conformal transformation technology, a conformal transformation formula from an infinite region containing secondary asymmetric cracks at the lip on the physical plane to the outer region of the unit circle is built. Using the complex variable method, analytical expressions for the field intensity factor and energy release rate at the crack tip are obtained. Under given conditions, these analytical results can be simplified into solutions for other defect models, such as secondary single cracks at the lip and secondary symmetric cracks at the lip. At the same time, they can also degenerate into the solutions of classical Griffith cracks and lip cracks without secondary cracks. Numerical examples reveal the effects of defect size, particularly the lip height and crack length, on the field intensity factor and energy release rate. The results show that increasing the length of both sides of the crack promotes crack propagation, while increasing the height of the lip inhibits crack propagation. These findings are consistent with the conclusions drawn from theoretical analysis. When the length of the secondary crack on one side of the lip is zero, as the height of the lip increases, the stress intensity factor and energy release rate at the crack tip on the other side first increase to a peak and then gradually decrease, eventually stabilizing at a constant level. The research results presented in this paper can contribute to the development of a theoretical framework for material fracture mechanics and provide technical assistance for nondestructive testing, reliability design, and optimization of piezoelectric quasicrystal material equipment and components.

**Key words** piezoelectric quasicrystals, lip-shaped orifice, field intensity factor, exact solution, energy release rate